

**Конечно-элементное моделирование и анализ динамического  
контактного взаимодействия пары железнодорожное колесо-рельс**

Докладчик: студент гр. 70301 Богданов Б.В.

Руководитель: директор ВШ МиПУ ИПММ, д.н., профессор, чл.-корр. РАН Д.А. Индейцев

Консультант: ведущий программист ВШ МиПУ ИМПШ В.С. Модестов

Санкт-Петербург

2021

Цель работы – оценка прогиба пути под действием динамической нагрузки

Задачи:

1. Анализ системы колесо-рельс на примере динамически нагруженной балки на упругом основании
2. Создание модели для оценки прогиба при динамическом нагружении колесной тележкой
3. Верификация модели по экспериментальным данным
4. Создание КЭ модели контактного динамического взаимодействия

## Модель балки Эйлера-Бернулли на упругом основании Винклера

3

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + ky(x,t) = P \delta(x-vt) \quad (1)$$

$$-\infty \leq x \leq \infty, \quad y(\pm\infty) \rightarrow 0, \quad y'(x-vt) = 0, \quad y'''(x-vt) = \frac{P}{EI}$$

$$y(x,0) = 0, \quad \dot{y}(x,0) = 0$$

$EI$  – жесткость поперечного сечения балки при изгибе

$x$  – абсцисса текущего сечения балки

$t$  – время

$y(x,t)$  – прогиб

$m$  – погонная масса балки

$k$  – коэффициент пропорциональности, характеризующий жесткость основания

$P$  – амплитуда нагрузки

$v$  – скорость перемещения нагрузки

$\delta$  – дельта функция Дирака

Основные характеристики

$$E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

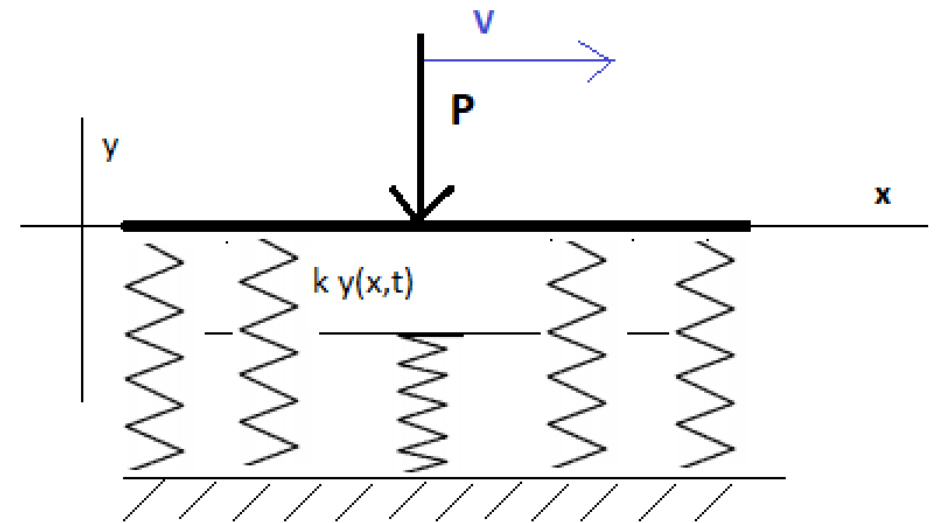
$$I = 3548 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$$

$$k = 50 \cdot 10^6 \text{ Па/м}$$

$$m = 64.88 \text{ кг}$$

$$P = [105:165] \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$v = [0:300] \text{ км/ч} = [0:83.3] \text{ м/с}$$



## Решение дифференциального уравнения балки на упругом основании

Вводя новые переменные:

$$a = \frac{m}{2EI}, \quad b^2 = \frac{k}{EI}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{b - av^2}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{b + av^2}{2}}$$

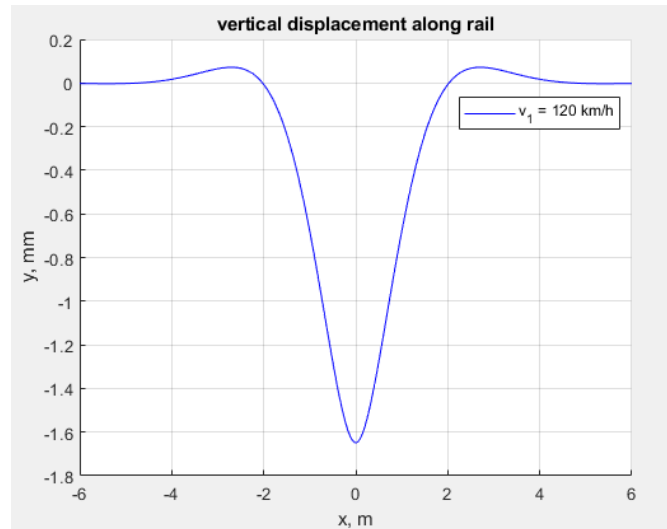
Решение принимает вид:

$$y(x - vt) = -\frac{1}{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \frac{P}{EI} (\alpha \sin \beta |x - vt| + \beta \cos \beta |x - vt|) e^{-\alpha|x - vt|} \quad (2)$$

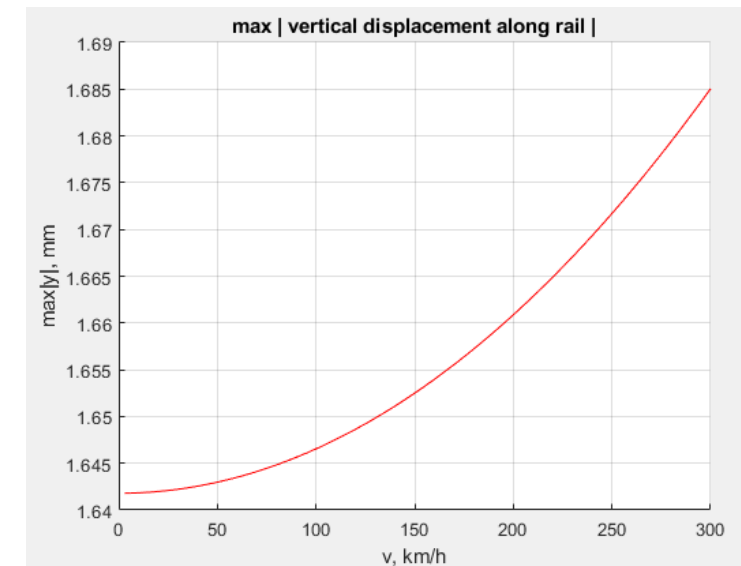
Наибольший интерес представляет прогиб в сечении под колесом  $x = vt$ 

$$y(0) = \frac{-P}{EI} \frac{1}{b\sqrt{2(b - av^2)}} \quad (3)$$

:



Вид прогиба для скорости 120км/ч и нагрузки 105кН



Зависимость максимального прогиба от скорости

## Анализ решения

Рассмотрим коэффициент динамичности - отношение прогиба для заданной скорости к статическому прогибу в подколесном сечении

$$\frac{y_v}{y_{v=0}} = \sqrt{\frac{b}{(b-av^2)}} = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{mv^2}{2\sqrt{kEI}}}} \quad (4)$$

$$v_{кр} = \sqrt{2\frac{\sqrt{kEI}}{m}}$$

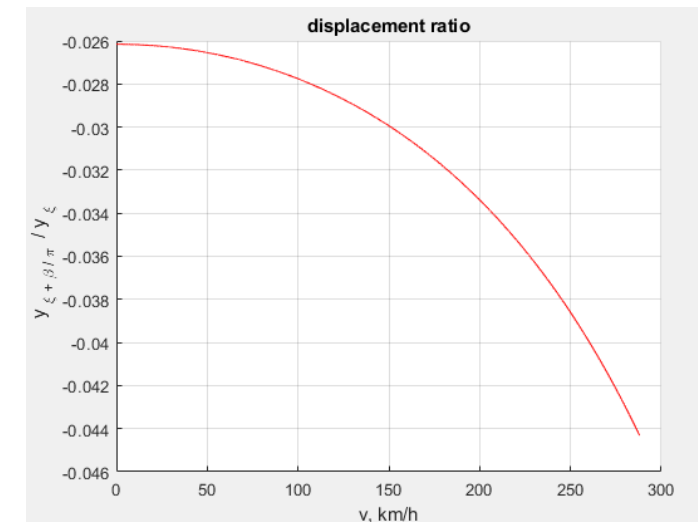
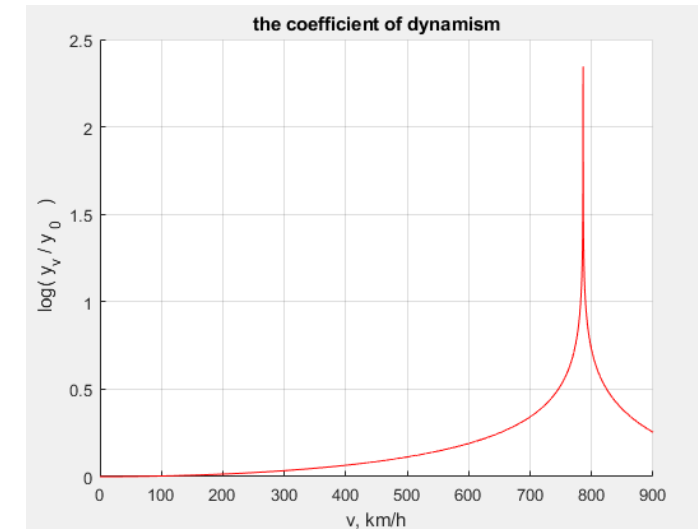
Также рассмотрим отношение перемещений в точках  $\xi, \xi + \frac{\pi}{\beta}$

$$\frac{y\left(\xi + \frac{\pi}{\beta}\right)}{y(\xi)} = -e^{-\alpha\pi} \quad (5)$$

Если ввести критерий малости вертикальных перемещений, то на основе формулы (5), можно получить оценку длины балки, которую можно считать бесконечной

Так например, для данной конфигурации отношение в точка  $\xi, \xi + \frac{\pi}{\beta}$

для диапазона скоростей [0:300]км/ч  $\left[-\frac{1}{40} : -\frac{1}{20}\right]$



## Модель нагружения колесной парой, сравнение с экспериментом

6

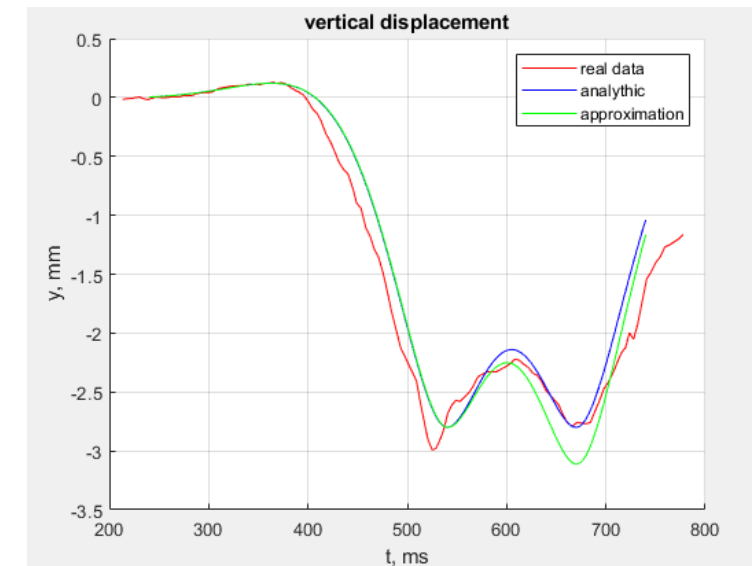
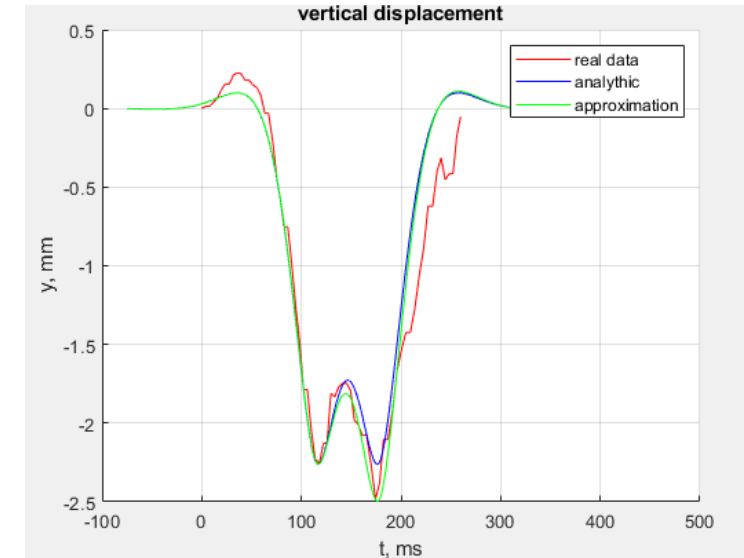
Уравнение (1) преобразуется к виду

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + ky(x,t) = \sum_{i=1}^n P_i \delta(x+x_{ni} - v_i t) \quad (4)$$

Решение уравнения (4) сравнивается с результатами натурального эксперимента. Эксперимент проводился следующим образом. На шпалу крепится контрольный датчик, далее фиксируется вертикальное положение датчика оптическим методом с частотой 240Гц.

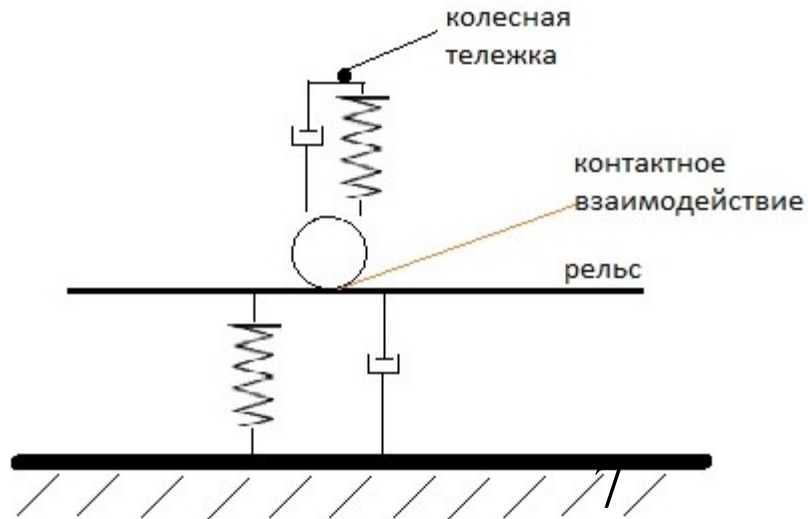
Для рассмотрения были взяты данные о прохождении тележки грузового и пассажирских составов, со скоростью 120 и 150 км/ч соответственно.

Т.к. прогиб при прохождении первого и второго колеса тележки разный, то для моделирования были выбраны силы с разной амплитудой, что позволило учесть этот эффект.

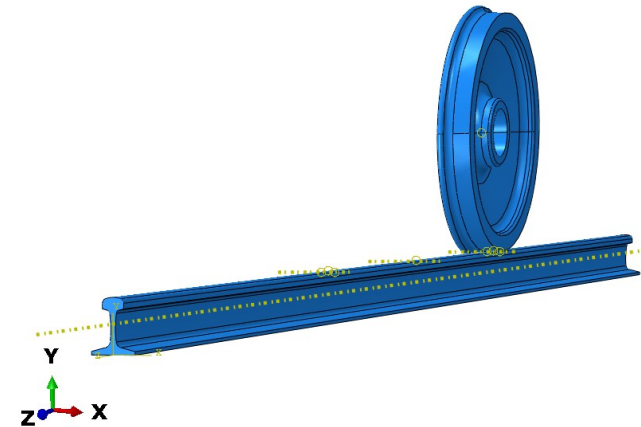


## Конечно-элементное моделирование системы колесо рельс

7



Механическая модель



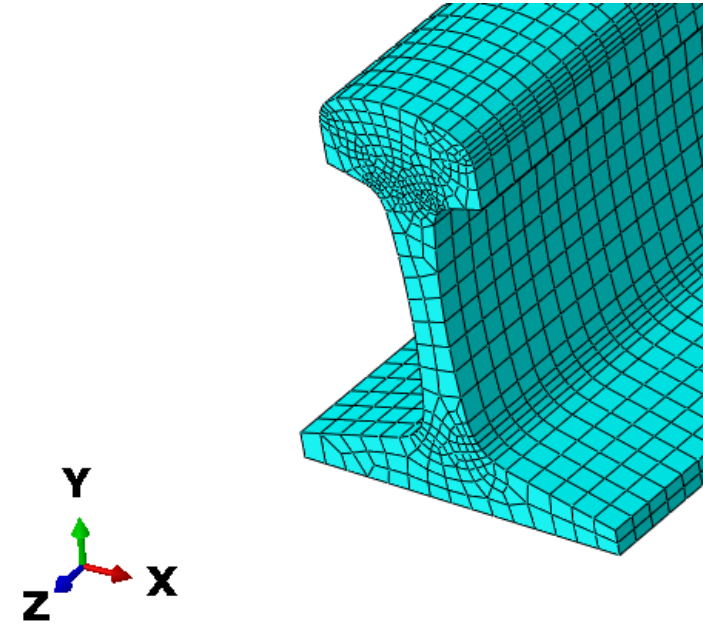
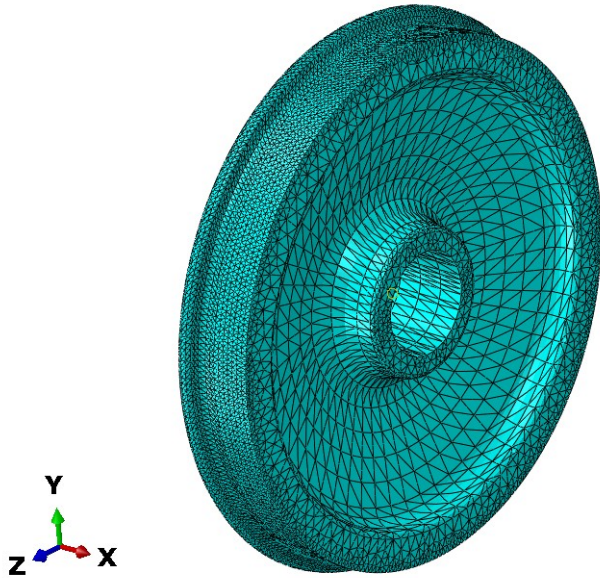
Геометрическая модель в Abaqus

	Наименование величины	Величина	Единицы измерения
колесо	Плотность	7800	кг/м <sup>3</sup>
	Модуль Юнга	$2.1 \cdot 10^5$	МПа
	Коэффициент Пуассона	0.3	
	Предел текучести	792	МПа
рельс	Плотность	7800	кг/м <sup>3</sup>
	Модуль Юнга	$2.1 \cdot 10^5$	МПа
	Коэффициент Пуассона	0.3	
	Предел текучести	810	МПа

Наименование величины	Величина	Единицы измерения
Масса колеса	398	кг
Погонная масса рельса	64.88	кг/м
Усилие на ось	105	кН
Коэффициент жесткости колесо-тележка	900	кН/м
Коэффициент демпфирования колесо-тележка	250	кНс/м
Коэффициент жесткости рельс-балласт	665	кН/м
Коэффициент демпфирования рельс-балласт	53	кНс/м

## Конечно-элементная модель

8



Тип КЭ элементов

тетраэдрический, гексагональный

Количество КЭ элементов

колесо

65574

рельс

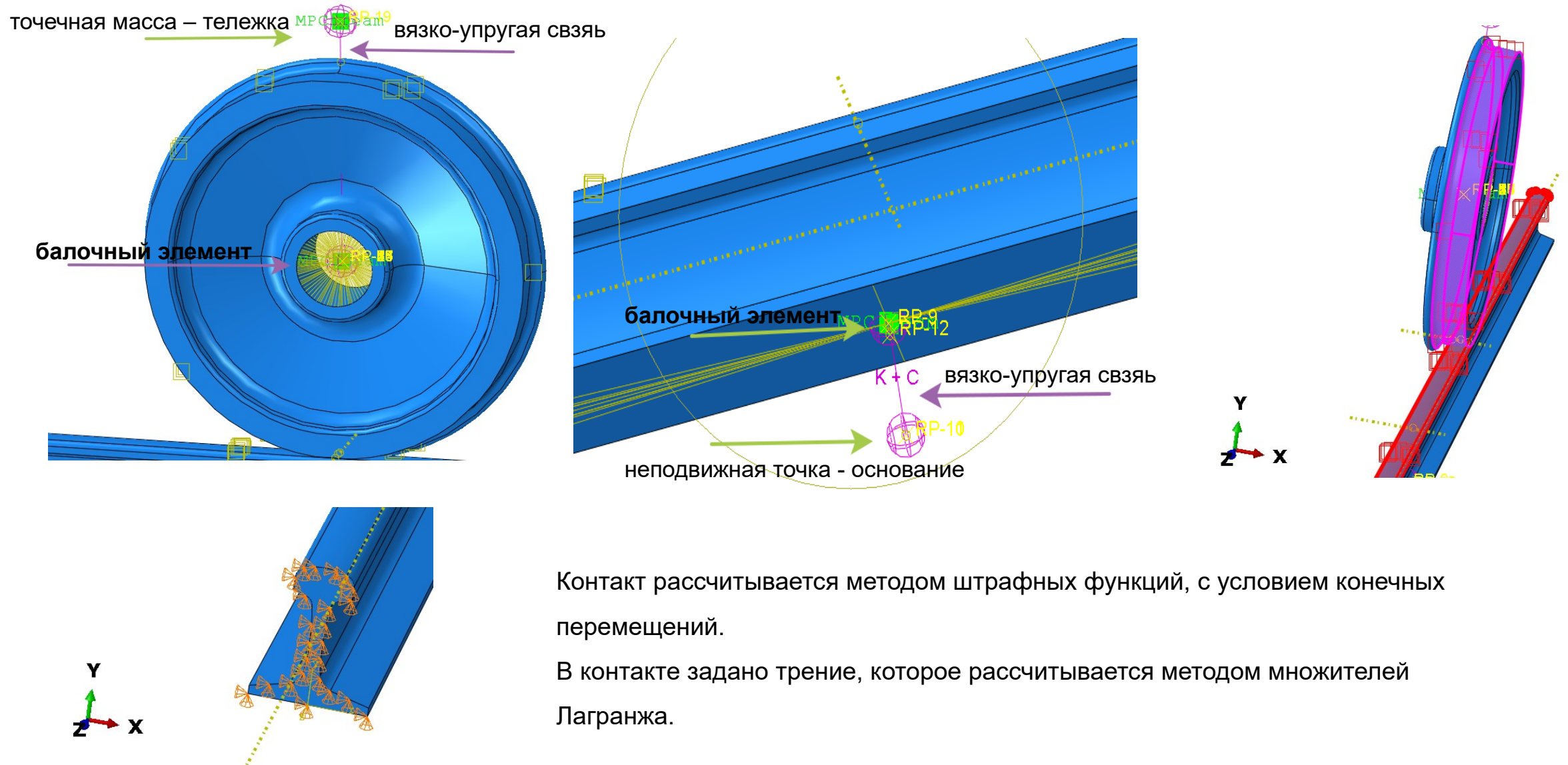
866671

Количество степеней свободы

983412



## Граничные условия и контактное взаимодействие

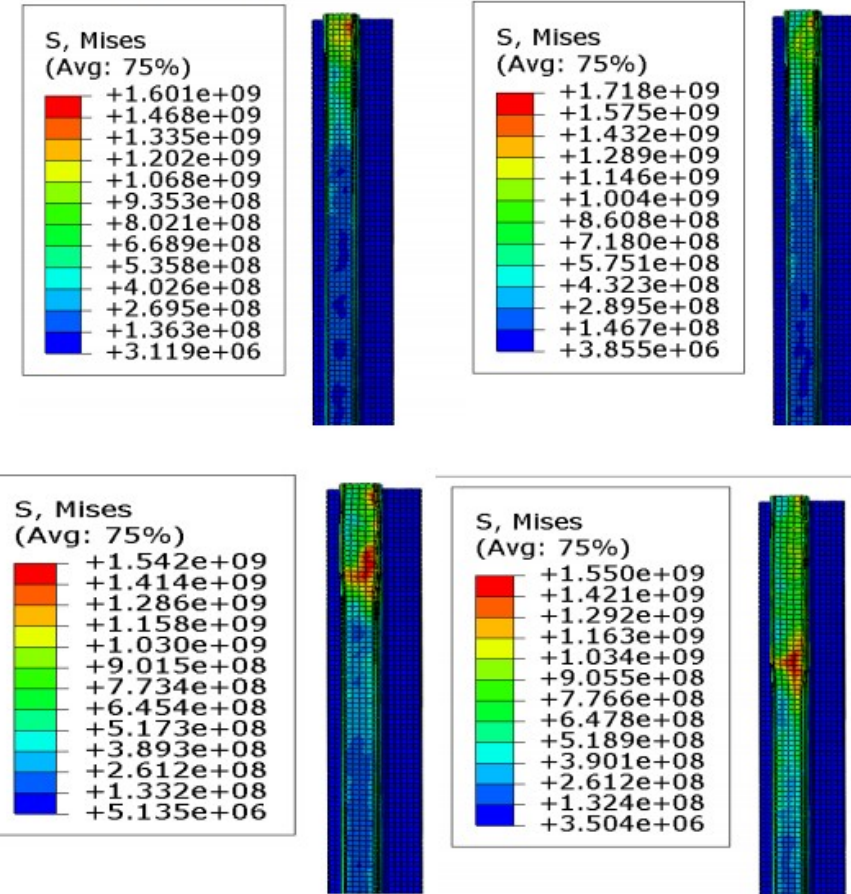
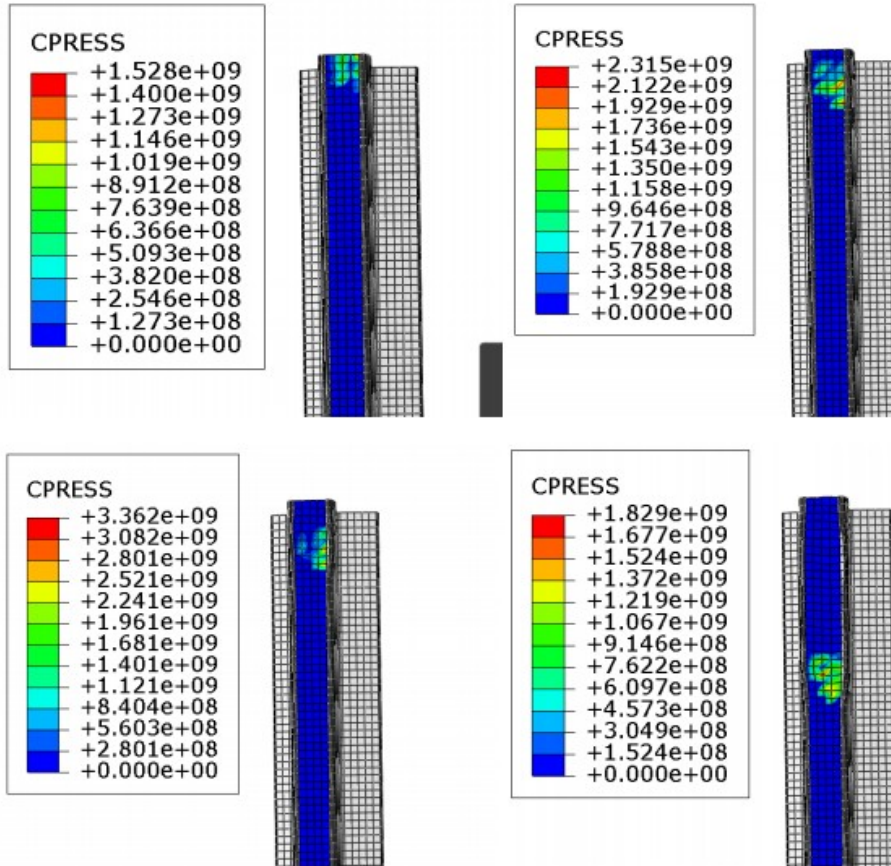


Контакт рассчитывается методом штрафных функций, с условием конечных перемещений.

В контакте задано трение, которое рассчитывается методом множителей Лагранжа.

## Результаты КЭ решения

10



Распределение давлений в контактной  
поверхности

Распределение эквивалентных по Мизесу  
напряжений

## Заключение

11

В ходе работы были получены следующие результаты

1. На основе модели балки Эйлера-Бернулли на упругом основании получена модель, которую можно использовать для оценки прогиба рельса под действием динамической нагрузки. Определены допустимые скорости, а также получено условие замены бесконечной балки, на балку конечной длины.
2. Построена КЭ модель динамического контактного взаимодействия системы колесо-рельс с учетом упруго-вязких свойств основания и колесной тележки. Рассмотрена контактная область и возникающие в ней усилия, с учетом полученных результатов, стоит отметить, что данная модель требует доработки и верификации.