

Министерство образования и науки Российской Федерации

---

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

---

**Приоритетный национальный проект «Образование»  
Национальный исследовательский университет**

*М. Г. ЗАХАРОВ, Ю. Г. ИСПОЛОВ, В. А. ПОЛЯНСКИЙ,  
Д. Ю. СКУБОВ, Б. А. СМОЛЬНИКОВ, А. А. СУХАНОВ, К. Ш. ХОДЖАЕВ*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по  
университетскому политехническому образованию в качестве  
учебного пособия для студентов высших учебных заведений,  
обучающихся по направлению подготовки магистров  
«Прикладная механика»*

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2010

УДК 617.91: 539.3; 531.36

ББК 32.81

П

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, заместитель директора Института проблем машиноведения РАН *А. К. Беляев*

Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного политехнического университета *С. Ф. Бурдаков*

*М. Г. Захаров, Ю. Г. Исполов, В. А. Полянский, Д. Ю. Скубов, Б. А. Смольников, А. А. Суханов, К. Ш. Ходжаев* / Под общей редакцией В.А.Полянского **Моделирование и оптимизация динамических систем: Учебное пособие**/ В.А. Полянский – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 204 с.

Изложены основные понятия и методы численного моделирования и оптимизации динамических систем. Обсуждены причины появления погрешностей при моделировании, в частности, связанных с компьютерной реализацией математических моделей. Описаны методы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, рассмотрены вопросы устойчивости и точности этих методов. Приведено исследование работы методов для диссипативных систем и систем, близких к консервативным. Даны конкретные рекомендации по выбору численных процедур.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по магистерской программе «Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг» направления подготовки «Прикладная механика». Формирует у студентов не только навыки решения типовых задач, но и профессиональные компетенции, позволяющие решать сложные практические задачи. Может быть полезно для студентов, обучающихся по другим направлениям подготовки и специальностям техники и технологии в области машиностроения, механики и процессов управления.

Работа выполнена в рамках реализации программы развития национального исследовательского университета «Модернизация и развитие политехнического университета как университета нового типа, интегрирующего мультидисциплинарные научные исследования и надотраслевые технологии мирового уровня с целью повышения конкурентоспособности национальной экономики».

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Полянский В. А., 2010

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2010

ISBN

ЗАХАРОВ Михаил Геннадьевич,  
ИСПОЛОВ Юрий Григорьевич,  
ПОЛЯНСКИЙ Владимир Анатольевич,  
СКУБОВ Дмитрий Юльевич,  
СМОЛЬНИКОВ Борис Александрович,  
СУХАНОВ Александр Алексеевич,  
ХОДЖАЕВ Камил Шамсутдинович

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Лицензия ЛР № 020593 от 07.08.97

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93,  
т. 2;

95 3004 – научная и производственная литература

---

Подписано в печать 09.11.2010. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 12,0. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 100. Заказ

---

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного автором, в  
Цифровом типографском центре Издательства Политехнического  
университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 550-40-14.

Тел./факс: (812) 297-57-76.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Численное моделирование: задачи, возможности, проблемы.....	8
2. Источники погрешностей при численном моделировании.....	13
2.1. Машинные вычисления с конечной точностью.....	14
2.2. Влияние алгоритма вычислений на процесс накопления ошибок.....	17
2.3. Ошибки дискретизации. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений: основные понятия.....	21
3. Устойчивость и точность численных методов решения задачи Коши для линейных систем.....	28
3.1. Общая схема построения методов Рунге-Кутты.....	28
3.2. Анализ устойчивости и точности методов численного интегрирования для линейного уравнения первого порядка.....	34
3.3. Численное интегрирование систем, близких к консервативным.....	48
3.4. Численное интегрирование систем с большой диссипацией.....	56
4. Общие требования и рекомендации по выполнению расчетных заданий	59
4.1. Анализ математической модели.....	64
4.2. Подбор программного обеспечения.....	67
4.3. Проверка результатов численного эксперимента.....	71
5. Расчетные задания.....	72
5.1. Работа № 1. Исследование оношаговых методов численного интегрирования решения задачи Коши.....	72
5.2. Работа № 2. Тяжелый симметричный волчок с одной неподвижной точкой.....	93

5.3. Работа № 3. Оптимальное управление движением судна.....	116
5.4. Работа № 4. Прохождение линейного осциллятора через резонанс.....	133
5.5. Работа № 5. Исследование динамики электромагнитного возбудителя колебаний.....	143
5.6. Работа № 6. Численный анализ спектральных характеристик крутильных колебаний роторных систем несколькими степенями свободы.....	153
5.7. Работа № 7. Взаимодействие возбудителя колебаний с линейной колебательной системой.....	160
5.8. Работа № 8. Исследование нелинейных колебательных систем с диссипацией.....	173
Заключение.....	192
Библиографический список.....	193
Приложение. Рекомендации по методике создания программ на алгоритмических языках программирования.....	196

## ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование является неотъемлемой частью инженерной практики и научных исследований. По своей значимости оно уже превосходит традиционные экспериментальные и теоретические методы.

Поэтому "умение вычислять" становится обязательным средством профессионального арсенала инженера, научного работника, преподавателя. Овладение навыками численного моделирования в настоящее время упрощается тем, что накопленное программное обеспечение дает возможность автоматизировать исследования вплоть до того, что сама математическая модель объекта создается автоматически в результате работы численных процедур.

Может сложиться впечатление, что ЭВМ достаточно для решения большинства задач инженерной и научно-исследовательской практики, по крайней мере, в сфере механики и электромеханики.

Вместе с тем за десятилетия активного использования методов численного моделирования накоплен значительный опыт, как побед, так и проблем. Многие из этих проблем имеют фундаментальный характер. Необходимо понимать, что численный эксперимент есть лишь эксперимент над программой, и его результаты не всегда совпадают с аналогичными аналитическими, точными результатами для исходной математической модели и тем более с результатами аналогичного эксперимента на реальном объекте. С учетом этого, понятие "умение вычислять" приобретает более широкое толкование.

Настоящее пособие представляет собой расширенный методический материал по подготовке и проведению компьютерных "лабораторных работ". Их основной целью является овладение навыками постановки и проведения численного эксперимента, построения математических и численных моделей, обработки результатов эксперимента. Обучение проводится на примере исследования конкретных динамических систем: от простейшей –

колебания массы на линейной пружинке, до существенно нелинейных, колебания которых могут носить хаотический характер.

В первой части дано аналитическое исследование основы многих методов численной оптимизации и моделирования динамических систем – алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений динамики в обыкновенных производных, которые в чистом виде характерны для механики систем твердых тел.

Уравнения динамики для задач механики твердого деформированного тела, теплопроводности, упругости гидро- и аэродинамики, химической кинетики, а также оптимального управления записываются, как правило, в частных производных. При решении таких задач методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений используются уже как стандартная процедура, иногда рекуррентно. В этом случае те особенности, которые отмечены в первой части пособия у методов численного интегрирования, могут после многократного применения метода давать самые непредсказуемые результаты.

Аналитическое исследование поведения методов интегрирования в таких системах затруднено большой размерностью, и самим рекуррентным характером использования процедур численного интегрирования. В этих условиях общие рекомендации аналогичны рекомендациям, сформулированным в первой части пособия, дать невозможно. Инженер и исследователь должны самостоятельно, для каждой конкретной задачи, провести необходимые исследования и убедиться, что существенных искажений процедура численного интегрирования не вносит.

Такое исследование является обязательным при моделировании динамических систем и оптимизации алгоритмов управления.

Любое исследование является творческим процессом, поэтому составить правила или последовательность его выполнения весьма сложно. С другой стороны, навык проведения самостоятельных

исследований может быть применен в любой сфере, начиная от экономических и заканчивая естественнонаучными задачами. Приобретение такого навыка очень ценно, так как дает возможность решать нестандартные задачи в любой сфере деятельности, и делает специалиста универсальным.

В пособии приведены восемь широко известных задач линейной и нелинейной динамики механических систем и оптимизации. На их примере можно познакомиться с различными методами численного моделирования и оптимизации динамических систем, приобрести навыки анализа качества работы этих методов и научиться выбирать алгоритм численного моделирования, соответствующий физическим особенностям объекта исследования.



# **1. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ЗАДАЧИ, ВОЗМОЖНОСТИ, ПРОБЛЕМЫ**

С развитием цифровой вычислительной техники и ее большой доступностью численное моделирование (или численный, компьютерный эксперимент) становится одним из основных инструментов исследований, в особенности для сложных систем и процессов. При этом расширение технических возможностей ЭВМ не просто позволяет, оперируя большими объемами данных, решать количественно более сложные задачи, но и во многом меняет характер научной работы. Вместе с тем еще не сложилось четкое понимание возможностей численного эксперимента и значимости результатов, полученных с его помощью. Чтобы представить диапазон мнений и выделить основные черты численного эксперимента, как эффективного инструмента исследований, приведем две полярные точки зрения.

Первая характеризуется тем, что ЭВМ представляется не более чем техническим средством, позволяющим проводить вычисления, как это раньше делалось при помощи логарифмической линейки, или арифмометра, но с несравненно большими возможностями. Такой взгляд основывается на традиционных представлениях о приоритетной ценности аналитических результатов, устанавливающих непосредственную взаимосвязь между различными характеристиками изучаемых процессов и систем. При этом числовые результаты рассматриваются как второстепенные, необходимость в которых возникает лишь на заключительном этапе решения задач. Использование же ЭВМ, хотя и позволяет проводить сложные расчеты, дает лишь конкретные числовые значения этих характеристик, отвечающие конкретным числовым значениям входных данных. Таким образом, для численного эксперимента оказывается не возможной та общность результатов, которая имеет место при аналитических исследованиях.

Вторая точка зрения, получающая все большее распространение с развитием компьютерной техники, состоит в том, что ЭВМ принципиально дает возможность решить практически любую конкретную задачу. Вследствие этого, в прикладных работах отпадает или существенно снижается сама необходимость в аналитических исследованиях.

Несмотря на существование столь противоположных мнений, не возникает сомнения в том, что ЭВМ становится мощным инструментом анализа явлений. На этой базе, фактически возникла новая отрасль прикладной математики – компьютерный анализ [1, 2, 1.Д-3.Д]. Очевидно, что методы моделирования и аналитические методы не должны и не могут противопоставляться, поскольку тесно связаны и взаимно дополняют друг друга [1,с.151]. Действительно, высокое быстродействие и большие объемы памяти современных ЭВМ позволяют за короткое время проводить многовариантные расчеты и получать такой объем и полноту информации, которые невозможны ни при аналитических, ни при экспериментальных исследованиях. Однако, для целенаправленного и эффективного проведения численного эксперимента необходимо иметь, по крайней мере, качественные представления о свойствах объекта исследования. Иначе в условиях многопараметрической задачи численное моделирование может превратиться в бесцельное блуждание по запутанному лабиринту. Ключом к априорному пониманию свойств изучаемого объекта и последующему анализу получаемых результатов являются аналитические исследования.

Таким образом, возможности численного эксперимента во многом определяются тем, насколько хорошо мы смогли "научить" компьютер моделировать изучаемые объекты [1, 2.Д]. При этом необходимо решать широкий круг вопросов, которые могут быть объединены условным понятием "технологии" численного эксперимента. Сюда следует отнести постановку целей и разработку программы эксперимента, построение математической модели

(согласованной с целями эксперимента и ориентированной на компьютерную форму его проведения), выбор методов обработки и представления результатов и т.д. Вопросы технологии в численном эксперименте во многом те же, что и в других видах экспериментальных исследований. В особенности это относится к автоматизированному физическому эксперименту [2, 4.Д]. Однако, некоторые проблемы, в первую очередь связанные с построением математической модели, имеют особую, "компьютерную", специфику. На них следует остановиться более подробно.

Очевидно, что говорить о численном моделировании, как инструменте исследований, можно лишь в том случае, когда компьютерная модель в состоянии дать адекватное описание исследуемой системы или процесса. При проведении численного эксперимента мы имеем дело не с математической моделью изучаемого объекта (например, заданной в форме дифференциальных уравнений), а с некоторым новым объектом – машинно-реализуемой вычислительной моделью, которая имеет несколько иные, чем исходная математическая модель, свойства. Процесс построения данной модели имеет несколько последовательных этапов.

Схематично они изображены на рис. 1. Здесь, кроме традиционных этапов выбора расчетной схемы (физической модели) и построения математической модели, имеются три новых этапа. Их появление обусловлено особенностями работы ЭВМ.

Ввиду того, что машинные вычисления проводятся в форме конечной последовательности арифметических операций, на компьютере могут быть реализованы только конечномерные алгебраические (дискретные) модели. Поэтому, для моделирования "непрерывной" системы необходимо построить ее дискретный аналог. Очевидно, что такая дискретная модель будет иметь в чем-то иные свойства, чем ее "непрерывный" прототип. Возникающие здесь погрешности принято называть погрешностями дискретизации.

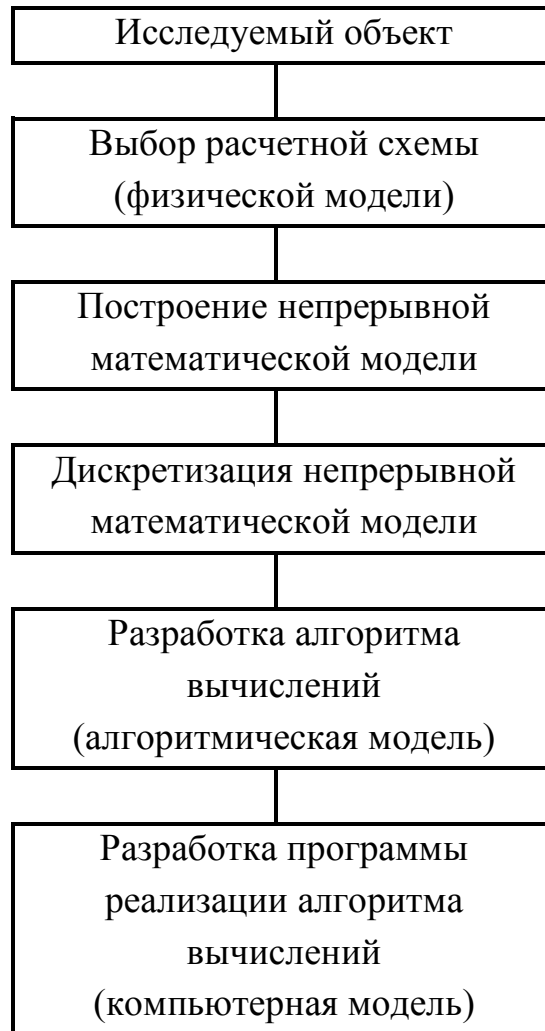


Рис. 1. Схема построения машинно-реализуемой модели

Уравнения дискретной модели сами по себе обычно не задают способ определения искомых величин. Поэтому следующим этапом будет построение вычислительной (алгоритмической) модели. Данная модель дает процедуру нахождения численного решения, удовлетворяющего уравнениям дискретной модели. Для этих целей в зависимости от типа задачи используются те или иные численные методы. Поскольку, в большинстве случаев, численные методы дают лишь приближенное решение, то в алгоритмической модели

появляется дополнительная (по сравнению с дискретной моделью) погрешность.

Последний этап – перевод алгоритма вычислений на язык машинных команд, в результате чего получается именно та модель, с которой в дальнейшем проводится эксперимент. Основная погрешность, возникающая на этом этапе, связана с так называемыми ошибками округления.

Следует также отметить, что от того, как решены вопросы программно-машинной реализации, во многом будут зависеть удобство работы с компьютерной моделью, и такие технические параметры процесса моделирования, как время счета и необходимый объем памяти.

При каждом переходе от модели к модели появляются новые погрешности, поэтому каждая из пяти моделей лишь в чем-то напоминает исходный объект. При компьютерном моделировании от исследователя и инженера требуется адекватность именно последней модели, несущей максимальное количество погрешностей. И тут на первый план выдвигается фундаментальная проблема моделирования. Она заключается в том, что необходимо в ограниченной модели учесть неограниченное количество взаимосвязей, имеющих в каждом физическом объекте. Естественно, такой учет невозможен. Приходится отбрасывать связи, мало влияющие на поведение объекта и его основные физические свойства. Правильное определение основных закономерностей, параметров объекта (или связей), которые необходимо учитывать при моделировании – есть основа профессионализма исследователя и инженера.

Применение ЭВМ, казалось бы, сделало этот процесс ненужным. "Тяжелые" пакеты позволяют практически абсолютно точно описывать исследуемый объект и получать его компьютерную модель автоматически, пренебрегая перечисленными на рис. 1 этапами. Но необходимо понимать, что в этом случае последовательность действий остается той же самой, просто используются автоматические

процедуры, которые "защиты" в программное обеспечение его создателями. Очевидно, что априорно учесть все нюансы конкретной задачи невозможно. Следовательно, необходимо быть готовым к появлению самых неожиданных не адекватностей в поведении компьютерной модели, проверка которых требует сравнения с экспериментом и может занять годы.

Естественно, что хорошо бы заранее знать, какие самостоятельные эффекты могут появляться у компьютерной модели, чтобы иметь возможность выделить в результатах моделирования эти эффекты и сделать правильные выводы по результатам моделирования.

Такой навык, на наш взгляд, является новым современным требованием к инженеру. Его приобретение невозможно без изучения особенностей работы вычислительных процедур и погрешностей, которые они порождают.

Предметному и более подробному обсуждению некоторых намеченных здесь проблем посвящены последующие разделы пособия.

## **2. ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

Главная причина появления ошибок при численном моделировании состоит в дискретном характере вычислений на ЭВМ. Дискретность проявляется в двух формах. Во-первых, она связана со способом представления чисел на ЭВМ, когда континуальное множество вещественных чисел аппроксимируется конечным множеством чисел специального вида. Во-вторых, на ЭВМ могут быть реализованы только математические модели, представленные в конечномерной алгебраической форме. Тогда моделирование непрерывных систем возможно лишь при их предварительной дискретизации.

В данном разделе приводятся основные сведения, относящиеся к вычислениям на ЭВМ и объясняющие "механизм" возникновения и преобразования погрешностей, в частности, при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений.

## 2.1. МАШИННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С КОНЕЧНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

В настоящее время принятым на большинстве ЭВМ является представление действительных чисел в форме с плавающей точкой [1.Д]. Множество чисел с плавающей точкой (обозначим его через  $F$ ) характеризуется четырьмя параметрами: основанием  $r$ , точностью  $t$  и интервалом показателей  $[L', L'']$ . Каждое число  $x$  с плавающей точкой, принадлежащее  $F$ , представимо в виде:

$$x = \pm \left( \frac{d_1}{r} + \frac{d_2}{r^2} + \frac{d_3}{r^3} + \dots + \frac{d_t}{r^t} \right) r^l, \quad (2.1)$$

где целые числа  $d_1, d_2, d_3, \dots, d_t$  удовлетворяют условиям:

$$0 \leq d_i \leq r - 1, \quad i = 1, \dots, t \quad (2.2)$$

При этом  $d_1 \neq 0$  при всех  $x \neq 0$ , целое число  $l$ , называемое показателем, удовлетворяет неравенству  $L' \leq l \leq L''$ . Основание  $r$  ( $r > 1$ ) также целое число и для ЭВМ обычно равно одному из следующих значений  $\{2, 8, 10, 16, 32\}$ . В частности, представление (2.1) с  $r = 8$  и  $r = 16$  называется представлением чисел с одинарной и удвоенной (двойной) точностью. Выражение в скобках формулы (2.1) называется дробной частью числа  $x$ .

В качестве примера запишем числа  $x_1 = 0,5$ ,  $x_2 = 8$ ,  $x_3 = -65$  в форме с плавающей точкой для оснований  $r = 10$  и  $r = 2$ .

Десятичное основание:

$$x_1 = + \left( \frac{5}{10} \right) 10^0; \quad x_2 = + \left( \frac{8}{10} \right) 10^1; \quad x_3 = - \left( \frac{6}{10} + \frac{5}{10^2} \right) 10^2.$$

Двоичное основание:

$$x_1 = +\left(\frac{1}{2}\right)2^0; x_2 = +\left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3}\right)2^4;$$

$$x_3 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^7}\right)2^7.$$

Множество  $F$  чисел с плавающей точкой конечно и содержит ровно  $2(r-1)r^{t-1}(L''-L'+1)+1$  элементов. На вещественной оси они расположены неравномерно. В качестве иллюстрации на рис. 2 изображено множество  $F$  с параметрами  $r=2$ ,  $t=2$ ,  $L'=-1$ ,  $L''=2$ , состоящее из 17 чисел.

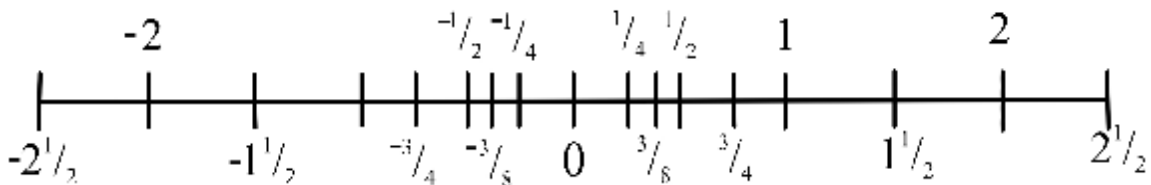


Рис. 2. Множество  $F$  с параметрами  $r=2$ ,  $t=2$ ,  $L'=-1$ ,  $L''=2$

Конечность множества  $F$  и неравномерность расположения его элементов на числовой оси являются первичными источниками вычислительных погрешностей. Так, числа с модулем, большим максимального элемента из  $F$ , вообще не могут быть представлены в форме (2.1). Если же число  $x$  не выходит за пределы разрядной сетки, то в ЭВМ оно представляется числом  $fl(x)$  из  $F$ , ближайшим к  $x$ .

Таким образом, множество  $F$  является машинной моделью множества вещественных чисел. Существенно, что для этой модели не выполняются правила обычной арифметики. Так, если  $x$  и  $y$  из  $F$ , то в силу неравномерности числовой сетки может оказаться, что в  $F$  нет числа,



равного  $x + y$ . Сумма  $x + y$  моделируется посредством числа из  $F$ , ближайшего к  $x + y$ :

$$x + y = x \oplus y = fl(x + y),$$

здесь символ  $\oplus$  обозначает операцию сложения чисел с плавающей точкой. Разность между числами  $x + y$  и  $fl(x + y)$  представляет собой погрешность вычислений при выполнении операции сложения. Аналогичен "механизм" появления погрешностей и при проведении других арифметических операций.

Точность машинной арифметики с плавающей точкой характеризуется посредством так называемого машинного ипсилон -  $\varepsilon$ , определяемого как наименьшее число с плавающей точкой, для которого:

$$1 \oplus \varepsilon > 1.$$

Число  $\varepsilon$  имеет порядок  $r^{-t}$ , и часто в оценочных расчетах полагают  $\varepsilon = r^{-t}$ . Точное значение  $\varepsilon$  зависит от некоторых особенностей программной реализации арифметических операций, принятой на конкретной ЭВМ. Машинное ипсилон может рассматриваться как оценка относительной погрешности машинного представления чисел и является одной из основных характеристик точности машинных вычислений. Для абсолютной погрешности машинного представления чисел справедлива оценка [ 1 . Д ] :

$$|fl(x) - x| < |x|r^{1-t} / 2. \quad (2.3)$$

Если  $\varepsilon = r^{-t}$ , то неравенство (2.3) принимает вид:

$$|fl(x) - x| < \varepsilon |x|r / 2. \quad (2.4)$$

Таким образом, все множество чисел вещественной оси разбивается на такие непересекающиеся отрезки, что всем числам

каждого отрезка отвечает единственное машинное число с плавающей точкой.

Это свойство наглядно проявляется при проведении операции машинного сложения двух чисел, имеющих существенно разные порядки. Пусть, например,  $x \in F$ ,  $y \in F$  и  $|y| < \varepsilon|x|$ , т.е.  $y$  существенно меньше  $x$ . Тогда при сложении  $x$  и  $y$  получим:

$$x \oplus y = fl(x + y) = fl(x) = x,$$

т.е. сумма равна наибольшему слагаемому, поскольку числам  $x$  и  $x+y$  отвечает одно и то же число с плавающей точкой.

Данный элементарный пример показывает, что между обычными (точными) математическими операциями и их машинной реализацией имеются принципиальные отличия. Вследствие этого, при проведении последовательности арифметических операций, может произойти накопление погрешностей, полностью искажающих результат вычислений. Причем существенную роль в этом играют свойства алгоритма вычислений.

## **2.2. ВЛИЯНИЕ АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ПРОЦЕСС НАКОПЛЕНИЯ ОШИБОК**

Анализ процесса накопления погрешностей при выполнении машинных вычислений удобно проводить, если рассматривать алгоритм вычислений как дискретный преобразователь числовых данных. При таком подходе ошибки, возникающие при проведении каждой операции, могут быть представлены как шумы, искажающие реальные данные. В результате при вычислениях происходит одновременное преобразование как "полезного сигнала" – исходных данных, так и "шумов" – ошибок, порождаемых способом представления данных и машинной арифметикой. При этом

окончательная точность определяется тем, в какой степени алгоритм усиливает или подавляет "шумы".

Чтобы наглядно продемонстрировать механизм "усиления" ошибок, рассмотрим пример [1.Д].

Требуется вычислить интегралы

$$E_n = \int_0^1 x^n \exp(x-1) dx, \quad n = 1, 2, \dots, 9. \quad (2.5)$$

Проводя интегрирование по частям

$$E_n = \int_0^1 x^n \exp(x-1) dx = x^n \exp(x-1) \Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} \exp(x-1) dx,$$

получим рекуррентное соотношение

$$E_n = 1 - nE_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \quad (2.6)$$

где  $E_1 = \exp(-1)$ .

Пусть вычислениям с плавающей точкой отвечают параметры  $r = 10$ ,  $t = 6$ . Используя рекуррентный алгоритм (2.6), получим:

$$\begin{aligned} E_1 &\approx 0,367879, & E_2 &\approx 0,264242, & E_3 &\approx 0,207274, \\ E_4 &\approx 0,170904, & E_5 &\approx 0,145480, & E_6 &\approx 0,127120, \\ E_7 &\approx 0,110160, & E_8 &\approx 0,118720, & E_9 &\approx -0,068480. \end{aligned}$$

Поскольку  $E_n > 0$ , то очевидно, что вычисленное отрицательное значение  $E_9$  не имеет ни одной верной значащей цифры, хотя при его определении было выполнено всего лишь восемь операций умножения и сложения. Чем же вызвана столь значительная ошибка?

Соотношение (2.6) является точным, поэтому единственным источником неверного результата являются ошибки округления. Чтобы проследить их трансформацию, рассмотрим изменение погрешности вычисления интеграла:

$$\Delta E_n = \hat{E}_n - E_n,$$

где  $\hat{E}_n$  - вычисляемое значение интеграла  $E_n$ . Принимая во внимание, что  $\hat{E}_n$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\hat{E}_n = 1 - n\hat{E}_n + \delta_n,$$

где  $\delta_n$  - погрешность, возникающая при выполнении операций умножения изложения в (2.6), запишем уравнение динамики погрешности  $\Delta E_n$ :

$$\Delta E_n = -n\Delta E_n + \delta_n, \quad \Delta E_1 = \hat{E}_1 - E_1 = \delta_1. \quad (2.7)$$

Данное линейное разностное уравнение неустойчиво, причем степень неустойчивости возрастает с увеличением номера шага. Выражение для общего решения уравнения (2.7)

$$\Delta E_n = (-1)^{n-1} n! \delta_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} \frac{(n-1)!}{i!} \delta_{i+1},$$

дает полное представление о динамике роста ошибок. Так, погрешность в задании начального значения  $E_1$  (величина  $\approx 10^{-7}$ ) после восьми итераций увеличивается в  $8! = 362880$  раз. Таким образом, причиной столь быстрого роста ошибок является неустойчивость алгоритма вычислений.

Для решения этой задачи можно предложить алгоритм, аналогичный (2.6), но не имеющий подобной неустойчивости. Перепишем соотношение (2.6) в виде:

$$E_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{E_n}{n}, \quad (2.8)$$

При этом погрешность вычислений  $\Delta E_n$  будет удовлетворять уравнению:

$$\Delta E_n = -\frac{\Delta E_n}{n} + \delta'_n, \quad (2.9)$$

где  $\delta'_n$  - погрешность, возникающая при выполнении вычислений по формуле (2.8).

Уравнения (2.8), (2.9) устойчивы, однако вычисления в них проводятся в "обратном" времени, т.е. от больших номеров  $n$  к меньшим. Чтобы воспользоваться алгоритмом (2.8), необходимо в качестве начального значения взять величину  $E_{n_0}$  с большим номером  $n_0$ . Тогда выражение для ошибки запишем в виде:

$$\Delta E_n = (-1)^{n_0-n} \frac{n!}{n_0!} \delta_{n_0} + \sum_{i=1}^{n_0-n} (-1)^{n_0-n+i} \frac{n!}{(n_0-i)!} \delta_{n_0-i+1}, \quad n < n_0.$$

Чтобы определить  $E_n$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, \dots, 9$  положим  $n_0 = 20$ ,  $\hat{E}_{20} = 0,0$ . Проводя вычисления согласно (2.8), получим  $\hat{E}_9 = 0,0916123$ , что совпадает с точным значением  $E_9$  во всех шести значащих цифрах. Таким образом, погрешность задания начального значения  $\Delta E_{20}$  и погрешности, возникающие при выполнении арифметических операций, подавляются алгоритмом.

Приведенный пример показывает в какой степени алгоритм вычислений влияет на точность конечного результата. При этом "хорошая" точность была получена за счет использования вычислительно устойчивого алгоритма. Таким образом, требование вычислительной устойчивости следует рассматривать как одно из основных требований, предъявляемых к численным методам.

Вместе с тем, существуют задачи, для которых "хорошие" ответы нельзя получить никакими методами из-за их чувствительности к малым ошибкам. Такие задачи принято называть некорректными [3].

Для их решения используются специальные численные методы, базирующиеся на таких понятиях, как псевдо решение и регуляризация. Рассмотрение такого типа задач не входит в цель настоящего пособия, поэтому, желающие познакомиться с соответствующими методами могут обратиться к специальной литературе [3, 5.Д].

### **2.3. ОШИБКИ ДИСКРЕТИЗАЦИИ. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ**

Рассмотрим задачу нахождения численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при заданных начальных условиях (задачу Коши):

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} = f(X, t), \quad t \geq t_0 \quad (2.10)$$

$$X(t_0) = X_0, \quad (2.11)$$

где  $X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ ,  $f(X, t) = [f_1(X, t), \dots, f_n(X, t)]^T$ . Система уравнений (2.10) определяет в  $n + 1$ -мерном пространстве переменных  $X, t$  некоторое семейство интегральных кривых (решений)  $X(t)$ . Задание условий (2.11) выделяет одну из этих кривых (рис. 3,а). Решение задачи Коши состоит в построении интегральной кривой уравнения (2.10), отвечающей начальным условиям (2.11). При этом искомое решение представляет собой функцию времени  $t$  и начальной точки  $X_0$ :

$$X(t) = X(t, X(t_0)) = X(t, X_0).$$

Численное решение задачи Коши проводится с помощью пошаговых разностных методов, где для искомой функции  $X(t, X_0)$  строится поточечная (дискретная) аппроксимация.

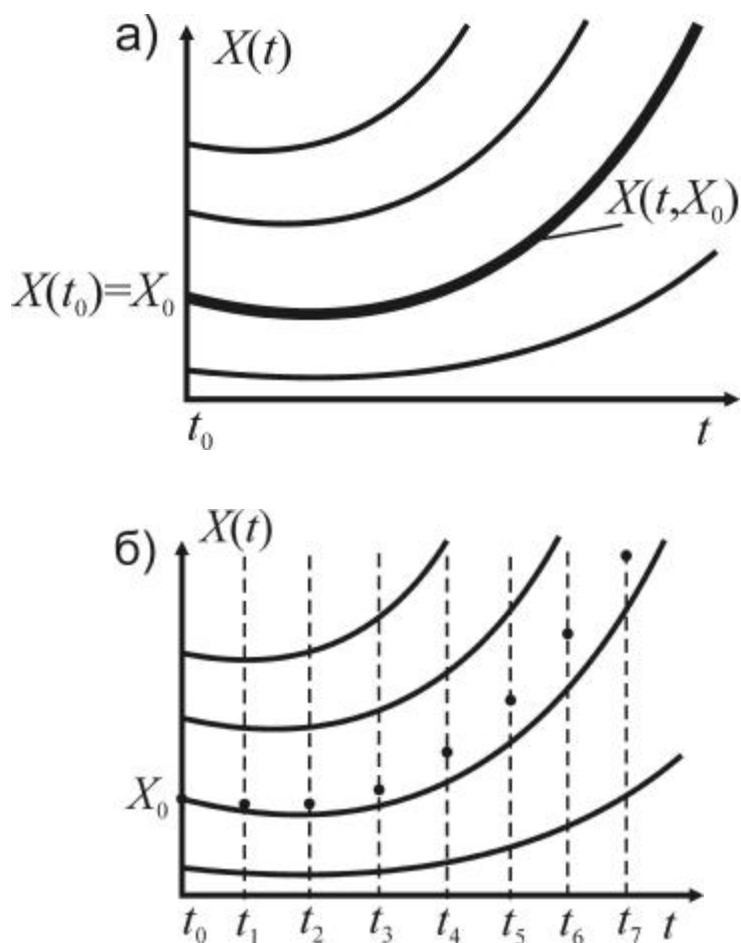


Рис. 3. Семейство интегральных кривых, точное а) и приближенное б) решения

При этом, во временной области  $t > t_0$  задается сетка с узловыми точками  $t_0, t_1, t_2, \dots$ , имеющая в общем случае переменную длину шага  $h_k = t_{k+1} - t_k$ . В каждой точке  $t_{k+1}$  точное решение  $X(t_{k+1})$  аппроксимируется некоторой величиной  $X_{k+1}$  (рис. 3, б), вычисляемой на основе предшествующих значений  $X_k, X_{k-1}, X_{k-2}, \dots$ , то есть:

$$X_{k+1} = F(k, X_k, X_{k-1}, \dots). \quad (2.12)$$

Конкретный способ задания функции (2.12) определяет вид алгоритма численного интегрирования.

Методы, в которых на каждом шаге для вычисления  $X_k$  используется одно из предшествующих значений

$$X_{k+1} = F(k, X_k, X_{k-1}, \dots, X_{k+1-l}),$$

называются одношаговыми. (При  $l=1$  методы называются одношаговыми.) Именно они в основном и будут предметом дальнейшего рассмотрения. В том случае, когда зависимость (2.12) задана в явной форме, метод численного интегрирования называется явным. Простейшим примером явного одношагового метода может служить метод Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + h_k \dot{X}_k = X_k + h_k f(X_k, t_k), \quad (2.13)$$

где приближение  $X_{k+1}$  вычисляется с помощью прямолинейной экстраполяции из предыдущей точки (рис. 4, а).

Если зависимость (2.12) определена в форме неявного соотношения, не разрешенного относительно искомых переменных  $X_{k+1}$ , то соответствующий метод называется неявным. Простейшим примером может служить обратный (неявный) метод Эйлера:

$$X_{k+1} = X_k + h_k \dot{X}_{k+1} = X_k + h_k f(X_{k+1}, t_{k+1}), \quad (2.14)$$

где приближение  $X_{k+1}$  определяется с помощью прямолинейной экстраполяции из искомой точки (обратной экстраполяции) (рис. 4, б). Соотношение (2.14) представляет собой систему уравнений относительно  $X_{k+1}$ . Таким образом, чтобы вычислить  $X_{k+1}$ , требуется решить данную систему.



Переход от системы дифференциальных уравнений (2.10) к системе алгебраических уравнений (2.12) представляет собой переход от непрерывной динамической модели к дискретной. Оценку возникающей в результате дискретизации погрешности принято давать с использованием понятий локальной и глобальной ошибок дискретизации [4, 1.Д].

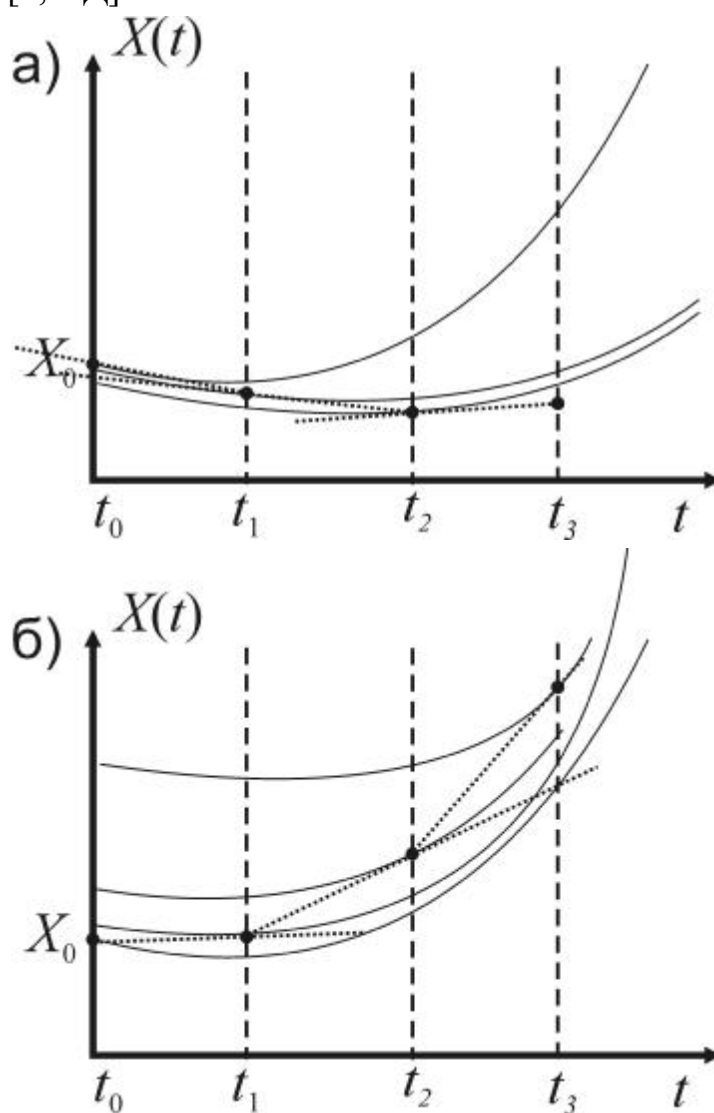


Рис. 4. Прямая а) и обратная б) экстраполяция в методах Эйлера

Локальная ошибка дискретизации определяется как разность между точным и численным решениями после одного шага

интегрирования в предположении, что в начальной точке шага оба решения совпадают (рис. 5).

$$\Delta_k = X(t_k, \{X(t_{k-1}) = X_{k-1}\}) - X_k, \quad (2.15)$$

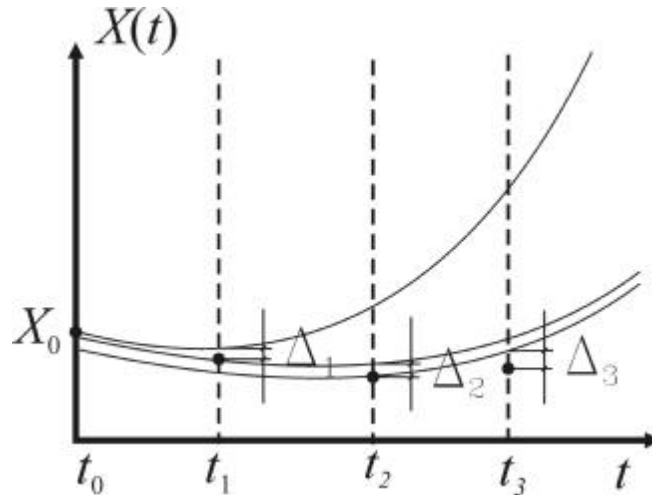


Рис. 5. Локальная ошибка метода

Глобальная ошибка дискретизации представляет собой разность между точным и численным решениями, возникающую на интервале интегрирования  $[t_k - t_0]$  (рис. 6).

$$e_k = X(t_k, \{X(t_0) = X_0\}) - X_k, \quad (2.16)$$

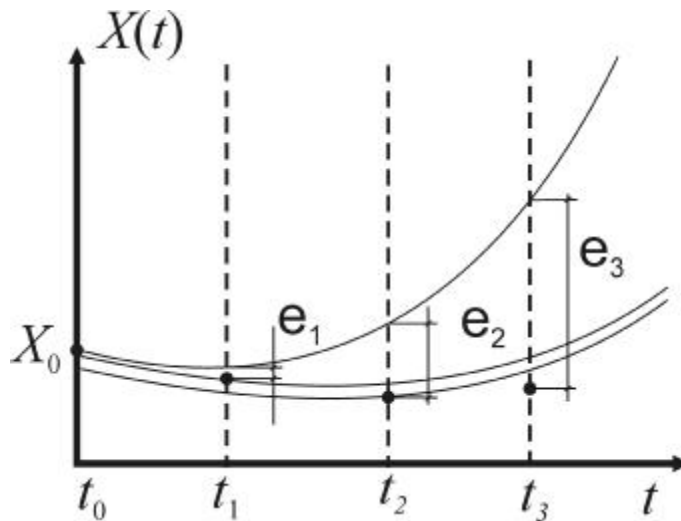


Рис. 6 Глобальная ошибка метода

Смысловое различие между локальной и глобальной ошибками достаточно очевидно: глобальная ошибка есть результат прохождения через дискретную динамическую систему, задаваемую уравнениями метода (2.12) локальных ошибок, возникающих на каждом такте.

Основным понятием при оценке точности численного метода является его порядок. Он определяется в терминах локальной ошибки. Считается, что метод имеет порядок  $p$ , если для локальной ошибки (в случае задачи с гладкими решениями) имеет место оценка:

$$\|\Delta_k\| < Ch_k^{p+1}, \quad C = \text{const}(h, k). \quad (2.17)$$

Значение  $C$  зависит от производных функции  $f(X, t)$ .

Рассмотрим глобальную ошибку в конечной точке интервала интегрирования  $t_N = t_0 + T$ . Пусть  $h_k = h = T/N$ . Если задача (2.10), (2.11) имеет гладкие решения и выполняется условие (2.17), то справедлива оценка:

$$\|e_k\| < C'Nh^{p+1} = C'Th^p, \quad C' = \text{const}(h). \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) порядок метода  $p$  определяет порядок малости ошибки интегрирования в конечной точке интервала в зависимости от величины шага интегрирования  $h$ . В силу этой оценки точность численного решения может быть повышена за счет уменьшения величины шага. Однако необходимо иметь в виду, что условия (2.17), (2.18) получены без учета ошибок округлений (то есть, в предположении идеальной точности вычислений). Если их учесть, то

$$\|e_k\| \approx C'Th^p + \frac{D'}{h}, \quad C', D' = \text{const}(h), \quad (2.19)$$

где слагаемое  $\frac{D'}{h}$  обусловлено процессом накопления ошибок округления (2.5).

Последняя оценка показывает, что метод численного решения задачи Коши при его реализации на ЭВМ позволяет добиться лишь конечной точности вычислений, которая зависит от машинной арифметики, порядка метода, величины шага и длительности интервала интегрирования.

При определении порядка метода обычно применяется разложение точного и численного решений в ряд Тейлора по параметру  $h$ , после чего легко может быть получено выражение для локальной ошибки дискретизации. Для примера рассмотрим методы Эйлера (2.13), (2.14).

Явный метод:

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= X(t_k + h) = X(t_k) + h\dot{X}(t_k) + \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_k) + \dots = \\ &= X(t_k) + hf(X_k, t_k) + O(h^2), \\ X_{k+1} &= X_k + hf(X_k, t_k), \\ \Delta_{k+1} &= X(t_{k+1}) - X_{k+1} = O(h^2). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Таким образом, метод имеет первый порядок.

Неявный метод:

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= X(t_k) + h\dot{X}(t_{k+1}) - \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_{k+1}) + \dots = \\ &= X(t_k) + hf(X_{k+1}, t_{k+1}) + O(h^2), \\ X_{k+1} &= X_k + hf(X_{k+1}, t_{k+1}), \\ \Delta_{k+1} &= X(t_{k+1}) - X_{k+1} = O(h^2). \end{aligned} \quad (2.21)$$

При получении первого из соотношений (2.21) использовано разложение  $X(t_k) = X(t_k - h)$  в окрестности точки  $t_{k+1}$ . Данный метод также имеет первый порядок.

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ И ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Анализ адекватности динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, и их дискретных моделей далеко не исчерпывается определением порядка метода численного интегрирования. В частности, явный и неявный методы Эйлера имеют одинаковые порядки, однако их динамические свойства качественно различны (подробно это будет показано в п. 3.2). Настоящий раздел посвящен более детальному обсуждению проблемы адекватности. Рассмотрение проводится на примере широкого класса методов численного интегрирования, известных как методы Рунге-Кутты [4, 6.Д, 7.Д].

#### 3.1. ОБЩАЯ СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ МЕТОДОВ РУНГЕ-КУТТЫ

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \dot{X} = f(X, t), \quad t \geq t_0 \\ X(t_0) &= X_0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Одношаговый численный метод решения задачи Рунге-Кутты описывается следующими формулами:

$$X_{n+1} = X_n + h \sum_{i=1}^S b_i k_i, \quad (3.2)$$

$$k_i = f\left(X_n + h \sum_{j=1}^S a_{ij} k_j, t_n + c_i h\right), \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (3.3)$$

где  $X_n$  - приближенное значение  $X(t_n)$ ;  $h$  - шаг интегрирования. Вещественные параметры  $b_i, c_i, a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, S$  определяют конкретный метод. Метод (3.2), (3.3) называется  $S$ -этапным (или  $S$ -стадийным), так как он основан на вычислении функции  $f(X, t)$  в  $S$  точках. Компактное представление метода Рунге-Кутты дается таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array} \quad (3.4)$$

или

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1S} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_S & a_{S1} & \cdot & \cdot & a_{SS} \\ \hline & b_1 & \cdot & \cdot & b_S \end{array}$$

Если  $a_{ij} = 0$  при  $j > i$ , метод является явным, при этом формулы (3.3) задают процедуру последовательного вычисления коэффициентов  $k_i$  через свои предшествующие значения  $k_l$ ,  $l < i$ . В противном случае метод является неявным и соотношения (3.3) представляют собой систему уравнений относительно неизвестных величин  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ .

Весьма представительным является однопараметрическое семейство метода Рунге-Кутты, задаваемое таблицей:

$$\begin{array}{c|c} \alpha & \alpha \\ \hline & 1 \end{array} . \quad (3.5)$$

При  $\alpha = 0$  получаем явную схему Эйлера, имеющую первый порядок точности:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hk_1, \\ k_1 &= f(X_n, t_n), \end{aligned}$$

или

$$X_{n+1} = X_n + hf(X_n, t_n).$$

При  $\alpha = 1$  получаем неявную схему Эйлера, также имеющую первый порядок точности:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hk_1, \\ k_1 &= f(X_n + hk_1, t_n + h), \end{aligned}$$

или

$$X_{n+1} = X_n + hf(X_{n+1}, t_{n+1}).$$

При  $\alpha = \frac{1}{2}$  получаем известный метод "средней точки":

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + hk_1, \\ k_1 &= f\left(X_n + \frac{1}{2}hk_1, t_n + \frac{1}{2}h\right), \end{aligned}$$

или

$$X_{n+1} = X_n + hf\left(\frac{1}{2}(X_n + X_{n+1}), t_n + \frac{1}{2}h\right). \quad (3.6)$$

Отметим, что метод (3.6) очень близок методу трапеций, задаваемому формулой:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{2}h[f(X_n, t_n) + f(X_{n+1}, t_n + h)]. \quad (3.7)$$

и являющемся в рамках (3.2), (3.3) двух-стадийным, с таблицей Бутчера

$$\begin{array}{c|c} 0,5 & 0,5 \\ \hline & 1 \end{array}$$

В случае линейной однородной задачи методы (3.6) и (3.7) совпадают. Оба они имеют второй порядок точности.

По-видимому, наиболее известной является формула четырехстадийного явного метода четвертого порядка:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= f(X_n, t_n), \\ k_2 &= f(X_n + \frac{1}{2}hk_1, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_3 &= f(X_n + \frac{1}{2}hk_2, t_n + \frac{1}{2}h), \\ k_4 &= f(X_n + hk_3, t_n + h). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Возникает естественный вопрос: как сравнивать между собой и оценивать многочисленные варианты метода Рунге-Кутты и как метод численного интегрирования должен соотноситься с исходной динамической системой?

Рассмотрим как работают различные варианты метода Рунге-Кутты при интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= MX + P(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где  $M$  –  $n \times n$  - матрица;  $P(t)$  - заданная вектор-функция.

Отметим, что нелинейную систему дифференциальных уравнений можно линеаризовать в окрестности некоторой точки решения и приближенно заменить системой (3.9). При этом анализ, проведенный для линеаризованной системы, может оказаться



достаточно информативным и даст представление о работе метода применительно к исходной нелинейной системе.

Применяя схему (3.2), (3.3) к системе (3.9), получим:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + h \sum_{i=1}^S b_i k_i, \\ k_i &= M(X_n + h \sum_{j=1}^S a_{ij} k_j) + P(t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для анализа работы метода (3.10) произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} X &= UY, \\ X_n &= UY_n, \\ k_i &= Ul_i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $U$  - матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы  $M$ , причем

$$UMU^{-1} = \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \quad (3.12)$$

где  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  - собственные числа матрицы  $M$  (предполагается, что все они различны). Тогда вместо (3.9) имеем:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \Lambda Y + Z(t), \\ Y(0) &= U^{-1} X_0 = Y_0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

а вместо (3.10) имеем:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} &= Y_n + h \sum_{i=1}^S b_i l_i, \\ l_i &= \Lambda(Y_n + h \sum_{j=1}^S a_{ij} l_j) + Z(t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Системы (3.13), (3.14) обладают "диагональной" структурой и распадаются на отдельные скалярные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{y}^m &= \lambda_m y^m + z^m(t), \\ y^m(0) &= y_0^m, \end{aligned} \quad (3.15)$$

и соответственно

$$\begin{aligned} y_{n+1}^m &= y_n^m + h \sum_{i=1}^S b_i l_i^m, \\ l_i &= \lambda_m (y_n^m + h \sum_{j=1}^S a_{ij} l_j^m) + z^m(t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Соотношения (3.15), (3.16), относящиеся к разным индексам  $m$ , имеют полностью идентичную структуру. Поэтому в дальнейшем индекс  $m$  будет опускаться, а под выражениями:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \lambda y + z(t), \\ y(0) &= y_0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^S b_i l_i, \\ l_i &= \lambda (y_n + h \sum_{j=1}^S a_{ij} l_j) + z(t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \dots, S. \end{aligned} \quad (3.18)$$

будет пониматься любое из соотношений (3.15), (3.16).

Таким образом, анализ существенно упрощается и сводится к сравнению точного и численного решений линейного уравнения первого порядка. Решение же исходной системы будет линейной комбинацией решений уравнений первого порядка.

### 3.2. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И ТОЧНОСТИ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Используя формулу для общего решения линейных уравнений, запишем соотношение, связывающее значения решения уравнения (3.17)  $y(t)$  в моменты времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$ ,

$$y(t_{k+1}) = \tilde{\rho}y(t_k) + \int_0^h \tilde{\rho}^{1-\tau} z(t_k + \tau) d\tau, \quad (3.19)$$

где  $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(h\lambda) = \exp(h\lambda)$  (напомним, что  $\exp(h\lambda)$  является импульсной переходной функцией системы (3.17)). Это соотношение будем называть точной дискретной моделью системы (3.17).

Значения  $y_k, y_{k+1}$  численного решения согласно (3.18) связаны соотношением:

$$y_{k+1} = \rho y_k + h \sum_{i=1}^S \beta_i z(t_k + c_i h). \quad (3.20)$$

где

$$\rho(h\lambda) = 1 + h\lambda b^T (E - h\lambda A)^{-1} e = \frac{\det(E - h\lambda A + h\lambda e b^T)}{\det(E - h\lambda A)}, \quad (3.21)$$

$$e = [1, \dots, 1]^T, \quad \beta^T(h\lambda) = [\beta_1, \dots, \beta_S] = b^T (E - h\lambda A)^{-1}.$$

Сопоставляя формулы (3.19) и (3.20) для точной и приближенной дискретных моделей, нетрудно видеть, что в (3.20) точное значение переходного множителя  $\tilde{\rho}(h\lambda)$  в первом слагаемом заменяется приближенным значением  $\rho(h\lambda)$ , определяемым коэффициентами  $b_i, a_{ij}$  в конкретном методе Рунге-Кутты. Второе слагаемое в (3.20) дает

приближенное значение интеграла в (3.19), коэффициенты  $\beta_i(h\lambda)$  также зависят от  $b_i$ ,  $a_{ij}$ , а функция  $z(t)$  вычисляется в моменты времени  $t_k + c_i h$  из интервала  $[t_k, t_{k+1}]$ , определяемые коэффициентами  $c_j$  метода.

Выражая  $y(t_k)$  и  $y_k$  согласно (3.19) и (3.20) через  $y_0$ , получим:

$$y(t_k) = \tilde{\rho}^k y_0 + \sum_{j=1}^k \tilde{\rho}^{k-j} \int_0^h \tilde{\rho}^{1-\frac{\tau}{h}} z(t_{j-1} + \tau) d\tau, \quad (3.22)$$

$$y_k = \rho^k y_0 + \sum_{j=1}^k \rho^{k-j} \sum_{i=1}^S \beta_i z(t_{j-1} + c_i h). \quad (3.23)$$

Сравнение точного (3.22) и приближенного (3.23) решений показывает, что основным фактором, определяющим качество работы метода численного интегрирования, является переходный множитель  $\rho(h\lambda)$ , дающий приближенное значение импульсной переходной функции  $\tilde{\rho}(h\lambda)$ .

Рассмотрим более подробно методы однопараметрического семейства, заданного таблицей Бутчера (3.5), для которых

$$\rho_\alpha = \frac{1 + (1 - \alpha)h\lambda}{1 - \alpha h\lambda}. \quad (3.24)$$

Фундаментальным свойством, определяющим поведение динамических систем, является свойство устойчивости. Поэтому исследование адекватности объектов с непрерывным временем и их дискретных моделей должно включать анализ их устойчивости. Что касается дискретных моделей, то данное свойство является необходимым для обеспечения вычислительной устойчивости алгоритмической модели по отношению к ошибкам округления.

Решение исходной непрерывной системы (3.17) устойчиво, если  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ , при этом  $|\tilde{\rho}(h\lambda)| = |\exp(h\lambda)| = e^{\operatorname{Re}(h\lambda)} \leq 1$ . На плоскости комплексной переменной  $h\lambda$  область устойчивости представляет собой левую полуплоскость (рис. 3.1, а). Численное решение (3.17), полученное методом Рунге-Кутты (3.20), (3.21), устойчиво при  $|\rho(h\lambda)| \leq 1$ . Данное условие для переходного множителя (3.24) принимает вид:

$$\frac{[1 + (1 - \alpha) \operatorname{Re}(h\lambda)]^2 + [(1 - \alpha) \operatorname{Im}(h\lambda)]^2}{[(1 - \alpha) \operatorname{Re}(h\lambda)]^2 + [\alpha \operatorname{Im}(h\lambda)]^2} \leq 1. \quad (3.25)$$

Проведя несложные преобразования (3.25), получим:

$$\begin{cases} \left( \operatorname{Re}(h\lambda) + \frac{1}{1 - 2\alpha} \right)^2 + (\operatorname{Im}(h\lambda))^2 \leq \frac{1}{(1 - 2\alpha)^2}, & \text{при } 1 - 2\alpha > 0 \\ \left( \operatorname{Re}(h\lambda) + \frac{1}{1 - 2\alpha} \right)^2 + (\operatorname{Im}(h\lambda))^2 \geq \frac{1}{(1 - 2\alpha)^2}, & \text{при } 1 - 2\alpha < 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Согласно (3.26), границей области устойчивости является окружность радиуса  $\frac{1}{(1 - 2\alpha)}$  с центром в точке  $h\lambda = -\frac{1}{(1 - 2\alpha)}$ . На рис. 7, б-е изображены области, отвечающие следующим значениям параметра  $\alpha$ :

- б)  $\alpha = 0$  (явный метод Эйлера);
- в)  $\alpha = 0,2$ ;
- г)  $\alpha = 0,5$  (методы "средней точки" и трапеции);
- д)  $\alpha = 0,8$ ;
- в)  $\alpha = 1$  (неявный метод Эйлера).

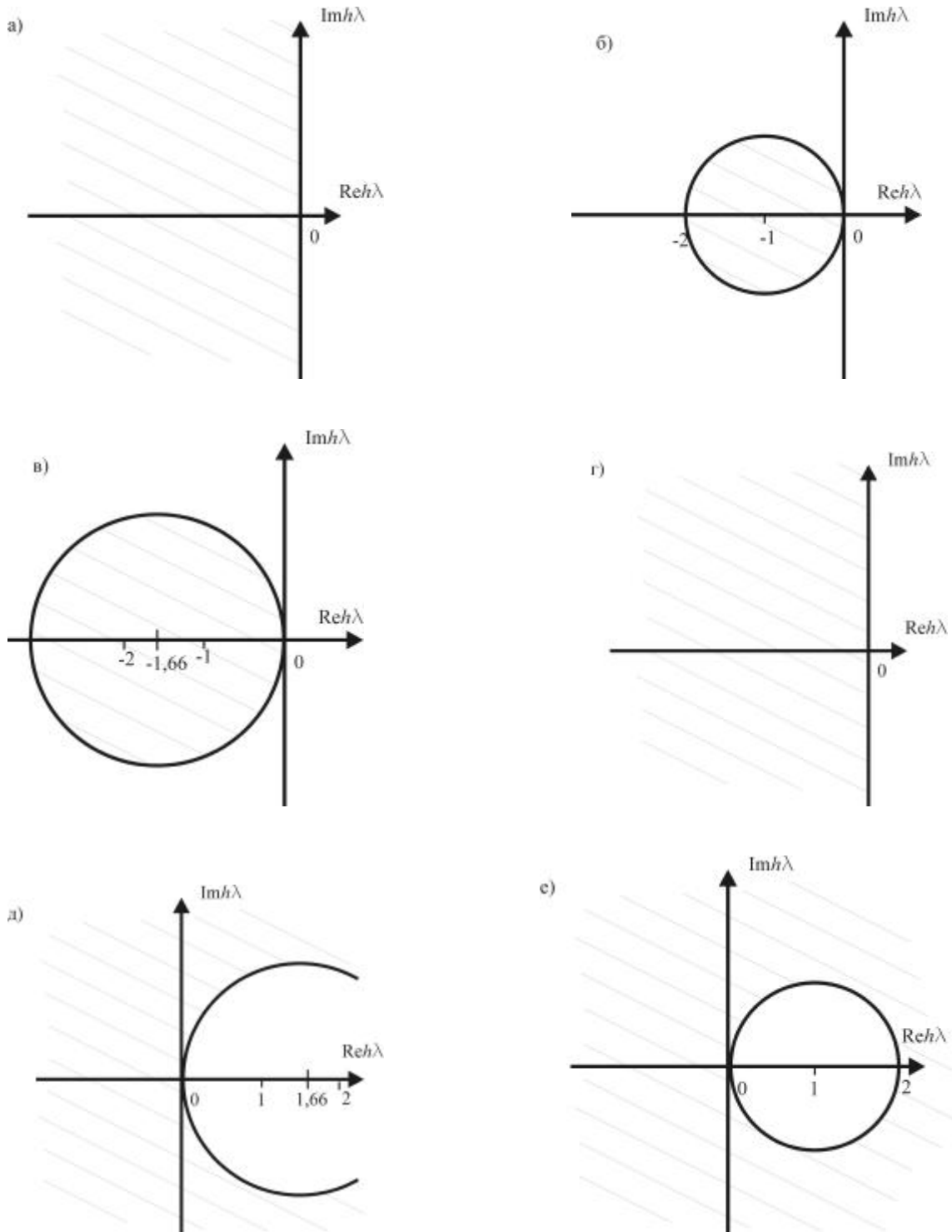


Рис. 7. Области устойчивости: реальная – а) и методов  $\alpha$ -семейства б)  $\alpha = 0$  (явный метод Эйлера); в)  $\alpha = 0,2$ ; г)  $\alpha = 0,5$  (методы "средней точки" и трапеции); д)  $\alpha = 0,8$ ; в)  $\alpha = 1$  ( неявный метод Эйлера).

Таким образом, совпадение областей устойчивости непрерывной системы (3.17) и ее дискретной модели (3.20), (3.21), (3.24) имеет место лишь для  $\alpha = 0,5$ .

Рассмотрим теперь вопрос о выборе шага интегрирования, поскольку его значение непосредственно влияет на устойчивость численного решения. При построении конечномерных математических моделей механических систем медленные процессы, соответствующие малым значениям  $|\lambda|$ , обычно описываются достаточно точно, а быстрые процессы, соответствующие большим значениям  $|\lambda|$ , – с большей погрешностью. С учетом этого шаг интегрирования следует задавать, так, чтобы правильно моделировались медленные процессы. Быстрые процессы можно воспроизводить и с малой точностью, лишь бы это не испортило общую картину.

Обычно в системах большой размерности шаг интегрирования приходится выбирать так, чтобы выполнялись соотношения:

$$|h\lambda|_{\min} \leq 1, \quad |h\lambda|_{\max} \geq 1.$$

При этом естественным требованием к методу интегрирования становилось требование его устойчивости при любом шаге интегрирования. Для устойчивых непрерывных систем ( $\text{Re } \lambda < 0$ ) это означает, что область устойчивости метода должна покрывать всю левую полуплоскость комплексной плоскости  $h\lambda$ , включая и мнимую ось. Такие методы называются A-устойчивыми. Алгоритмы рассматриваемого однопараметрического семейства обладают свойством A-устойчивости при  $\alpha \geq 0,5$ . Если же  $\alpha < 0,5$ , данное свойство отсутствует.

Обеспечение устойчивости метода численного интегрирования, даже в случае полного совпадения его области устойчивости с областью устойчивости непрерывной системы, само по себе не дает

гарантии адекватности дискретной и непрерывной систем, поскольку при этом обеспечивается лишь выполнение условий

$$|\tilde{\rho}(h\lambda)| \leq 1, \quad |\rho(h\lambda)| \leq 1.$$

Чтобы требование адекватности имело место, необходимо выполнить условие

$$\tilde{\rho}(h\lambda) \approx \rho(h\lambda)$$

для основных временных (медленных) процессов. Наглядное представление о возможности его соблюдения дает сравнение отображений плоскости комплексного переменного  $h\lambda$ , определяемых функциями  $\tilde{\rho}(h\lambda) = \exp(h\lambda)$  и  $\rho(h\lambda)$ . Поскольку для устойчивых систем  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  и, как было отмечено,  $|h\lambda|_{\max} \geq 1$ , необходимо рассматривать отображение всей левой полуплоскости  $\operatorname{Re}(h\lambda) < 0$ .

Функция  $\tilde{\rho}(h\lambda) = \exp(h\lambda)$  конформно отображает полубесконечную полосу, изображенную на рис. 8, а, на круг единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 8, б). Начало координат при этом переходит в точку  $\tilde{\rho} = 1$ . Точки отрезка мнимой оси  $[-i\pi, i\pi]$  переходят в точки граничной окружности  $|\tilde{\rho}(h\lambda)| = 1$ . Отрезки прямых, параллельных мнимой оси, преобразуются в концентрические окружности. Прямые, параллельные действительной оси, – в радиально направленные отрезки. Точки отрицательной действительной полуоси, – в точки отрезка  $(0, 1]$  на действительной оси. Точки полос, полученных сдвигом, "основной" полосы (рис. 7, а) вдоль мнимой оси на величину, кратную  $2\pi$ , конформно отображаются на тот же круг единичного радиуса. Последнее означает, что в рамках точной дискретной модели (3.19) колебательные процессы, частоты которых отличаются на величину, кратную  $2\pi/h$  не различаются.



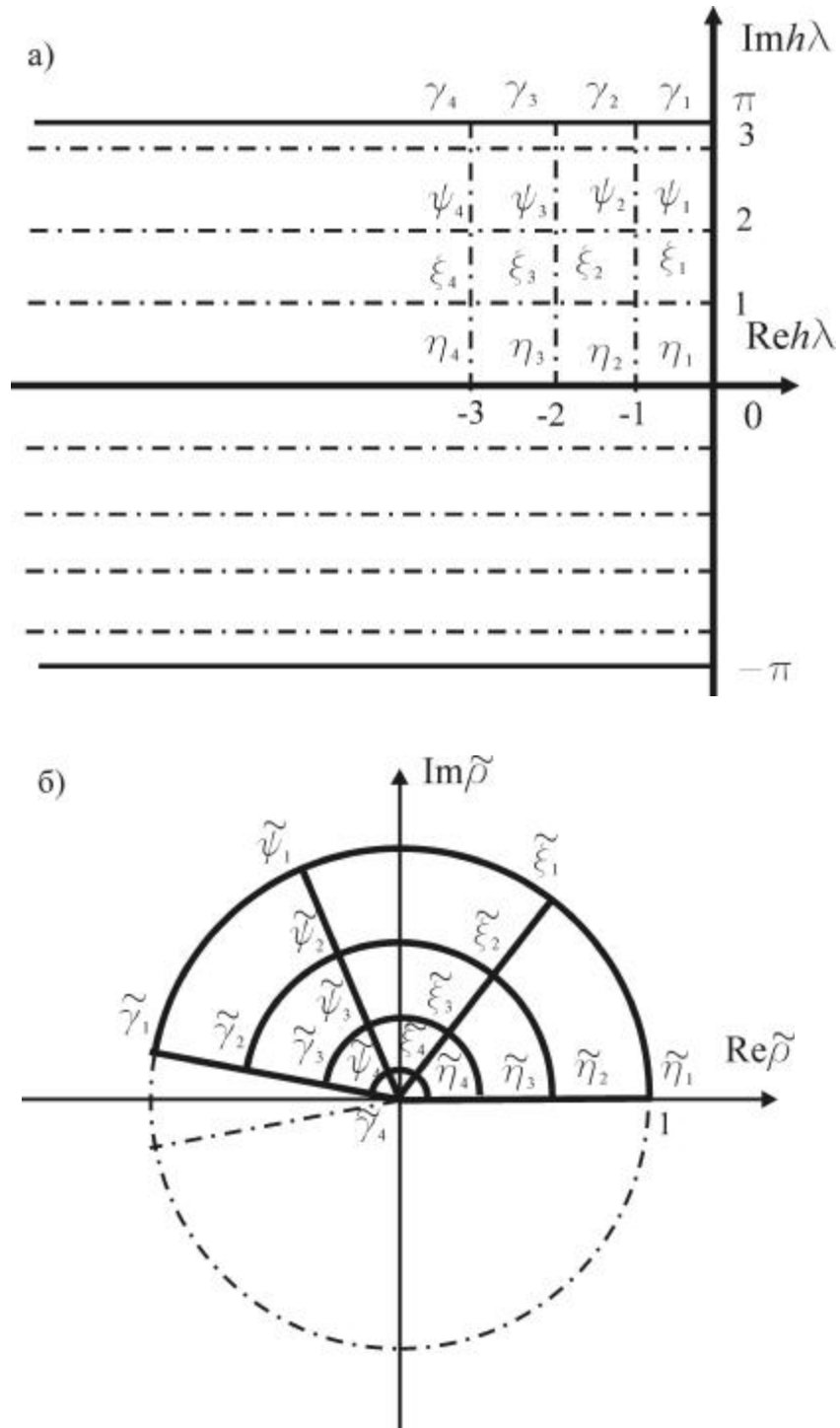


Рис. 8. Отображение функций  $\tilde{\rho}(h\lambda) = \exp(h\lambda)$  полу-полосы  $h\lambda \in [-i\pi, i\pi]$  (а); на плоскость  $\tilde{\rho}$  (б).

Рассмотрим отображения, определяемые функцией  $\rho_\alpha(h\lambda)$  (3.24), при различных значениях параметра  $\alpha$ .

Для явной схемы метода Эйлера, при  $\alpha = 0$  имеем

$$\rho_0(h\lambda) = 1 + h\lambda.$$

Соответствующее отображение дано на рис. 8. Прямоугольная сетка на плоскости  $h\lambda$  отодвинута вправо на единицу, так, что начало координат переходит в точку  $\rho_0 = 1$ . Сравнение точного отображения рис. 8 и отображения на рис. 9 показывает, что явная схема метода Эйлера удовлетворительно работает только при очень малых шагах интегрирования.

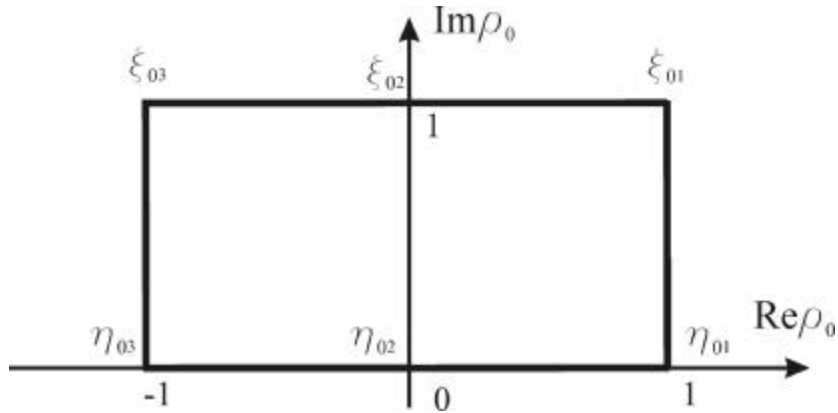


Рис. 9. Отображение полу-полосы функцией  $\rho_0(h\lambda) = 1 + h\lambda$

Для неявной схемы метода Эйлера при  $\alpha = 1$  имеем:

$$\rho_1 = \frac{1}{1 - h\lambda}.$$

Соответствующее отображение представлено на рис. 10. Начало координат снова переходит в точку  $\rho_1 = 1$ . Вся сетка на рис. 10 лежит внутри круга единичного радиуса, что свидетельствует об А-устойчивости метода. Мнимая ось тоже переходит в дугу, лежащую

внутри круга единичного радиуса, что можно интерпретировать как внесение "паразитного затухания" при воспроизведении незатухающих колебаний. Точки отрицательной действительной полуоси переходят, как и в точном отображении, в точки отрезка  $(0,1]$  на действительной полуоси. Это означает, что неявная схема Эйлера адекватно воспроизводит экспоненциально убывающие решения при вещественных отрицательных значениях  $\lambda$ .

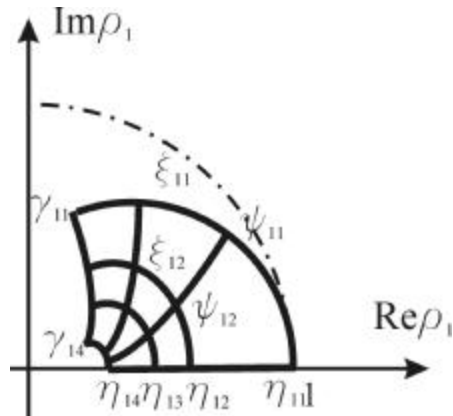


Рис. 10. Отображение полу-полосы функцией  $\rho_1 = \frac{1}{1-h\lambda}$

Для схемы "средней "точки" и метода трапеций при  $\alpha = \frac{1}{2}$  имеем:

$$\rho_{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda}$$

Отображение  $\rho_{\frac{1}{2}}$  представлено на рис. 11. Начало координат и здесь переходит в точку  $\rho_{\frac{1}{2}} = 1$ . Сетка на рис. 11 покрывает круг единичного радиуса, так что метод является А-устойчивым. Более того, мнимая ось, как и в точном отображении, переходит в окружность единичного радиуса. Это означает, что незатухающие колебания воспроизводятся данным методом именно как незатухающие, без

внесения "паразитного затухания". Точки отрицательной действительной полуоси переходят в точки отрезка  $(-1,1]$  на действительной оси, а не в точки отрезка  $(0,1]$ , как в точном отображении. Таким образом, при больших шагах интегрирования метод неадекватно воспроизводит экспоненциально убывающие решения: вместо умножения величины  $y_n$  на малое положительное число производится умножение на отрицательное число, приближающееся с ростом шага по модулю к единице, что приводит к неоправданной "колебательности" решения.

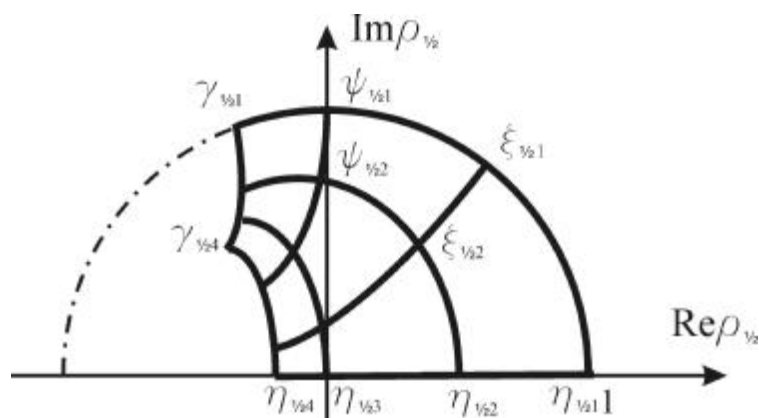


Рис. 11. Отображение полу-полосы функцией

$$\rho_{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \frac{1}{2} h\lambda}{1 - \frac{1}{2} h\lambda}$$

Рассмотрим более подробно работу трех методов семейства (3.5) при вещественных отрицательных значениях  $\lambda$ , что характерно для систем с большой диссипацией энергии и при чисто мнимых значениях  $\lambda = i\omega$ , что характерно для консервативных колебательных систем.

Исследуя системы с большой диссипацией энергии, построим графики зависимости  $\tilde{\rho}(h\lambda)$  и  $\rho_\alpha(h\lambda)$  при вещественных отрицательных значениях  $\lambda$  (см. рис. 12). При малых значениях  $|h\lambda|$

все три метода, конечно, дают удовлетворительное приближение к точному решению.

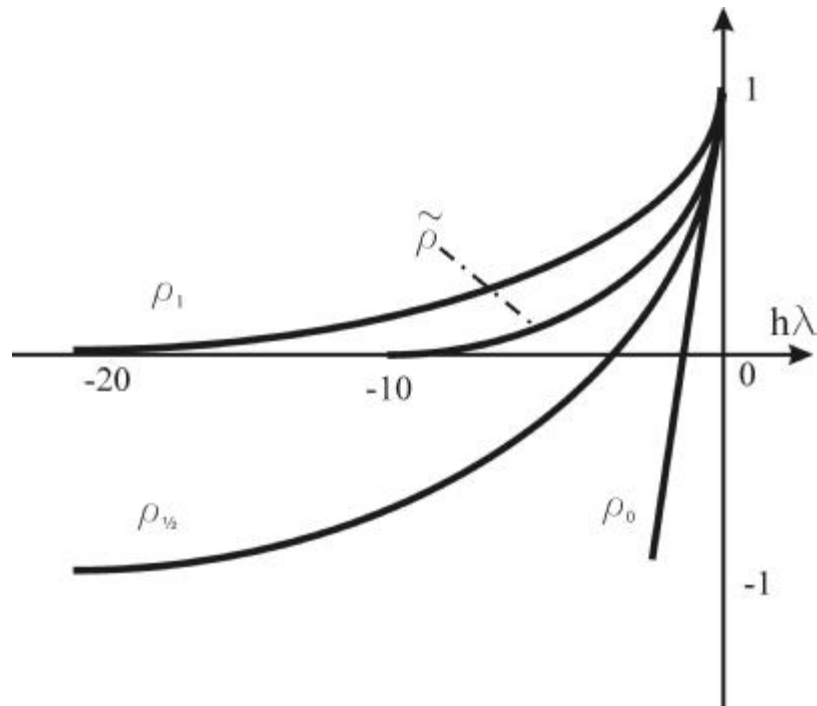


Рис. 12. Зависимость переходных множителей от вещественных  $h\lambda$

Явная схема метода Эйлера при  $|h\lambda| > 1$  дает отрицательные значения  $\rho_0$ , что индуцирует неоправданную "колебательность" при воспроизведении монотонно убывающей экспоненты, а при  $|h\lambda| > 2$  имеем  $|\rho_0| > 1$ , что свидетельствует о неустойчивости метода. Метод "средней точки" и метод трапеций дают наилучшее приближение к точному решению при малых значениях шага интегрирования, однако, при  $|h\lambda| > 2$  величина  $\rho_{\frac{1}{2}}$  становится отрицательной, более того,

$$\rho_{\frac{1}{2}}(h\lambda) \xrightarrow{h\lambda \rightarrow \infty} -1,$$

в то время как в точном решении

$$\tilde{\rho}(h\lambda) \xrightarrow{h\lambda \rightarrow \infty} 0,$$

что еще раз указывает на недопустимый "колебательный" характер воспроизведения монотонно убывающей экспоненты при большом шаге интегрирования. Только неявная схема метода Эйлера дает адекватное воспроизведение убывающей экспоненты при большом шаге интегрирования. Здесь имеем

$$\rho_1(h\lambda) \xrightarrow{h\lambda \rightarrow \infty} 0,$$

как и в точном решении. Это свойство метода называют L-устойчивостью. Таким образом, из трех рассмотренных методов только неявная схема метода Эйлера может быть рекомендована для анализа конечномерных математических моделей механических систем с большой диссипацией энергии, хотя малая точность метода является существенным недостатком.

Рассмотрим теперь работу методов семейства (3.5) при анализе консервативных колебательных систем, т.е. при чисто мнимых значениях  $\lambda = i\omega$ . Здесь точное значение  $\tilde{\rho}(h\lambda) = \exp(ih\omega)$ , а приближенные значения  $\rho_\alpha(ih\omega)$  целесообразно представить в виде:

$$\rho_\alpha(ih\omega) = \exp(-hn_\alpha) \exp(ih\omega_\alpha),$$

где

$$\omega_\alpha = \frac{1}{h} (\arctg((1-\alpha)h\omega) + \arctg(\alpha h\omega)) \quad (3.26)$$

– значение частоты, воспроизводимой численным методом,

$$n_\alpha = \frac{1}{2h} \ln \left[ \frac{1 + (\alpha h\omega)^2}{1 + ((1-\alpha)h\omega)^2} \right] \quad (3.27)$$

– фактор затухания, вносимого численным методом.

На рис. 13 изображены графики зависимостей  $n_\alpha / \omega$  и  $\omega_\alpha / \omega$  от  $h\omega$ .

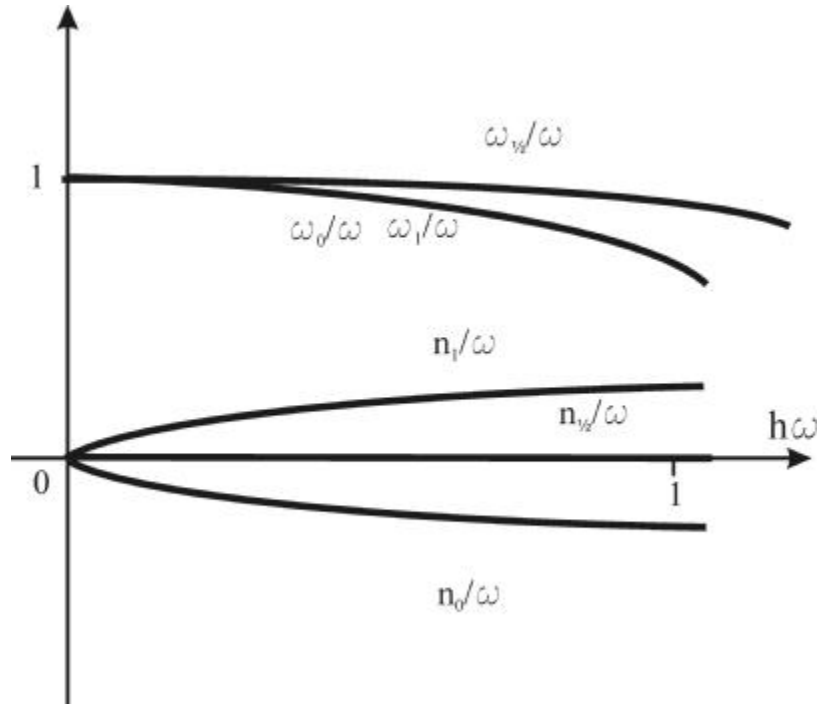


Рис. 13. Графики зависимостей  $n_\alpha / \omega$  и  $\omega_\alpha / \omega$  от  $h\omega$ .

Явная схема метода Эйлера дает заметное искажение частоты, но самое главное, вносит отрицательное "затухание", то есть, воспроизводит колебания с возрастающей амплитудой, так как мнимая ось целиком лежит вне области устойчивости метода. Неявная схема метода Эйлера дает то же искажение частоты, что и явная схема, но вносит положительное затухание, то есть воспроизводит затухающие колебания вместо не затухающих в точном решении. Это естественное следствие того, что мнимая ось целиком лежит внутри области устойчивости метода. Метод "средней точки" и метод трапеций дают меньшее искажение частоты колебаний (в соответствии с более высоким вторым порядком точности метода) и, самое главное, воспроизводят действительно незатухающие колебания. Последнее определяется тем, что мнимая ось является границей области

устойчивости, как в точном решении, так и в приближенном решении данным методом.

Таким образом, методы "средней точки" и трапеций хорошо приспособлены для численного решения задач о колебаниях консервативных механических систем и систем с малым демпфированием. Их недостатком является не очень высокая точность.

В общем случае метода Рунге-Кутты, заданного (3.4) импульсная переходная функция определяется формулой (3.21). Для явного метода  $\rho(h\lambda)$  является полиномом от аргумента  $h\lambda$ , для неявного метода – рациональной функцией вида

$$\rho(h\lambda) = \frac{P_m(h\lambda)}{Q_n(h\lambda)}, \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} P(h\lambda) &= 1 + p_1 h\lambda + \dots + p_m (h\lambda)^m, & m < s \\ Q(h\lambda) &= 1 + q_1 h\lambda + \dots + q_n (h\lambda)^n, & n < S. \end{aligned}$$

Чтобы метод мог быть А-устойчивым, степень полинома в числителе дроби (3.28) должна быть меньше или равна степени полинома в знаменателе.

Развитием явной схемы метода Эйлера являются явные методы  $m$ -го порядка точности, для которых имеем:

$$\rho(h\lambda) = \sum_{i=0}^m \frac{(h\lambda)^i}{i!}.$$

Развитием неявной схемы метода Эйлера являются методы  $n$ -го порядка точности, для которых



$$\rho(h\lambda) = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{(-h\lambda)^i}{i!}}$$

и, в более общем плане, методы, у которых степень полинома в числителе (3.28) меньше, чем степень полинома в знаменателе. Такие методы рекомендуется применять при численном, анализе систем с большой диссипацией энергии.

Развитием метода "средней точки" являются метода Гаусса-Лежандра [6.Д], для которых

$$\rho(h\lambda) = \frac{P(h\lambda)}{P(-h\lambda)}.$$

Методы Гаусса-Лежандра рекомендуется применять в задачах о движении систем, близких к консервативным.

### 3.3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

Рассмотрим задачу Коши для линейной колебательной системы, близкой к консервативной. Дифференциальные уравнения движения системы в конечномерной модели с  $n$  степенями свободы и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} A\ddot{q} + B\dot{q} + Cq &= Q(t), \\ q(0) &= q_0, \\ \dot{q}(0) &= v_0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

где  $q = [q^1, \dots, q^n]^T$  – вектор-столбец обобщенных координат;  $A, B, C$  – квадратные, симметричные положительно определенные матрицы инерционных, диссипативных и квазиупругих

коэффициентов (коэффициенты матрицы  $B$  – малые величины),  $Q(t) = [Q^1(t), \dots, Q^n(t)]^T$  – вектор-столбец обобщенных сил. При  $B = 0$ ,  $Q(t) = 0$  получаем задачу о свободных колебаниях консервативной системы:

$$\begin{aligned} A\ddot{q} + Cq &= 0, \\ q(0) &= q_0, \\ \dot{q}(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Докажем, что при численном интегрировании системы (3.30) методами Гаусса-Лежандра, для которых  $\rho(h\lambda) = P(h\lambda)/P(-h\lambda)$ , полная механическая энергия консервативной системы сохраняется, как и в точном решении задачи. При доказательстве снимем требование положительной определенности матрицы  $C$ , что позволяет рассматривать и неустойчивые консервативные системы.

Точное решение задачи (3.30) имеет вид:

$$q = \sum_{s=1}^n u_s (D_s e^{\lambda_s t} + F_s e^{-\lambda_s t}), \tag{3.31}$$

где  $\lambda_s, -\lambda_s$  ( $s = 1, \dots, n$ ) – корни характеристического уравнения

$$\det(A\lambda_s^2 + C) = 0,$$

$u_s$  – ортонормированные векторы формы, для которых

$$\begin{aligned} u_p^T A u_s &= \delta_{ps}, \\ u_p^T C u_s &= -\delta_{ps} \lambda_p \lambda_s, \end{aligned}$$

$D_s, F_s$  – постоянные интегрирования. При  $t_k = kh$  имеем вместо (3.31)

$$\begin{aligned}
q(t_k) &= \sum_{s=1}^n u_s \left( D_s \tilde{\rho}^k(h\lambda_s) + F_s \tilde{\rho}^k(-h\lambda_s) \right), \\
\dot{q}(t_k) &= \sum_{s=1}^n \lambda_s u_s \left( D_s \tilde{\rho}^k(h\lambda_s) - F_s \tilde{\rho}^k(-h\lambda_s) \right),
\end{aligned} \tag{3.32}$$

где  $\tilde{\rho}(h\lambda_s) = \exp(h\lambda_s)$ .

При  $t = t_k$  полная механическая энергия в точном решении определяется формулой:

$$E(t_k) = T(t_k) + \Pi(t_k) = \frac{1}{2} \dot{q}^T(t_k) A \dot{q}(t_k) + \frac{1}{2} q^T(t_k) C q(t_k),$$

что с учетом (3.32) дает:

$$E(t_k) = -2 \sum_{s=1}^n D_s F_s \tilde{\rho}^k(h\lambda_s) \tilde{\rho}^k(-h\lambda_s) \lambda_s^2.$$

Поскольку  $\tilde{\rho}(h\lambda_s) \tilde{\rho}(-h\lambda_s) = \exp(h\lambda_s) \exp(-h\lambda_s) = 1$ , то имеем

$$E(t_k) = E(0). \tag{3.34}$$

В приближенном решении, полученном методами Гаусса-Лежандра, точные значения  $\tilde{\rho}(h\lambda)$  в (3.32, 3.33) заменяются приближенными значениями  $\rho(h\lambda)$ . Необходимым и достаточным условием сохранения энергии в численном решении является выполнение равенства

$$\rho(h\lambda) \rho(-h\lambda) = 1. \tag{3.35}$$

Для методов Гаусса-Лежандра это условие принимает вид

$$\frac{P(h\lambda)}{P(-h\lambda)} \cdot \frac{P(-h\lambda)}{P(h\lambda)} = 1.$$

и выполняется тождественно. Для колебательной системы все корни характеристического уравнения – чисто мнимые  $\lambda = i\omega$  и условие (3.35) принимает более простой вид

$$\rho(ih\omega)\rho(-ih\omega) = |\rho(ih\omega)|^2 = 1.$$

Подчеркнем, что проведенное доказательство справедливо и для не колебательной неустойчивой консервативной системы.

Простейшими методами, сохраняющими энергию при численном интегрировании, являются метод "средней точки" и метод трапеций. Аналогичные результаты получаются при использовании метода Ньюмарка [5], который при обычно рекомендуемом выборе параметров метода по существу ничем не отличается от метода трапеций. Эти методы имеют второй порядок точности.

В работе [5] для численного интегрирования уравнений движения линейной колебательной системы, близкой к консервативной, предложен метод Гаусса-Лежандра четвертой степени точности, определяемый таблицей вида

$$\begin{array}{c|cc}
 \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
 \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
 \hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
 \end{array} \quad . \quad (3.36)$$

И имеющей переходный множитель

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{12}(h\lambda)^2}{1 - \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{12}(h\lambda)^2}. \quad (3.37)$$

При  $\lambda = i\omega$  переходной множитель представим в виде

$$\rho(ih\omega) = \exp(ih\omega_*),$$

где значение частоты  $\omega_*$  воспроизводимой методом определяется формулой

$$\omega_* = \frac{2}{h} \arccos \frac{1 - \frac{1}{12}(h\omega)^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}h\omega\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{12}(h\omega)^2\right)^2}}.$$

Рассмотрим вопросы практической реализации этого метода. Для построения алгоритма запишем уравнения (3.29) в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mx + X(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\text{где } x = \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & E_n \\ -A^{-1}C & -A^{-1}B \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ A^{-1}Q(t) \end{bmatrix}.$$

Метод (3.27) в задаче (3.38) принимает вид

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \\
k_1 &= M \left( x_k + h \left( \frac{1}{4}k_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_2 \right) \right) + X_1, \\
k_2 &= M \left( x_k + h \left( \frac{1}{4}k_2 + \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) k_1 \right) \right) + X_2, \\
X_1 &= X \left( t_k + h \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right), \\
X_2 &= X \left( t_k + h \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.39}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}
&\left( E_{2n} - \frac{h}{2}M + \frac{h^2}{12}M^2 \right) x_{k+1} = \\
&= \left( E_{2n} + \frac{h}{2}M + \frac{h^2}{12}M^2 \right) x_k + h \left( \frac{(X_1 + X_2)}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{12}M(X_1 - X_2) \right).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Для повышения точности вычислений введем вместо  $x_{k+1}$  неизвестной приращение  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ . Получим вместо (3.40)

$$\left( E_{2n} - \frac{h}{2}M + \frac{h^2}{12}M^2 \right) \Delta x_{k+1} = h \left( Mx_k + \frac{(X_1 + X_2)}{2} + \frac{h\sqrt{3}}{12}M(X_1 - X_2) \right). \tag{3.41}$$

Непосредственно решение системы (3.41) нерационально, так как требуется решать систему алгебраических уравнений с несимметричной матрицей размерности  $2n \times 2n$ . Чтобы упростить выкладки, разложим предварительно матричный квадратный трехчлен в левой части (3.41) на множители

$$E_{2n} - \frac{h}{2}M + \frac{h^2}{12}M^2 = (E_{2n} - \gamma hM)(E_{2n} + \bar{\gamma}hM), \quad (3.42)$$

где  $\gamma = \frac{3 + i\sqrt{3}}{12}$ .

Заменяем систему (3.41) эквивалентной

$$\begin{cases} (E_{2n} - \gamma hM)\Delta\xi_k = Mx_k + \frac{(X_1 + X_2)}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12}\bar{\gamma}(X_1 - X_2) \\ (E_{2n} - \gamma hM)\Delta\bar{x}_k = h(\Delta\xi_k - \sqrt{3}\gamma(X_1 - X_2)) \end{cases} \quad (3.43)$$

Подставляя матрицу  $M$  в (3.43) и производя умножение блочных матриц, получим после несложных преобразований окончательную форму алгоритма, реализующего метод Гаусса-Лежандра четвертого порядка точности в задаче (3.29)

$$\begin{cases} (A + \gamma hB + (\gamma h)^2 C)\Delta\xi_k = -Cq_k - (B + \gamma hC)v_k + \\ + \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}\bar{\gamma}\right)Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\bar{\gamma}\right)Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) \\ \Delta\eta_k = v_k + \gamma h\Delta\xi_k \\ (A + \gamma hB + (\gamma h)^2 C)\Delta v_k = h(\Delta\bar{\xi}_k - \gamma hC\Delta\bar{\eta}_k) - \\ - \sqrt{3}\gamma\left(Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right) + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}\bar{\gamma}\right)Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right)\right) \\ \Delta q_k = h(\Delta\eta_k + \gamma\Delta v_k)v_k \\ q_{k+1} = q_k + \Delta q_k \\ v_{k+1} = v_k + \Delta v_k \end{cases} \quad (3.44)$$

Итак, в предлагаемом алгоритме четвертого порядка точности на каждом шаге интегрирования необходимо решать две системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же симметричной матрицей размера  $[n \times n]$  с комплексными коэффициентами.

Другой способ практической реализации метода Гаусса-Лежандра (3.36) в задаче (3.29) - это итерационное решение системы (3.39)

$$\begin{cases} \left(E_{2n} - \frac{h}{4}M\right)k_1^{i+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hMk_2^k + Mx_k + X_1, \\ \left(E_{2n} - \frac{h}{4}M\right)k_{21}^{i+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hMk_1^k + Mx_k + X_2, \end{cases} \quad (3.45)$$

или после несложных преобразований

$$\begin{cases} \left(A + \frac{h}{4}B + \frac{h^2}{12}C\right)k_{21}^{i+1} = -h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(Ck_{12}^i + \left(B + \frac{h}{4}C\right)k_{22}^i\right) - \\ - Cq_k - \left(B + \frac{h}{4}C\right)v_k + Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right), \\ k_{11}^{i+1} = \frac{h}{4}k_{21}^{i+1} + h\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_{22}^i + v_k, \\ \left(A + \frac{h}{4}B + \frac{h^2}{12}C\right)k_{22}^{i+1} = -h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(Ck_{11}^i + \left(B + \frac{h}{4}C\right)k_{21}^i\right) - \\ - Cq_k - \left(B + \frac{h}{4}C\right)v_k + Q\left(t_k + h\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\right), \\ k_{11}^{i+1} = \frac{h}{4}k_{21}^{i+1} + h\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)k_{22}^i + v_k, \end{cases} \quad (3.46)$$

Итерационный процесс сходится при любом шаге интегрирования. После окончания итераций значения обобщенных координат и скоростей находятся по формулам:



$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + \frac{h}{2}(k_{11} + k_{12}), \\ v_{k+1} = v_k + \frac{h}{2}(k_{21} + k_{22}). \end{cases} \quad (3.45)$$

### 3.4. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ С БОЛЬШОЙ ДИССИПАЦИЕЙ

Задачу анализа системы с большой диссипацией энергии рассмотрим на примере уравнения теплопроводности. В конечномерной модели, полученной, например, методом конечных элементов, задача описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} C\dot{T} + P(t)T &= F(t), \\ T(0) &= T_0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где  $T(t) = [T^1(t), \dots, T^n(t)]^T$  – вектор-столбец узловых температур;  $C$  – положительно определенная матрица теплоемкости;  $P(t)$  – положительно определенная матрица теплопроводности и конвекции;  $F(t) = [F^1(t), \dots, F^n(t)]^T$  – вектор-столбец узловых тепловых сил. Собственные числа (при фиксированном значении  $t$  в матрице  $P(t)$ ) здесь вещественные отрицательные.

Как уже отмечалось, шаг интегрирования обычно выбирают так, что

$$|h\lambda|_{\min} \leq 1, \quad |h\lambda|_{\max} \geq 1.$$

При этом медленно убывающие экспоненты будут воспроизводиться численным методом с большой точностью, а быстро убывающие экспоненты – с малой точностью. Желательно, добиться, чтобы быстро убывающим компонентам точного решения

соответствовали быстро убывающие компоненты приближенного численного решения. Это требование заведомо выполняется, если метод численного интегрирования A-устойчив и L-устойчив, то есть при  $\text{Re } \lambda \leq 0$  выполняется неравенство  $|\rho(h\lambda)| \leq 1$  и  $\rho(h\lambda) \rightarrow 0$  при  $h\lambda \rightarrow \infty$ .

На практике в задачах нестационарной теплопроводности обычно применяют один из трех методов:

Неявную схему метода Эйлера с переходным множителем

$$\rho(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda};$$

Метод Галеркина с переходным множителем

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{3}h\lambda}{1 - \frac{2}{3}h\lambda};$$

Метод трапеций с переходным множителем

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda}{1 - \frac{1}{2}h\lambda};$$

Из перечисленных методов только неявная схема метода Эйлера является A-устойчивой и L-устойчивой, но имеет лишь первый порядок точности. В работе [5] предложен для решения задач теплопроводности метод второго порядка точности, обладающий свойствами A-устойчивости и L-устойчивости с переходным множителем

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)h\lambda}{(1 - \alpha h\lambda)^2}, \quad (3.49)$$

где параметр  $\alpha$  принимает одно из двух значений

$$\alpha_1 = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{(2 + \sqrt{2})}{2}. \quad (3.50)$$

Численные эксперименты показывают, что первый вариант является, по-видимому, предпочтительным.

Приведем обобщение метода [5] на случай нелинейной задачи. Предлагаемый метод относится к классу двух-стадийных диагонально неявных методов Рунге-Кутты. У таких методов матрица  $A$  в (3.4) является нижней треугольной и диагональные элементы равны между собой. Таблица (3.4) предлагаемого метода имеет вид

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & \alpha_i & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \alpha_i & \alpha_i \\ \hline & 0 & 1 \end{array}, i = 1, 2. \quad (3.51)$$

Применение метода (3.51) к задаче (3.48) приводит после сложных преобразований к следующему алгоритму:

$$\begin{cases} \left( C + h\alpha_i P\left(t_k + \frac{h}{2}\right) \right) k_1 = -P\left(t_k + \frac{h}{2}\right) T_k + F\left(t_k + \frac{h}{2}\right), \\ \left( C + h\alpha_i P\left(t_k + \frac{h}{2}\right) \right) k_2 = -P\left(t_k + \frac{h}{2}\right) \left( T_k + h\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) k_1 \right) + \\ + F\left(t_k + \frac{h}{2}\right), \\ T_{k+1} = T_k + h k_2. \end{cases} \quad (3.52)$$

Таким образом, на каждом шаге интегрирования необходимо последовательно решать две системы линейных алгебраических уравнений с одной и той же симметричной матрицей размера  $[n \times n]$  в левой части.

Метод (3.51) целесообразно применять и в нелинейных задачах нестационарной теплопроводности, а также в задачах теории ползучести и пластичности.

## **4. ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАНИЙ**

Практически все приведенные задачи возникли при решении технических проблем, за которым последовал технологический прорыв.

Вместе с тем, все эти задачи «не исследованы до конца» и допускают дополнительное, новое исследование.

Одной из целей данного пособия является выработка навыков самостоятельной исследовательской работы, которая должна быть, прежде всего, правильно организована.

Правила организации такой работы известны и регламентированы.

В начале работы должно быть техническое задание, структура и содержание которого оговорены в различных Государственных и отраслевых стандартах. Например, ГОСТ 19.201-78: «Единая система программной документации. Техническое задание. Требования к содержанию и оформлению», СТО СМК 31-2005: «Система менеджмента качества. Договорная документация. Порядок разработки, построения и оформления технического задания».

Техническое задание, как правило, должно состоять из разделов:

- основание для проведения работы;
- цель и назначение работы;
- исходные данные, в т.ч. обязательные требования и особые условия разработки документации;
- «Перечень нормативных документов»;
- содержание работы (программа проведения работы);
- вид и комплектность документации, передаваемой заказчику;
- требования по согласованию разработанной документации со сторонними организациями.

В тексте технического задания общая задача исследования, сформулированная в обязательном разделе «цели и задачи исследования» конкретизируется, указываются условия проведения

исследований, желаемые характеристики полученного результата и конкретная форма его представления. Если исследование разделено на несколько этапов, то все эти параметры указываются для каждого этапа.

Составление технического задания формально является обязанностью исполнителя и заказчика, но для того, чтобы активно участвовать в написании технического задания, заказчик должен иметь квалификацию не ниже, чем исполнитель. В реальной жизни заказчик потому и заказывает работу, что не может сделать ее сам, поэтому техническое задание, как правило, пишет исполнитель, согласовывая его пункты с заказчиком.

Техническое задание должно быть составлено так, чтобы исполнитель понимал, что конкретно он должен сделать, а заказчик понимал, какие результаты он получит от этой работы. Оно позволяет сократить время, и обоснованно назвать стоимость работы, что важно в любой сфере деятельности.

После технического задания следует сама работа, которая оканчивается написанием отчета.

Содержание и структура научного отчета также регламентированы в ГОСТ 7.32-2001 «Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления»:

Структурными элементами отчета о НИР являются:

- **титульный лист;**
- **список исполнителей;**
- **реферат;**
- содержание;
- определения;
- обозначения и сокращения;
- **введение;**
- **основная часть;**
- **заключение;**
- список использованных источников;
- приложения.

Обязательные структурные элементы выделены полужирным шрифтом.

**Введение** должно содержать оценку современного состояния решаемой научно-технической проблемы, основание и исходные данные для разработки темы, обоснование необходимости проведения НИР, сведения о планируемом научно-техническом уровне разработки, о патентных исследованиях и выводы из них, сведения о метрологическом обеспечении НИР.

Во введении должны быть показаны актуальность и новизна темы, связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.

Во введении промежуточного отчета по этапу НИР должны быть приведены цели и задачи этапа исследований, их место в выполнении НИР в целом.

**В основной части** отчета приводят данные, отражающие сущность, методику и основные результаты выполненной НИР.

Основная часть должна содержать:

а) выбор направления исследований, включающий обоснование направления исследования, методы решения задач и их сравнительную оценку, описание выбранной общей методики проведения НИР;

б) процесс теоретических и (или) экспериментальных исследований, включая определение характера и содержания теоретических исследований, методы исследований, методы расчета, обоснование необходимости проведения экспериментальных работ, принципы действия разработанных объектов, их характеристики;

в) обобщение и оценку результатов исследований, включающих оценку полноты решения поставленной задачи и предложения по дальнейшим направлениям работ, оценку достоверности полученных результатов и технико-экономической эффективности их внедрения и их сравнение с аналогичными результатами отечественных и зарубежных работ, обоснование необходимости проведения

дополнительных исследований, отрицательные результаты, приводящие к необходимости прекращения дальнейших исследований.

**Заключение** должно содержать:

- краткие выводы по результатам НИР или отдельных ее этапов;
- оценку полноты решений поставленных задач;
- разработку рекомендаций и исходных данных по конкретному использованию результатов НИР;
- результаты оценки технико-экономической эффективности внедрения;
- результаты оценки научно-технического уровня выполненной НИР в сравнении с лучшими достижениями в данной области.

Необходимо отметить, что в приведенных из текста ГОСТ требованиях часть информации, содержащейся в отчете, повторяется в различных местах. Например, оценку полноты решения поставленной задачи необходимо делать и в Основной части отчета и в Заклучении.

Такое требование обусловлено тем, что любая научная публикация, в отличие от художественной литературы, должна давать возможность быстро познакомиться с основными результатами, содержащимися в ней. Прочитав Введение и Заключение, любой посторонний специалист должен иметь возможность составить представление о проделанной работе.

Приведенные ниже расчетные задания построены как маленькие исследовательские проекты, «виртуальные лабораторные практикумы».

Как уже говорилось выше, навыками правильной организации исследовательской работы должен обладать любой специалист. Поэтому учащийся должен сначала, ознакомившись с содержанием первых четырех разделов настоящего пособия и описанием конкретного расчетного задания, на основании «Задания на проведение численного эксперимента» написать «План выполнения

задания», в соответствии с изложенными выше требованиями Технического задания. На занятиях, вместе с преподавателем этот план уточняется и проходит своеобразное «согласование». После согласования необходимо выполнить расчетное задание («Виртуальную лабораторную работу»), получить, указанные в «Плане» результаты и написать отчет о выполнении лабораторной работы в полном соответствии с требованиями к отчету о НИР.

Таким образом, выполняющий эти работы студент должен на практике освоить помимо методического материала, касающегося методов моделирования динамических систем, еще и технологию подготовки и проведения исследовательской работы, а также, написания отчета о ней.

В пособии приведены описания восьми «Лабораторных работ». В первой части каждой лабораторной работы сформулирована общая задача исследования. Во второй части подробно описана решаемая задача, дан анализ решений, описаны известные решения. В третьей части сформулировано задание на проведение численного эксперимента. В четвертой части приведены комментарии и замечания к работе. В приложении дано описание стандартных программ на алгоритмическом языке FORTRAN, которые предоставляются в качестве сопроводительного материала.

Исторически сложилось так, что FORTRAN был долгие годы основным языком программирования вычислительных алгоритмов. На этом языке написаны основные процедуры таких пакетов как Matlab, Ansys, Fluent. Это связано с тем, что FORTRAN появился в конце 60-х годов 20 века, когда ЭВМ использовались только для расчетов. На нем были написаны многочисленные вычислительные процедуры, а у созданных гораздо позже алгоритмических языков не оказалось такого удобного средства, как массивы с переменными границами, поэтому «буквальный перевод» на них программ с FORTRAN до сих пор невозможен. FORTRAN остается основным



алгоритмическим языком при программировании матричных вычислений.

Вместе с тем, большая часть применяемых алгоритмов реализована в различных пакетах прикладных программ и использование этих пакетов также возможно при выполнении заданий.

#### **4.1. АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

Наиболее информативны в случае динамических моделей собственные числа системы. Все численные процедуры интегрирования аппроксимируют зависимость производных от времени некоторым полиномом, поэтому от собственных чисел на каждом данном шаге интегрирования зависит точность работы методов. Кроме того, собственные числа линеаризованной системы несут информацию о поведении объекта (характерных временах затухания, быстрых и медленных движениях и т.д.). При сильной нелинейности необходимо проводить линеаризацию в нескольких характерных точках и для каждой определять собственные числа. Эта информация позволяет судить о том, правильно ли составлена математическая модель, подобрать подходящий численный метод, определить характер исследуемой системы (устойчива, неустойчива, каковы характерные времена процессов в системе и т.д.).

Определить, правильно ли составлены уравнения можно сравнивая поведение модели с поведением объекта. Например, объект – слабо демпфированная или консервативная система, а у модели – собственные числа с большими отрицательными вещественными частями или вовсе неустойчивые. При таком анализе можно обнаружить как принципиальные ошибки в уравнениях, так и описки пропущенные символы и т.д. Другой вариант некорректностей – избыточность описания. Если разброс собственных чисел модели очень велик, то во многих случаях это говорит о том, что при составлении модели учтены несущественные

постоянные времени объекта. Шаг интегрирования лимитируется наибольшим по модулю собственным числом, поэтому исключение больших собственных чисел из описания объекта приведет к существенному сокращению вычислительных затрат и позволит использовать более простое, стандартное программное обеспечение. Однако, при исследованиях автоколебательных режимов и в некоторых других случаях оказывается, что именно большие собственные числа определяют характер и устойчивость процессов в системе. В этом случае, необходимо подобрать программное обеспечение для решения жестких систем.

Степень разброса собственных значений системы определяется числом обусловленности, которое равно отношению наибольшего собственного значения к наименьшему. При обусловленности порядка  $10^6$  и выше система считается жесткой и требует либо специальных методов счета, либо двойной и четверной точности при программировании. Например, при решении обычными методами матричного уравнения

$$Ax = B$$

число верных знаков в решении равно

$$N - \lg(m),$$

где  $N$  – число знаков мантиссы при расчете с плавающей точкой;  $m$  – число обусловленности.

Эта оценка не относится напрямую к интегрированию систем, но она даёт представление о зависимости точности расчетов от числа обусловленности.

По характеру системы можно разделить на: консервативные и не консервативные, устойчивые и неустойчивые. Универсальных методов для интегрирования этих систем не существует. Для каждого из перечисленных типов можно подобрать метод интегрирования

сопровождающийся наименьшими вычислительными затратами при минимальных ошибках счета. Например, для консервативных и слабо демпфированных систем наиболее эффективны методы типа модифицированного метода Эйлера, хотя они совершенно не подходят для систем с сильным трением.

Важным элементом анализа модели является выяснение асимптотик её поведения в различных режимах. Зная их можно сделать выводы о правильности составления модели, подобрать численные методы и, в последствии, проверить правильно ли работает программа. Если асимптотические режимы не моделируются то вероятнее всего, при расчетах допущена ошибка. В случае устойчивых систем, асимптотика на бесконечности зависит от внешних воздействий на объект. Например, для линейного механического осциллятора (грузика на пружинке), который описывается уравнением

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + cx = f(t),$$

при  $f(t) = const(t)$  асимптота также константа, а при  $f(t) = \sin(\omega t)$  - асимптота гармоническая.

У неустойчивых систем, а также в начале движения, асимптота определяется внутренними свойствами объекта. Для исследования асимптотических свойств, в случае автоколебательных режимов, можно применять метод гармонического баланса.

В случае решения краевых задач необходимо при предварительном исследовании определить степень влияния краёв друг на друга. Эта степень аналогична числу обусловленности задачи, она сильно влияет на работу всех численных процедур. Можно определить влияния по уравнениям математической физики, проанализировав поведения ядра соответствующего интегрального оператора, можно сделать несколько пробных расчетов, дополнив граничные условия на одном из концов до начальных произвольными

значениями и оценив отношение приращений этих значений к приращению получающихся на другом конце граничных условий. В случае слабого влияния необходимо использовать специальные методы численного интегрирования или перейти к методу последовательных приближений, выделяя главное решение с наложенным на него решение значительно меньшей величины или существенным только у концов области интегрирования и т.д.

Чрезвычайно полезным этапом исследования является определение энергетического баланса в системе. Если она изолированная, можно определить, как энергия распределяется по отдельным компонентам движения, если неизолированная, то можно подсчитать, сколько энергии потребляет система от внешнего источника. Такая оценка даёт возможность правильно подобрать программное обеспечение, проверить результаты расчетов, определяя энергетический баланс численно, разобраться в физической природе объекта и предсказать его поведение.

Все перечисленные выше исследования можно сделать аналитически, оставив компьютеру вычисления по готовым формулам. Дополнительные затраты времени, связанные с ними, окупаются за счет сокращения времени расчетов.

## **4.2. ПОДБОР ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ**

Следующим этапом подготовки численного эксперимента является подбор необходимых численных алгоритмов и программного обеспечения. Программное обеспечение доступно почти для всех широко известных алгоритмов. Выбор алгоритмов можно проводить только после проведения анализа модели системы. Этому вопросу посвящена обширная литература.

Из самых общих положений можно перечислить следующие:

В случае интегрирования задач Коши, для первого тестового просчета можно применить явную процедуру четвертого порядка точности. За счет специфической особенности расположения области

устойчивости методов четвертого порядка точности на комплексной плоскости, они могут устойчиво интегрировать даже консервативные системы. Простота программного обеспечения позволяет быстро осуществить просчет и понять, какова обусловленность задачи, не прибегая к более сложным процедурам (например, неявным).

Как уже отмечалось в пособии: для консервативных и близких к ним систем необходимо применять методы типа модифицированного метода Эйлера; для систем с малой размерностью или малым разбросом собственных чисел – методы типа явных; для систем с сильным затуханием и большим разбросом собственных чисел – типа неявных.

Имеется общее правило для выбора порядка точности метода. С некоторой долей условности можно считать, что порядок точности метода – это порядок полинома, которым он аппроксимирует правые части дифференциальных уравнений на каждом шаге интегрирования. Идеально, если эти порядки совпадают. В противном случае, важно, чтобы порядок точности метода (или порядок аппроксимации) не был выше чем порядок последней непрерывной производной.

Количественно, это правило доказано для программ интегрирования как теорема [8.Д]. Качественно это правило можно проиллюстрировать графически.

Допустим, что функция правых частей имеет разрыв, ее аппроксимация при интегрировании явным методом Эйлера приведена на рис. 14.

На рис.14 видно, что при измельчении шага аппроксимация будет все более точно описывать функцию правых частей.

Аппроксимация методом четвертого порядка точности приведена на рис.15. При уменьшении шага в месте разрыва аппроксимация будет все сильнее отличаться по величине от исходной функции, сходимость аппроксимации будет только в среднем, интегральном смысле.

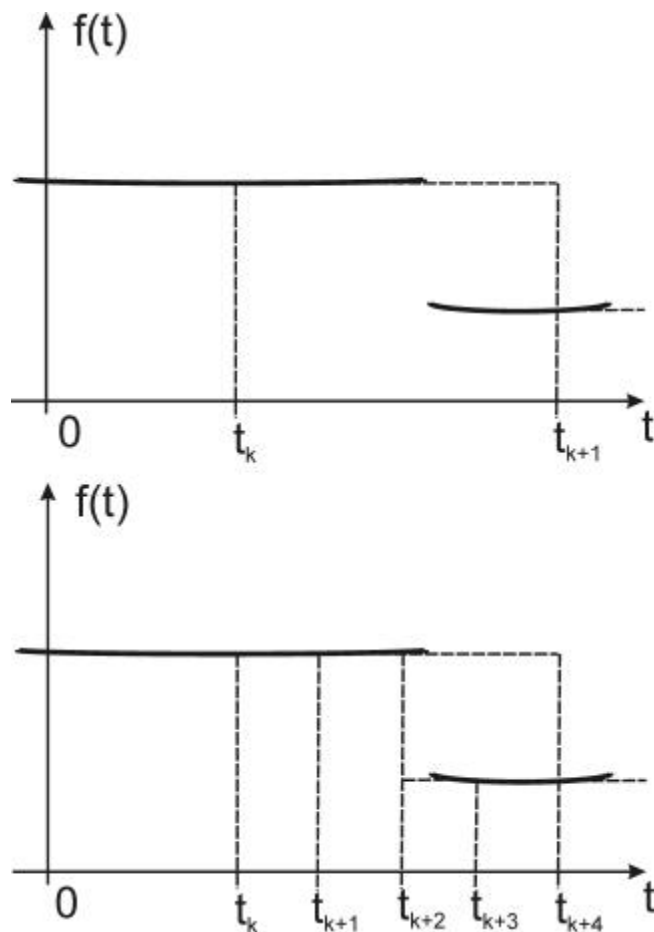


Рис. 14. Аппроксимация разрывной функции правых частей уравнений при интегрировании методом первого порядка точности, большой шаг интегрирования (вверху), маленький (внизу).

В случае решения краевых задач вариантов для выбора методов их численного решения значительно больше, хотя их выбор также зависит от степени обусловленности задачи.

Например, метод пристрелки сводит решение краевой задачи к последовательности задач Коши, а метод конечных элементов сводит решение краевой задачи к матричным линейным уравнениям. Наиболее распространенным методом обращения плохо обусловленных матриц является метод Холецкого. Однако в некоторых случаях (например, задачах идентификации) лучшие результаты даёт SVD - процедура.

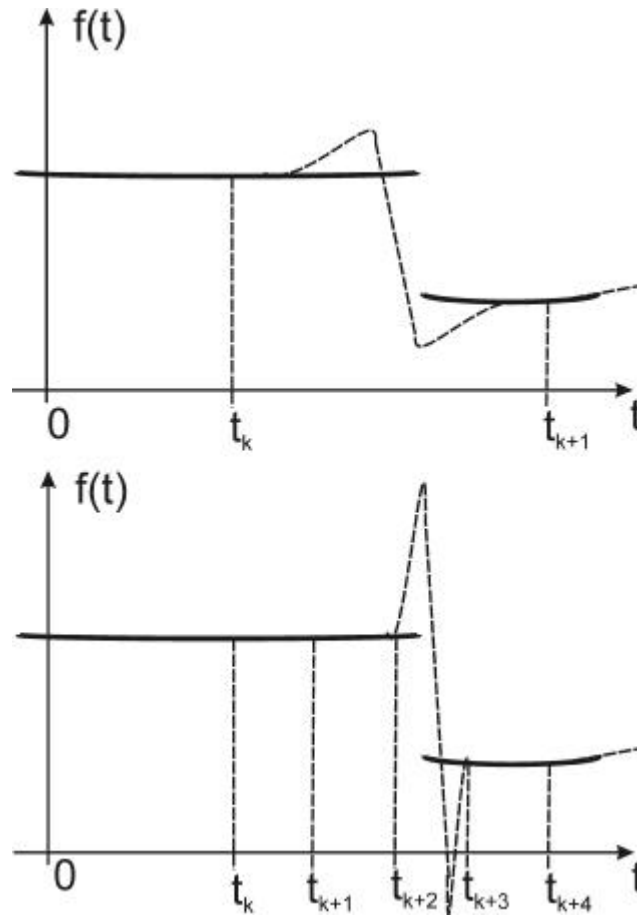


Рис. 15. Аппроксимация разрывной функции правых частей уравнений при интегрировании методом четвертого порядка точности, большой шаг интегрирования (вверху), маленький (внизу).

При выборе программного обеспечения необходимо обращать внимание на дату создания программы. Как правило, программные продукты 80-х годов качественно лучше, чем 60-70-х. На хорошее качество продуктов указывает наличие тестового примера, файла входных данных для него, описания и т.д.

### 4.3. ПРОВЕРКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Допустим, что в результате работы вашей программы получены графики процессов, происходящих внутри исследуемого объекта или таблица функций этих процессов. Как проверить правильность счета?

Самым простым и часто употребляемым приемом является тестовый пример. Ищется близкий к исследуемому объекту объект, решение для которого известно, либо решение может быть получено аналитически. Параметры программы меняются так, чтобы она описывала этот объект и получившееся после счета решение сравнивается с известным. Если они совпадают с требуемой точностью, то считается, что программа дает правильные результаты и исходного объекта.

Главной проблемой в этом подходе является выбор подходящего тестового примера. Как правило – это упрощенный вариант исходной модели, из которой выкинута сингулярность либо нелинейность, мешающая получить аналитическое решение. При выборе теста необходимо знать, как скажется изменение исходной модели на переходе от аналитической модели к численным результатам. Этот переход не всегда однозначен и если численный метод подходит для теста это ничего не говорит о том, что он подходит для модели.

Часто применяют проверку по асимптотикам системы. Например, на бесконечности или при стремлении к другой границе. Этот прием также имеет существенный недостаток. Почти все численные процедуры работают с погрешностью, которая может накапливаться. Если численная модель выходит на асимптоту неточно, то это вовсе не означает, что на коротких отрезках счет идет с такой же большой погрешностью.

Наконец, хорошим приемом является проверка энергетического баланса. Зная координаты – результат интегрирования уравнений модели – его можно легко посчитать. С другой стороны во многих случаях просто вычислить потери энергии или ее прибыль в системе. Сравнивая эти величины, можно сделать вывод об адекватности перехода от аналитической модели к численной модели.



## 5. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ

### 5.1. РАБОТА № 1. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОШАГОВЫХ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

#### Цель работы

Анализ одношаговых методов численного решения задачи Коши для линейного осциллятора при различных значениях параметров осциллятора.

Математическая формулировка задачи

Рассмотрим задачу нахождения решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях (задачу Коши)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, t), \\ x(0) &= x_0,\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

где  $t$  – время;  $x = [x^1(t) \dots x^N(t)]^T$  – вектор-столбец неизвестных величин;  $f = [f^1(t, x) \dots f^N(t, x)]^T$  – вектор-столбец правых частей уравнений.

В одношаговых методах численного интегрирования (с шагом  $h$ ) по заданному значению  $x_0$  в момент времени  $t_0 = 0$  последовательно находятся приближенные значения  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$  в дискретных точках  $t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = nh, t_{n+1} = (n+1)h, \dots$ . Значение  $x_{n+1}$  находится по значению  $x_n$  на предыдущем шаге (без использования информации о значениях  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$  на предшествующих шагах).

Рассмотрим однопараметрическое семейство методов Рунге-Кутты, определяемое следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hk_1 \\ k_1 &= f(t_n + \alpha h, x_n + \alpha hk_1)\end{aligned}\tag{5.1.2}$$

Однопараметрическое семейство (5.1.2) с параметром  $\alpha$  является весьма представительным. При  $\alpha = 0$  получаем явную схему метода Эйлера, имеющую первый порядок точности

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hk_1 \\ k_1 &= f(t_n, x_n) \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

или

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, x_n). \quad (5.1.4)$$

При  $\alpha = 1$  получаем неявную схему Эйлера, также имеющую первый порядок точности

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hk_1, \\ k_1 &= f(t_n + \alpha h, x_n + \alpha hk_1), \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

или

$$x_{n+1} = x_n + f(t_{n+1}, x_{n+1}). \quad (5.1.6)$$

При  $\alpha = \frac{1}{2}$  получаем метод средней точки, имеющий второй порядок точности

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hk_1, \\ k_1 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}hk_1\right), \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

или

$$x_{n+1} = x_n + f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\right). \quad (5.1.8)$$

Рассмотрим как работают методы однопараметрического семейства при интегрировании системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Mx + X(t), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Применяя методы (5.1.2) к системе уравнений (5.1.9), имеем

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hk_1, \\k_1 &= M(x_n + \alpha hk_1) + X(t_n + \alpha h).\end{aligned}\tag{5.1.10}$$

Достаточно полное представление о работе методов однопараметрического  $\alpha$ -семейства можно получить при сравнении точного и приближенного численного решений скалярного линейного однородного уравнения первого порядка - тестового уравнения

$$\dot{y} = \lambda y.\tag{5.1.11}$$

Следует рассмотреть решения уравнения (5.1.11) при значениях  $\lambda$ , равных собственным числам матрицы  $M$ . Значения неизвестной величины  $y_1$  в моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1} = t_n + h$  в точном решении связаны в силу уравнения (5.1.11) соотношением

$$y(t_{n+1}) = \tilde{\rho}(h\lambda)y(t_n),\tag{5.1.12}$$

где

$$\tilde{\rho}(h\lambda) = e^{h\lambda}\tag{5.1.13}$$

– переходный множитель в точном решении.

Приближенные значения  $y_n$  и  $y_{n+1}$  связаны соотношениями (см. (5.1.10))

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + hk_1 \\k_1 &= \lambda(y_n + \alpha hk_1).\end{aligned}\tag{5.1.14}$$

Исключая величину  $k_1$  из (5.1.14), получим

$$y_{n+1} = \rho_\alpha(h\lambda)y_n,\tag{5.1.15}$$

где

$$\rho_{\alpha}(h\lambda) = \frac{1 + (1 - \alpha)h\lambda}{1 - \alpha h\lambda} \quad (5.1.16)$$

– переходный множитель в методах однопараметрического  $\alpha$ -семейства.

Отметим, что аргументом переходного множителя является безразмерная величина  $h\lambda$ , модуль которой дает объективную оценку величины шага интегрирования. Имеем в явной схеме Эйлера, при  $\alpha = 0$ ,

$$\rho_0(h\lambda) = 1 + h\lambda. \quad (5.1.17)$$

Отметим, что  $(1 + h\lambda)$  – это первые два члена в разложении в степенной ряд точного переходного множителя  $e^{h\lambda}$ . В неявной схеме метода Эйлера, при  $\alpha = 1$ , получаем

$$\rho_1(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda}. \quad (5.1.18)$$

Отметим, что раскладывая переходной множитель  $\rho_1(h\lambda)$  в степенной ряд, получим  $\rho_1(h\lambda) = 1 + h\lambda + \dots$  и первые два члена здесь те же, что и в разложении точного переходного множителя  $e^{h\lambda}$ . Однако очень существенно, что переходный множитель в неявной схеме метода Эйлера представляется именно в виде (5.1.18).

В методе средней точки, при  $\alpha = \frac{1}{2}$ , имеем

$$\rho_{\frac{1}{2}}(h\lambda) = \frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \quad (5.1.19)$$

и, раскладывая  $\rho_{\frac{1}{2}}(h\lambda)$  в степенной ряд, получаем

$$\rho_{\frac{1}{2}}(h\lambda) = 1 + h\lambda + 1/2(h\lambda)^2 + \dots$$

Здесь уже три члена разложения совпадают с соответствующими членами в разложении величины  $e^{h\lambda}$  - метод средней точки имеет второй порядок точности. В данном случае очень существенно то, что переходный множитель  $\rho_{\frac{1}{2}}(h\lambda)$  представлен именно в виде (5.1.19).

Рассмотрим вопрос о выборе шага интегрирования. Поскольку при построении конечномерных математических моделей механических систем медленные процессы, соответствующие малым значениям  $|\lambda|$ , описываются достаточно точно, а быстрые процессы, соответствующие большим значениям  $|\lambda|$ , с большой погрешностью, то шаг интегрирования следует задавать так, чтобы правильно воспроизводить медленные процессы. Быстрые процессы допустимо воспроизводить с меньшей точностью, лишь бы это не исказило общую картину. На практике, при численном исследовании больших систем, с целью сокращения времени счета, обычно выбирают шаг интегрирования так, чтобы выполнялись соотношения

$$|h\lambda|_{\min} \leq 1, \quad |h\lambda|_{\max} \geq 1.$$

При этом необходимо иметь четкое представление о работе методов численного интегрирования не только при малых, но и при больших значениях величины  $|h\lambda|$ .

Важной характеристикой как точного, так и приближенного решений является их устойчивость, определяющая чувствительность решения к возмущениям. Точное решение уравнения возмущенного движения, соответствующего тестовому уравнению (5.1.11)

$$(\Delta y)' = \lambda(\Delta y) \quad (5.1.20)$$

в момент времени  $t_n$ , имеет вид

$$\Delta y(t_n) = \tilde{\rho}^n(h\lambda)\Delta y_0 = e^{h\lambda n} \Delta y_0$$

и устойчиво при  $Re\lambda \leq 0$ , при этом  $|\tilde{\rho}(h\lambda)| = |e^{h\lambda}| = e^{Re(h\lambda)} \leq 1$ .

Численное решение уравнения возмущенного движения (5.1.20), полученное методами  $\alpha$  - семейства (5.1.15), в момент времени  $t_n$  имеет вид

$$\Delta y_n = \rho_\alpha^n(h\lambda)\Delta y_0 \quad (5.1.21)$$

и устойчиво при  $|\rho_\alpha| \leq 1$ , т.е. при выполнении неравенства

$$\frac{(1 + (1 - \alpha)Re(h\lambda))^2 + ((1 - \alpha)Im(h\lambda))^2}{(1 - \alpha Re(h\lambda))^2 + (\alpha Im(h\lambda))^2} \leq 1. \quad (5.1.22)$$

Области устойчивости алгоритмов  $\alpha$ -семейства на плоскости комплексной переменной  $h\lambda$  при  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 1$  показаны штриховкой на рис. 7 пособия.

В явной схеме метода Эйлера (при  $\alpha = 0$ ) имеем

$$(Re(h\lambda) + 1)^2 + (Im(h\lambda))^2 \leq 1,$$

что на плоскости комплексной переменной  $h\lambda$  определяет круг единичного радиуса с центром в точке  $h\lambda = -1$ . Чтобы обеспечить работу в области устойчивости шаг интегрирования должен быть достаточно малым - такие схемы называют условно устойчивыми.

Заметим, что при чисто мнимом собственном значении  $\lambda = i\omega$  алгоритм неустойчив при любом шаге интегрирования.

В неявной схеме метода Эйлера (при  $\alpha = 1$ ) имеем  $(Re(h\lambda) - 1)^2 + (Im(h\lambda))^2 \geq 1$ , что определяет область вне круга единичного радиуса с центром в точке  $h\lambda = 1$ . Для устойчивой системы ( $Re\lambda \leq 0$ ) алгоритм является устойчивым при любом шаге интегрирования – такие схемы называют абсолютно устойчивыми.

В методе средней точки (при  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) имеем область устойчивости, заданную неравенством  $Re(h\lambda) \leq 0$ , что определяет левую полуплоскость (включая и мнимую ось). Алгоритм абсолютно устойчив. Более того, здесь область устойчивости совпадает с областью устойчивости исходного уравнения. Это свойство, как мы увидим, оказывается очень существенным.

Рассмотрим работу методов  $\alpha$ -семейства (5.1.14) при анализе колебательных систем. Будем рассматривать системы с малым демпфированием, для которых собственные числа являются комплексными с отрицательной действительной частью  $\lambda = -n + i\omega$ ,  $n > 0$ , и системы с большим демпфированием, в которых собственные числа действительные, отрицательные  $\lambda < 0$ .

Для систем с малым демпфированием переходный множитель в точном решении имеет вид

$$\tilde{\rho}(h(-n + i\omega)) = e^{-hn} e^{ih\omega}. \quad (5.1.23)$$

Положение корней системы  $h\lambda$  относительно областей устойчивости методов (5.1.14) показано на рис. 16.

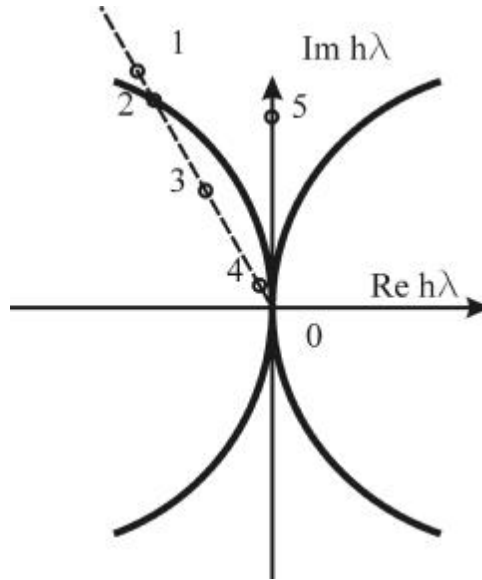


Рис. 16 Положение корней  $h\lambda$  для слабодемпфированных систем 1, 2, 3, 4 – при различных  $h$ , 5 – при чисто мнимом  $\lambda$  (консервативная колебательная система)

На рис. 16 хорошо видно, что явный метод моделирует слабо-демпфированную систему как 1 – неустойчивую, 2 – консервативную, 3, 4 – слабо демпфированную с различной величиной демпфирования (для случая 3 – демпфирование максимально). Неявный метод моделирует слабо-демпфированную систему только как слабо-демпфированную, но тоже с различной величиной демпфирования. Метод трапеций также моделирует систему как слабо-демпфированную.

Будем оценивать качество работы численных методов  $\alpha$ -семейства по тому, насколько хорошо эти методы воспроизводят частоту колебаний  $\omega$  и фактор затухания  $n$ . Об этом можно судить по переходному множителю, который для колебательной системы с малым демпфированием принимает вид

$$\rho_{\alpha}(h(-n + i\omega)) = \frac{[1 - (1 - \alpha)hn] + i[(1 - \alpha)h\omega]}{[1 + -\alpha hn] + i[-\alpha h\omega]}. \quad (5.1.24)$$



Для сравнения переходных множителей (5.1.23) и (5.1.24) представим (5.1.24) в виде, аналогичном (5.1.23)

$$\rho_\alpha(h(-n+i\omega)) = |\rho_\alpha| e^{i \arg \rho_\alpha} = e^{-hn_\alpha} e^{ih\omega_\alpha}, \quad (5.1.25)$$

где

$$\omega_\alpha = \frac{1}{h} \arg \rho_\alpha = \frac{1}{h} \arccos \frac{1 - (1 - 2\alpha)hn - \alpha(1 - \alpha)((hn)^2 + (h\omega)^2)}{\sqrt{[1 - (1 - 2\alpha)hn - \alpha(1 - \alpha)((hn)^2 + (h\omega)^2)]^2 + (h\omega)^2}}$$

– значение частоты, воспроизводимой численным методом,

$$n_\alpha = -\frac{1}{h} \ln |\rho_\alpha| = -\frac{1}{h} \ln \sqrt{\frac{[1 - (1 - \alpha)(hn)]^2 + [(1 - \alpha)h\omega]^2}{[1 + \alpha hn]^2 + [\alpha h\omega]^2}}$$

– фактор затухания, воспроизводимый численным методом.

Наиболее убедительные результаты получаются при анализе системы без демпфирования ( $n = 0$ ,  $\lambda = i\omega$ ). Точное решение в этом случае представляет собой колебания с постоянной амплитудой. Приведем еще разложения величин  $\omega_\alpha/\omega$  и  $n_\alpha/\omega$  (при  $n = 0$ ) в ряды по степеням  $h\omega$  (при  $n = 0$ )

$$\frac{\omega_\alpha}{\omega} = 1 - \left(\frac{1}{12} + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2\right)(h\omega)^2 + O((h\omega)^3);$$

$$\frac{n_\alpha}{\omega} = -\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)(h\omega) + O((h\omega)^2).$$

Анализ результатов показывает, что явная схема метода Эйлера ( $\alpha = 0$ ) дает некоторое искажение частоты ( $\omega_0/\omega \approx 1 - 1/3(h\omega)^2$ ), но, самое главное, вносит "отрицательное демпфирование" ( $n_0/\omega \approx -1/2(h\omega)$ ), т.е. воспроизводит колебания с возрастающей амплитудой. Это полностью согласуется с тем, что мнимая ось целиком лежит вне области устойчивости явной схемы метода

Эйлера, а консервативные системы будут моделироваться как неустойчивые (рис. 16 точка 5).

Неявная схема Эйлера ( $\alpha = 1$ ) дает то же искажение частоты, что и явная схема ( $\omega_1/\omega \approx 1 - 1/3(h\omega)^2$ ), но вносит положительное демпфирование ( $n_1/\omega \approx 1/2(h\omega)$ ), т.е. воспроизводит колебания с убывающей амплитудой вместо колебаний с постоянной амплитудой в точном решении. Это естественное следствие того, что мнимая ось целиком лежит внутри области устойчивости метода (рис. 16).

Метод средней точки дает меньшее искажение частоты колебаний ( $\omega_{1/2}/\omega \approx 1 - 1/12(h\omega)^2$ ) и, самое главное, воспроизводит колебания с постоянной амплитудой ( $n_{1/2} = 0$ ). Последнее определяется тем, что здесь мнимая ось является границей области устойчивости как точного решения, так и численного решения.

Таким образом, метод средней точки наилучшим образом приспособлен для решения задач о колебаниях консервативных механических систем и систем с малым демпфированием. Доказано, что метод средней точки сохраняет энергию линейной консервативной механической системы.

Отметим, что проанализированные выше свойства методов  $\alpha$ -семейства проявляются и в задаче о вынужденных колебаниях. При гармоническом возбуждении в стационарном режиме здесь наблюдается некоторое смещение резонансного пика в сторону низких частот (соответствующее смещению собственной частоты, воспроизводимой численным методом), но, самое главное, меняется уровень резонансных амплитуд (в соответствии с тем, что численный метод вносит паразитное демпфирование). Это изменение уровня может оказаться заметным, особенно при очень малом уровне демпфирования в исследуемой системе.

Рассмотрим теперь работу методов  $\alpha$ -семейства при анализе колебательных систем с большим демпфированием, в которых собственные числа – действительные, отрицательные,  $\lambda < 0$ .

При малых значениях  $|h\lambda|$  все три метода  $\alpha$ -семейства, конечно, дают удовлетворительное приближение к точному решению. Явная схема метода Эйлера ( $\alpha = 0$ ) при  $|h\lambda| > 1$  дает отрицательное значение  $\rho_0$ , что индуцирует неоправданную колебательность при воспроизведении монотонно убывающей экспоненты, а при  $|h\lambda| > 2$  имеем  $|\rho_0| > 1$ , что свидетельствует о неустойчивости метода.

Метод средней точки ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ) дает наилучшее приближение к точному решению при малых шагах интегрирования, однако при  $|h\lambda| > 2$  величина  $\rho_{1/2}$  становится отрицательной, более того,  $\rho_{1/2}(h\lambda) \rightarrow -1$  при  $h\lambda \rightarrow -\infty$ , в то время как в точном решении  $\tilde{\rho}(h\lambda) \rightarrow 0$  при  $h\lambda \rightarrow -\infty$ . Это означает, что метод средней точки при большом шаге интегрирования воспроизводит быстро убывающую экспоненту в виде знакопеременяющейся, очень медленно убывающей по модулю последовательности точек.

Только неявная схема Эйлера ( $\alpha = 1$ ) дает адекватное воспроизведение убывающей экспоненты при большом шаге интегрирования. Здесь имеем  $\rho_1(h\lambda) \rightarrow 0$  при  $h\lambda \rightarrow -\infty$ , как и в точном решении. Это свойство метода называют L-устойчивостью.

Таким образом, из трех рассмотренных методов  $\alpha$ -семейства только неявная схема Эйлера может быть рекомендована для анализа конечномерных математических моделей механических систем с большой диссипацией энергии, хотя малая точность неявной схемы является, конечно, существенным недостатком.

На основании проведенного анализа можно дать определенные рекомендации по применению методов численного интегрирования к решению различных классов задач механики.

Явные методы целесообразно использовать в задачах, где невелико число степеней свободы, невелик разброс собственных чисел (в линеаризованной системе), имеется демпфирование среднего уровня.

Неявные методы типа метода средней точки следует применять в первую очередь к задачам о движении консервативных систем – здесь это практически единственный класс методов, дающий правильную качественную картину движения. Целесообразно применять этот класс методов и к системам близким к консервативным (системам с малой диссипацией энергии).

Неявные методы типа неявной схемы Эйлера разумно применять к исследованию систем, у которых собственные числа – вещественные, отрицательные. Это колебательные системы с большим (выше критического) демпфированием. К этому же типу принадлежат задачи теории теплопроводности, теории ползучести и т.п. Здесь оказывается целесообразным применять также и многошаговые методы (в первую очередь, так называемые, "чисто неявные" методы).

### **Описание линейного осциллятора.**

Движение линейного осциллятора описывается дифференциальным уравнением вида

$$aq'' + bq' + cq = \tilde{Q}(t), \quad (5.1.26)$$

где  $q$  – обобщенная координата;  $a > 0$  – инерционный коэффициент;  $b > 0$  – коэффициент сопротивления;  $c > 0$  – квазиупругий коэффициент;  $\tilde{Q}(t)$  – обобщенная сила. Символом  $(\ )'$  обозначена производная по времени. Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} q|_{t=0} &= q_0, \\ \dot{q}|_{t=0} &= \dot{q}_0. \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

Количество существенных параметров, определяющих движение осциллятора можно сократить до одного. Действительно, разделив на инерционный коэффициент  $a$ , получим вместо (5.1.26) следующее уравнение:

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \frac{1}{a}\tilde{Q}(t), \quad (5.1.28)$$

где  $n = b/2a$  – фактор затухания;  $k = \sqrt{c/a}$  – собственная частота колебаний осциллятора без учета демпфирования. Далее, вводя безразмерное время  $\tau$  по формуле  $\tau = kt$ , имеем вместо (5.1.28)

$$\ddot{q} + 2v\dot{q} + q = \frac{1}{ak^2}\tilde{Q}(t/k) = Q(\tau), \quad (5.1.29)$$

где  $v = n/k$  – относительное затухание. Вместо начальных условий (5.1.27) имеем

$$\begin{aligned} q|_{\tau=0} &= q_0, \\ \dot{q}|_{\tau=0} &= \dot{q}_0/k = v_0. \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

Точкой обозначена производная по безразмерному времени  $\tau$ . Таким образом, существенным параметром, определяющим характер движения осциллятора, является относительное затухание  $v$ .

Корни характеристического уравнения в задаче (5.1.29) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -v \pm \sqrt{v^2 - 1}. \quad (5.1.31)$$

При малом демпфировании ( $v < 1$ ) корни комплексные с отрицательной действительной частью

$$\lambda_{1,2} = -v \pm ik.$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего (5.1.29), представляет собой затухающие колебания

$$q = Ae^{-v\tau} \sin(k\tau + \alpha).$$

При большом демпфировании ( $\nu > 1$ ) корни уравнения (5.1.31) - действительные, отрицательные

$$\lambda_1 = -\nu - \sqrt{\nu^2 - 1},$$

$$\lambda_2 = -\nu + \sqrt{\nu^2 - 1}.$$

Общее решение однородного уравнения представляет собой суперпозицию убывающих экспонент

$$q = C_1 e^{-|\lambda_1|t} + C_2 e^{-|\lambda_2|t}.$$

Отметим, что при очень большом демпфировании ( $\nu \gg 1$ ) имеем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2\nu}, \quad |\lambda_1| \ll 1,$$

$$\lambda_2 = -2\nu, \quad |\lambda_2| \gg 1,$$

и одна из экспонент убывает очень медленно, а другая – очень быстро.

Приведем уравнение движения (5.1.29) к нормальной форме Коши. Вводя обозначение  $\dot{q} = v$ , преобразуем уравнение (5.1.29) к виду

$$\begin{aligned} \dot{q} &= v \\ \dot{v} &= -q - 2\nu v + Q(\tau) \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

или

$$\dot{x} = Mx + X(\tau),$$

где  $x = \begin{bmatrix} q \\ v \end{bmatrix}$ ,  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\nu \end{bmatrix}$ ,  $X(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ Q(\tau) \end{bmatrix}$ .

Начальные условия (2.1.30) преобразуются к виду

$$x|_{\tau=0} = x_0.$$

### **Задание на проведение эксперимента**

1. Составить программу для ЭВМ, реализующую однопараметрическое семейство методов численного решения задачи Коши для линейного осциллятора.

2. Исследовать качество работы явной схемы метода Эйлера, метода средней точки, неявной схемы метода Эйлера в задаче о свободных движениях линейного осциллятора при различных значениях относительного затухания.

3. Исследовать качество работы указанных выше трех алгоритмов в задаче о вынужденных колебаниях осциллятора с малым демпфированием при действии на него гармонической вынуждающей силы. Подробно изучить резонансную область.

*Примечание.* Оценку качества работы приближенных методов численного интегрирования целесообразно проводить не по значениям обобщенной координаты и обобщенной скорости в данный момент времени в точном и приближенном решениях, а по таким характеристикам колебательного процесса, как частота и амплитуда колебаний, скорость изменения амплитуды в задаче о свободных колебаниях, амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики в задаче о вынужденных колебаниях под действием гармонических сил.

### **Комментарии к работе**

Работа посвящена исследованию методов интегрирования  $\alpha$ -семейства. В качестве «подопытного кролика» выбран линейный осциллятор. Такой выбор обусловлен тем, что его поведение при различных значениях демпфирования, а так же под действием

гармонической силы хорошо известны и изучаются как в курсе общей физики в школе, так и в курсах общей физики, теории колебаний и теоретической механики в университете.

Таким образом, объект на который «воздействует» метод численного моделирования хорошо известен и необходимо исследовать последствия такого воздействия.

Так как изложенная в пособии теория говорит о принципиальной разнице в моделировании консервативных, неконсервативных, колебательных и сильно демпфированных систем, то при исследовании необходимо изучить поведение численной модели всех этих систем. Линейный осцилятор позволяет сделать это меняя только один параметр  $\nu$ . При  $\nu = 0$  осцилятор является консервативной системой, при  $0 < \nu < 1$  – колебательной, неконсервативной. При  $1 \leq \nu$  – не колебательной.

Вместе с тем, необходимо помнить, что высота резонансного пика – одного из основных признаков линейной колебательной системы равна приблизительно  $\frac{1}{2\nu}$  (при безразмерной частоте собственных колебаний равной 1). Следовательно, уже при  $\nu = 0,5$  никакого пика у резонансной кривой не будет и систему можно считать практически не колебательной. Часто используемое в технике граничное значение, разделяющее колебательные и не колебательные системы  $\nu = 0,4$ . При таком демпфировании происходит «поддержка амплитудно-частотной характеристики резонансом». То есть она остается постоянной в более широком частотном диапазоне, что используется в акселерометрах и других вибродатчиках для увеличения их рабочего частотного диапазона, как это показано на рис. 17.



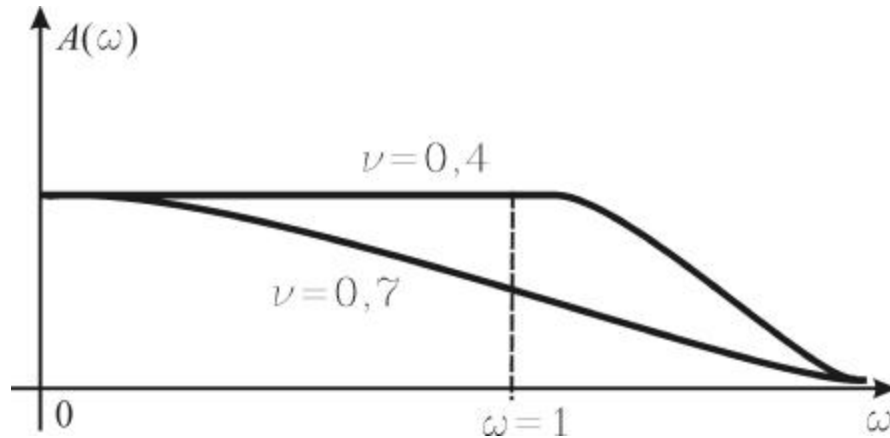


Рис. 17 Амплитудно-частотные характеристики при значениях демпфирования больше 0,4.

Таким образом, границы демпфирования, соответствующего колебательной системе  $0 < \nu \leq 0,4$ .

При исследовании необходимо, очевидно, попытаться получить все те эффекты, о которых написано в пособии. В частности отрицательное и положительное демпфирование у консервативных систем, мнимую колебательность и медленное затухание колебаний у систем с большим демпфированием, изменения скорости убывания собственных колебаний в колебательных системах с малым демпфированием.

Так как демпфирование сказывается, прежде всего, на скорости потерь энергии, то целесообразно в случае консервативной системы получить либо зависимость энергии от времени, либо амплитуды колебаний от времени, что, в данном случае, одно и то же, так как энергия пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Определение амплитуды гармонических колебаний, по дискретным экспериментальным данным часто является не тривиальной задачей. Из-за того, что максимумы и минимумы синусоиды никогда точно не попадают на момент измерения, применяют методы аппроксимации или гармонический анализ. В нашем случае, в отличие от реальных измерений можно одновременно измерять весь вектор состояния, то

есть скорость и перемещение. Собственная частота единичная, поэтому амплитуда

$$A = \sqrt{v^2 + q^2}.$$

В случае колебательной системы с малым демпфированием целесообразно построить зависимость логарифма энергии колебаний от времени. Наклон такой зависимости должен быть, очевидно  $-2\nu$ .

Наконец, для выявления колебательности необходимо построить зависимость  $q(t)$ . При этом необходимо помнить, что корни у систем с большим демпфированием сильно отличаются, следовательно, колебательность будет наблюдаться только по самому большому корню равному  $-2\nu$ . Обще решение будет состоять из двух слагаемых и необходимо выбрать начальные условия так, чтобы слагаемое, соответствующее этому корню было больше слагаемого соответствующего маленькому корню, иначе колебательность на графике видна не будет.

Исследование режима вынужденных колебаний представляет отдельную тему. Дело в том, что устойчивость системы, которую определяют собственные числа, не зависит от правых частей. Следовательно, никакой информации о вносимом методами демпфирования мы получить не должны. И это действительно так. Практически при любой частоте возбуждения, потоки энергии со стороны вынуждающей силы значительно больше рассеяния ее при демпфировании, поэтому изменения в этом рассеянии будут не видны.

Вместе с тем линейный осцилятор имеет уникальную особенность. В зависимости от частоты возбуждения он может проявлять себя как только пружинка, укрепленная на основании, только демпфер или только инерционная масса, висящая в пространстве, как это изображено на рис. 18.

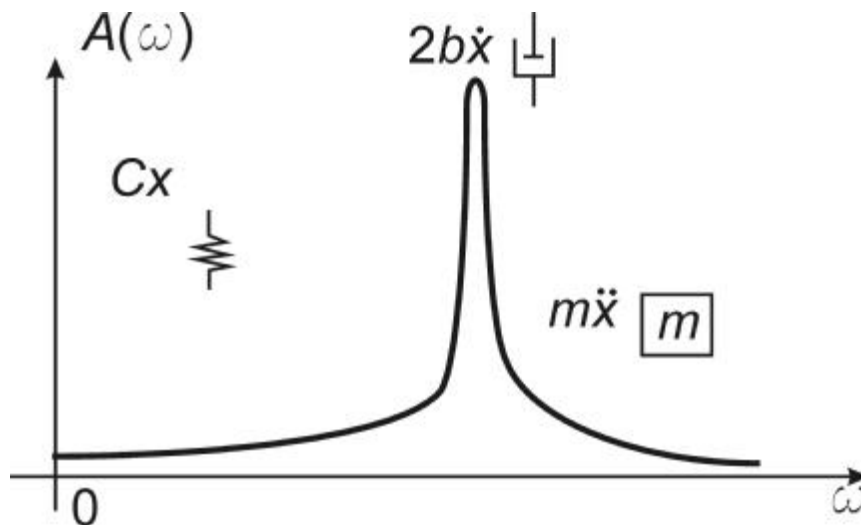


Рис. 18. Упрощенные модели линейного осцилятора при различных режимах возбуждения: дорезонансном (пружина), резонансном (демпфер) и зарезонансном (масса)

При низкой частоте вынуждающей силы она работает в основном против сил упругости, а силы инерции и демпфирования имеют значительно меньшую величину. Этому режиму соответствует горизонтальный участок амплитудно-частотной характеристики осцилятора. Его способность не чувствовать свою массу, которая уравновешивается силами упругости используется в акселерометрах, которые как раз конструируются так, чтобы рабочий диапазон лежал в до-резонансном режиме.

При высокой частоте возбуждения (зарезонансный режим) основной силой внутри осцилятора является сила инерции грузика, пружинка не чувствуется. Это хорошо видно по обратной квадратичной зависимости на амплитудно-частотной характеристике и сдвигу фаз  $-180^\circ$  характерному для работы сил инерции. Это свойство осцилятора также используется в датчиках виброперемещений и в сейсмодатчиках, где собственная частота колебаний груза составляет сотые доли Гц, а масса груза – тонны. В результате груз весит в пространстве, а колеблания основания пружинки записываются на осциллограмме.

Наконец в резонансном режиме, сила инерции уравновешивается силой упругости, которая действует в противофазе и возбуждающая сила работает только против сил вязкого трения, вызывая рост амплитуды колебаний, так как эти силы обычно невелики.

Таким образом, при вынужденных колебаниях линейный осциллятор может быть пружинкой, демпфером и грузом, в зависимости от частоты возбуждения. Построив амплитудно-частотную характеристику с помощью численного моделирования вынужденных колебаний осциллятора, по искажениям, которые метод интегрирования вносит в ее форму можно сказать не только об изменениях в демпфировании, которые вносит метод интегрирования, но и построить механическую модель метода, в виде грузика на пружинке с демпфированием, соединенно последовательно с линейным осциллятором.

При моделировании вынужденных колебаний возникает проблема выделения частного решения. И координата и скорость будут содержать два колебательных процесса: сопутствующие колебания и вынужденные колебания. Даже в нерезонансных режимах, когда частота у них будет различна разделить эти колебания сложно.

Сопутствующие колебания являются затухающими, вопрос только в том через какое время они затухнут. Практический ответ дает теория автоматического управления, считается, что переходный процесс затухает за время  $3\tau$ , где  $\tau$  – характерное время экспоненциального множителя процесса  $\exp(-t/\tau)$ . Такой подход связан с тем, что  $\exp(-3) = 1/20$  с большой точностью, а убывание переходного процесса в 20 раз считается практически достаточным.

В нашем случае  $\tau = \frac{1}{\nu}$ , поэтому измеряя амплитуду колебаний через время  $3\tau = \frac{3}{\nu}$ , можно быть уверенным, что сопутствующие

колебания не будут искажать собственных. Единственная проблема заключается в том, что методы интегрирования уменьшают или увеличивают демпфирование осцилятора. Поэтому, время ожидания необходимо увеличивать для явного и уменьшать для неявного методов.

Можно поступить еще проще. Так как вынужденные колебания – гармонический процесс с частотой вынуждающей силы  $\omega$ , то перемещения

$$q = A \sin(\omega t + \Delta\varphi),$$

скорость

$$v = A\omega \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

Тогда амплитуда колебаний

$$A = \sqrt{q^2 + \left(\frac{v}{\omega}\right)^2}$$

Сопутствующие колебания будут вносить искажения в результаты расчетов амплитуды, пока их амплитуда не станет значительно меньше  $A$ . На временном графике зависимости  $A(t)$  при затухании сопутствующих колебаний будут наблюдаться пульсации. Установившееся значение  $A(t)$  – означает, что переходный процесс закончился и можно считать это значение амплитудой вынужденных колебаний.

## 5.2. РАБОТА № 2. ТЯЖЕЛЫЙ СИММЕТРИЧНЫЙ ВОЛЧОК С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

### Цель работы

Анализ одношаговых методов численного решения задачи Коши для линейного осциллятора с двумя степенями свободы и изучение движения волчка при различных начальных условиях.

### Математическая формулировка задачи

*Методы интегрирования повышенной точности.* Для увеличения точности численного интегрирования дифференциальных уравнений применяют методы более высокого порядка аппроксимации, и соответственно точности. Причем сам порядок точности ничего не говорит о величине ошибки интегрирования. Он характеризует только скорость убывания этой ошибки при уменьшении шага интегрирования при сохранении интервала интегрирования неизменным. То есть предполагается, что пропорционально уменьшению величины шага возрастает количество шагов интегрирования.

Развитием явной схемы Эйлера являются методы второго и четвертого порядка точности, для которых приближенное решение уравнения

$$\dot{y} = \lambda y. \quad (5.2.1)$$

имеет вид

$$y_{n+1} = \rho(h\lambda)y_n, \quad (5.2.2)$$

где

$$\rho(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 \quad (5.2.3)$$

в методе второго порядка точности и, соответственно,

$$\rho(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4 \quad (5.2.4)$$

в методе четвертого порядка точности.

Развитием метода трапеций является метод, для которого величина  $\rho(h\lambda)$  определяется формулой

$$\rho(h\lambda) = \frac{1 + \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{12}(h\lambda)^2}{1 - \frac{1}{2}h\lambda + \frac{1}{12}(h\lambda)^2} \quad (5.2.5)$$

Метод имеет четвертый проядок или степень точности.

Развитием неявной схемы метода Эйлера являются методы со следующими характеристиками:

Метод второй степени точности

$$\rho(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2}; \quad (5.2.6)$$

Метод четвертой степени точности

$$\rho(h\lambda) = \frac{1}{1 - h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 - \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4}. \quad (5.2.7)$$

Практическая реализация таких характеристик осуществляется методами Рунге-Кутты. Применительно к общему случаю нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{X} = f(X, t), \quad (5.2.7^*)$$

где  $X = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ ,  $f(X, t) = [f_1(X, t), \dots, f_n(X, t)]^T$ , при начальных условиях  $X(t_0) = X_0$ , методы Рунге-Кутты описываются следующей формулой:

$$X_{n+1} = X_n + h \sum_{i=1}^S b_i k_i, \quad (5.2.8)$$

$$k_i = f(X_n + h \sum_{j=1}^S a_{ij} k_j, t_n + c_i h), \quad i = 1, 2, \dots, S \quad (5.2.9)$$

где  $X_n$  – приближенное значение  $X(t_n)$ ;  $h$  – шаг интегрирования. Вещественные параметры  $b_i, c_i, a_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, S$  определяют конкретный метод. Метод (5.2.8), (5.2.9) называется  $S$ -этапным (или  $S$ -стадийным), так как он основан на вычислении функции  $f(X, t)$  в  $S$  точках.

Компактное представление метода Рунге-Кутты дается таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|c} C & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

или

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & \cdot & \cdot & a_{1S} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_S & a_{S1} & \cdot & \cdot & a_{SS} \\ \hline & b_1 & \cdot & \cdot & b_S \end{array}$$

Если  $a_{ij} = 0$  при  $j > i$ , метод является явным, при этом формулы (5.2.9) задают процедуру последовательного вычисления коэффициентов  $k_i$  через свои предшествующие значения  $k_l$ ,  $l < i$ . В



противном случае метод является неявным и соотношения (5.2.8, 5.2.9) представляют собой систему уравнений относительно неизвестных величин  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, S$ .

Методы, обладающие характеристиками (5.2.3-5.2.7) могут быть реализованы не единственным способом.

Метод с величиной  $\rho$ , определяемой формулой (5.2.3) может быть реализован, например, методом Эйлера-Коши, заданием следующей таблицы Бутчера

0	0	0
1	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Метод с величиной  $\rho$ , определяемой формулой (5.2.4) может быть реализован методом Рунге-Кутты, заданием следующей таблицы Бутчера:

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	0	1
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Метод с величиной  $\rho$ , определяемой формулой (5.2.5) может быть реализован методом Гаусса-Лежандра, заданием следующей таблицы Бутчера:

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Метод с величиной  $\rho$ , определяемой формулой (5.2.6) может быть реализован методом Лобатто, заданием следующей таблицы Бутчера:

0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Метод с величиной  $\rho$ , определяемой формулой (5.2.7) может быть реализован методом со следующей таблицы Бутчера:

0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

На основании проведенного в первой части пособия анализа можно дать определенные общие рекомендации по применению методов численного интегрирования повышенной точности.

Явные методы целесообразно использовать в системах с небольшим разбросом собственных значений лианеризованной системы, размерностью до 100 при наличии демпфирования среднего уровня.

Неявные методы типа метода трапеций (или, как их еще называют, явно-неявные) следует применять при моделировании консервативных и близких к ним систем. В этом случае при большом разбросе собственных значений применение других методов может дать принципиально не правильное численное решение.

Неявные методы типа неявной схемы Эйлера разумно применять при моделировании систем с большим демпфированием, в которых колебательные процессы не играют решающей роли. К этому типу принадлежат задачи теории теплопроводности, теории ползучести и так далее. Здесь оказывается целесообразным применять также и многошаговые методы интегрирования.

Имеется, однако, целый класс систем, относительно которых невозможно дать общие рекомендации. Это неустойчивые системы, находящиеся в режиме устойчивых автоколебаний, или просто неустойчивые системы, или системы теряющие устойчивость. Для них любой из методов может вносить критические в смысле адекватности решения искажения и выбор метода интегрирования при моделировании таких систем возможен только после отдельного исследования.

Поясним возможные трудности на изображениях областей устойчивости методов.

На рис. 19-23 приведены области устойчивости для методов 5.2.3.-5.2.7 и изображено положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимого корня (точка 5).

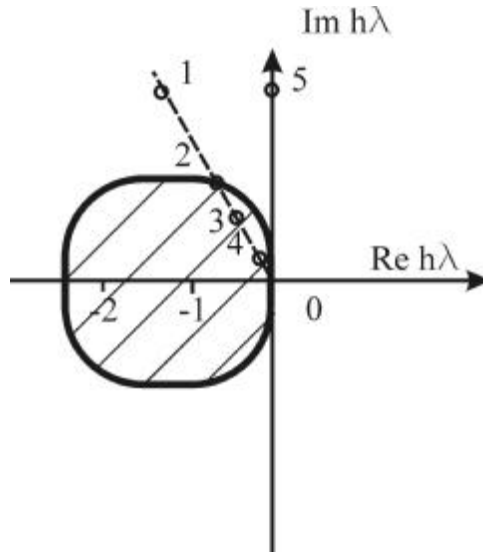


Рис. 19. Область устойчивости метода Эйлера-Коши (5.2.3) и положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимого корня (точка 5)

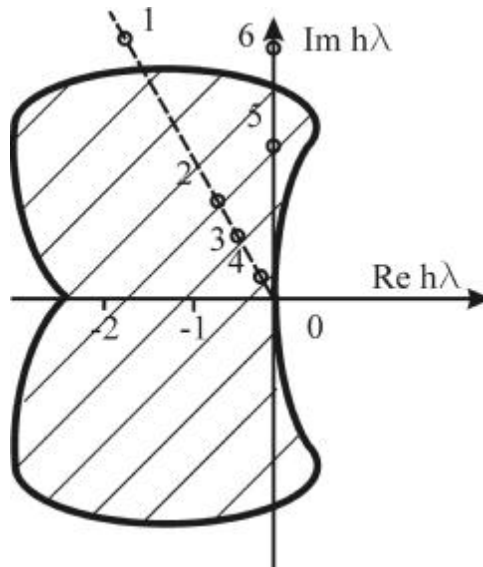


Рис. 20. Область устойчивости метода Рунге-Кутты четвертого порядка (5.2.4) и положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимых корней (точки 5, 6)

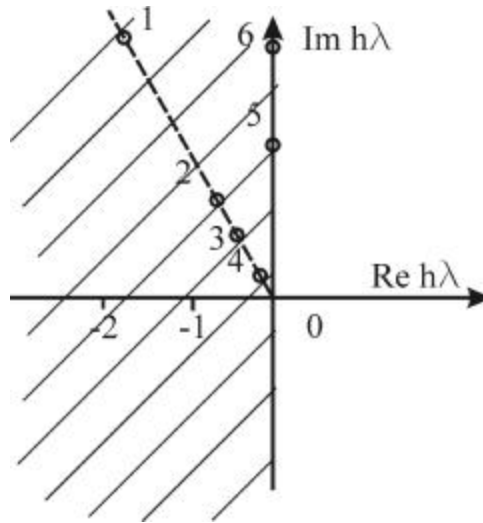


Рис. 21. Область устойчивости метода Гаусса-Лежандра двух-стадийного четвертого порядка точности (5.2.5) и положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимых корней (точки 5, 6)

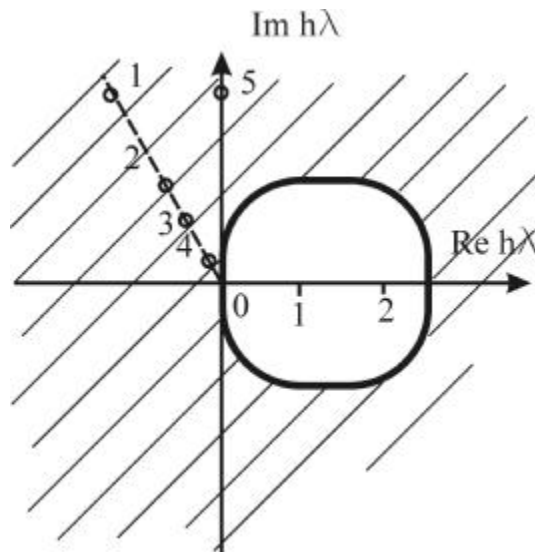


Рис. 22. Область устойчивости метода Лобатто двух-стадийного второго порядка точности (5.2.6) и положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимого корня (точка 5)

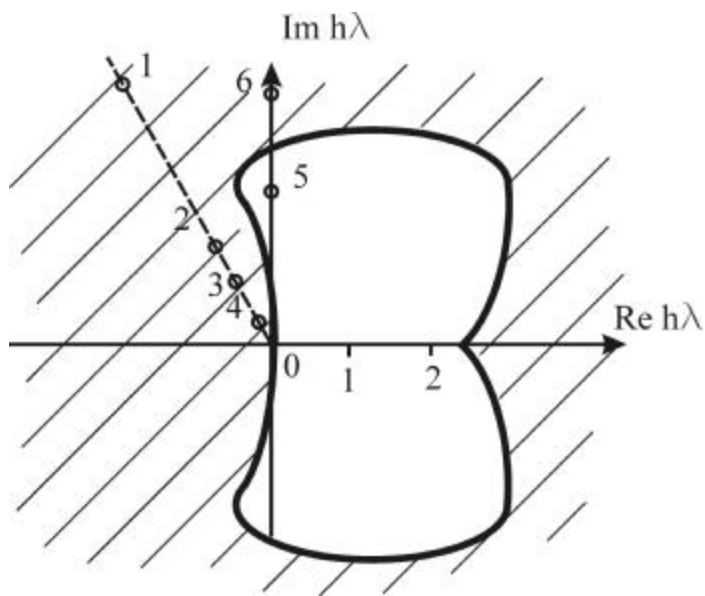


Рис. 23 Область устойчивости неявного метода четвертого порядка (5.2.7) и положение корней интегрируемой системы  $h\lambda$  слабо демпфированной системы при различных  $h$  (точки 1-4) и чисто мнимых корней (точки 5, 6)

Метод Эйлера-Коши обладает практически такими же особенностями, что и явный метод Эйлера. Для консервативных систем он вносит отрицательное демпфирование при любой величине шага интегрирования, для слабо-демпфированных систем может в зависимости от шага уменьшать реальное депфирование до отрицательных значений, при этом неустойчивая система при любой величине шага будет моделироваться методом как неустойчивая.

Метод Гаусса-Лежандра обладает такими же особенностями, что и метод средней точки. Он не вносит искажений в депфирование для консервативных и слабо-демпфированных систем, при этом неустойчивая система при любой величине шага будет моделироваться методом как неустойчивая.

Четырехстадийный метод Рунге-Кутта обладает существенными особенностями. Для консервативных систем он вносит положительное демпфирование отрицательное при маленькой шаге и

отрицательное демпфирование при большом шаге. Это дает возможность получить, пусть и не совсем адекватное, но устойчивое решение для консервативных систем и за счет величины шага добиться нужной точности этого решения. Такая специфическая особенность области устойчивости обеспечивает ему звание «универсального метода интегрирования», к которому необходимо относиться с большой долей осторожности, так как неустойчивые системы при малых шагах этот метод может также интегрировать как устойчивые. Следовательно, несмотря на то, что метод типа явного, он вносит в слабо демпфированные и консервативные системы положительное демпфирование.

Метод Лобатто обладает практически такими же особенностями, что и неявный метод Эйлера. Для консервативных систем он вносит положительное демпфирование при любой величине шага интегрирования, для слабо-демпфированных систем может в зависимости от шага увеличивать реальное демпфирование в разной степени, при этом неустойчивая система в зависимости от величины шага может моделироваться как устойчивая и как неустойчивая. Необходимо отметить, что в этом случае, в отличие от явного метода при уменьшении шага устойчивость будет теряться.

Четырехстадийный неявный метод также обладает существенными особенностями. Для консервативных систем он, в зависимости вносит положительное демпфирование отрицательное при большом шаге и отрицательное демпфирование при маленьком. Что на первый взгляд парадоксально, шаг уменьшил – система стала неустойчивой и никакой сходимости не получить, то же самое касается и слабо демпфированных систем. Таким образом этот неявный метод делает устойчивую систему неустойчивой, внося отрицательное демпфирование. Неустойчивые системы этот метод может также интегрировать как неустойчивые при малых шагах, а при больших – как устойчивые. Если применять его к интегрированию сильно неустойчивых систем совершающих автоколебания

триггерного типа, то метод может обеспечить одновременно слабую потерю устойчивости для устойчивых маленьких собственных чисел и существенную добавку к устойчивости для больших неустойчивых собственных чисел, так что вместо автоколебаний будет наблюдаться слабое, но ничем не ограниченное увеличение координат системы. Следовательно, несмотря на то, что метод типа неявного, он вносит в слабо демпфированные и консервативные системы отрицательное демпфирование.

### **Математическая модель волчка.**

Описание положения волчка можно проводить по-разному. В классических работах, при изучении произвольных движений волчка, обычно используются углы Эйлера: угол прецессии  $\psi$ , угол нутации  $\theta$  и угол собственного вращения  $\varphi$ . Однако при изучении малых колебаний оси волчка вблизи вертикали, углы Эйлера не очень удобны, так как малым отклонениям оси волчка от вертикали соответствуют большие значения угла прецессии  $\psi$ . Это не дает возможности провести линеаризацию уравнений, что затрудняет построение решений уравнений и их анализ. Здесь предпочтительнее определять ориентацию оси волчка с помощью углов, которые остаются малыми в течение всего времени движения.

Рассмотрим движения оси волчка вблизи вертикали. Положение оси волчка определяем с помощью кардановых углов  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 24).

Проекция вектора угловой скорости волчка  $\omega$  на оси  $Oxyz$ , полусвязанные с волчком, определяются формулами

$$\begin{cases} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos \beta \\ \omega_y &= \dot{\beta} \\ \omega_z &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (5.2.10)$$



Кинетическая энергия волчка

$$T = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2). \quad (5.2.11)$$

Обозначая  $J_x = J_y = A$ ,  $J_z = C$  и используя (5.2.10), получим вместо (5.2.11)

$$T = \frac{1}{2}(A(\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + C(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\varphi})^2). \quad (5.2.12)$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = mgl \cos \alpha \cos \beta, \quad (5.2.13)$$

где  $l$  - расстояние от точки опоры до центра масс волчка.

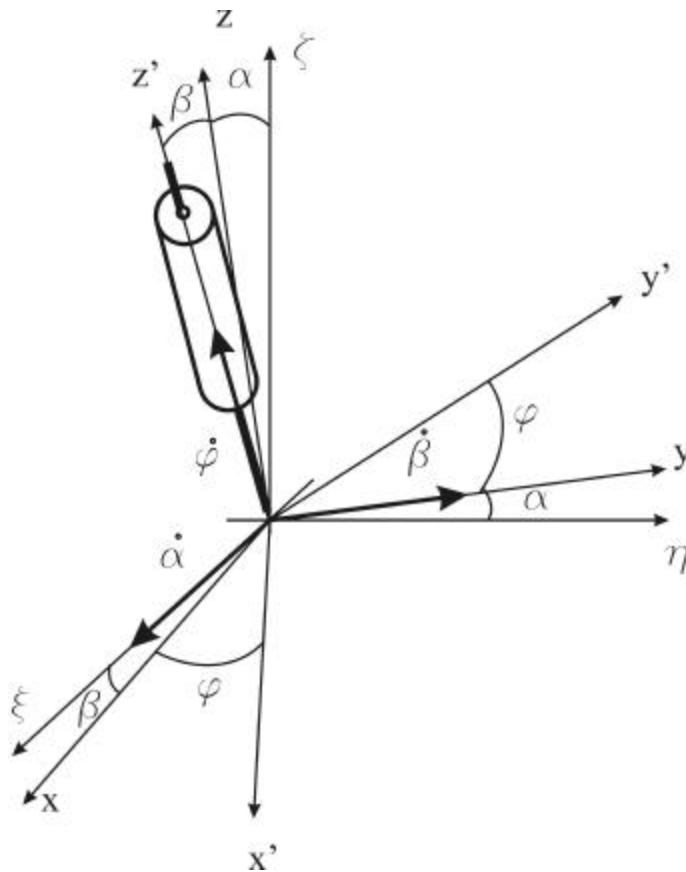


Рис. 24. Положение волчка. Кардановы углы

Координата  $\phi$  здесь является циклической; соответствующий интеграл уравнений движения имеет вид

$$C(\dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\phi}) = p_{\phi_0} \equiv C\omega_{z0}. \quad (5.2.14)$$

Наличие циклического интеграла (5.2.14) позволяет исключить циклическую скорость  $\dot{\phi}$  и построить уравнения движения в форме Рауса. Функция Рауса имеет вид

$$\begin{aligned} R &= (T - p_{\phi_0} \dot{\phi}) \Big|_{\dot{\phi} = \frac{p_{\phi_0}}{C} - \dot{\alpha} \sin \beta} = \\ &= \frac{1}{2} A(\dot{\alpha} \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + p_{\phi_0} \dot{\alpha} \sin \beta + const. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

В задаче о малых колебаниях оси волчка функция Рауса упрощается

$$R = \frac{1}{2} A(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + p_{\phi_0} \dot{\alpha} \beta + const. \quad (5.2.16)$$

Упрощается и выражение потенциальной энергии

$$\Pi = -\frac{1}{2} mgl(\alpha^2 + \beta^2) + const. \quad (5.2.17)$$

Уравнения Рауса для позиционных (нециклических) координат  $\alpha, \beta$  имеют ту же структуру, что и уравнения Лагранжа, причем роль кинетической энергии играет функция Рауса

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial R}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial R}{\partial \beta} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}.\end{aligned}\tag{5.2.18}$$

В соответствии с выражениями (5.2.16), (5.2.17) имеем

$$\begin{aligned}A\ddot{\alpha} + p_{\varphi_0}\dot{\beta} - mgl\alpha &= 0; \\ A\ddot{\beta} - p_{\varphi_0}\dot{\alpha} - mgl\beta &= 0.\end{aligned}\tag{5.2.19}$$

Уравнение (5.2.19) содержит характерные слагаемые, линейно зависящие от скоростей и имеющие антисимметричную матрицу коэффициентов, так называемые гироскопические силы. Отметим, что при отсутствии гироскопических сил равновесие волчка, конечно, неустойчиво.

Приведем уравнения (5.2.19) к безразмерному виду, вводя безразмерное время  $\tau$  по формуле  $\tau = \sqrt{\frac{mgl}{A}}t$ . Вместо выражения (5.2.19) имеем

$$\begin{aligned}\alpha'' + 2\nu\beta' - \alpha &= 0; \\ \beta'' - 2\nu\alpha' - \beta &= 0,\end{aligned}\tag{5.2.20}$$

где  $\nu = \frac{p_{\varphi_0}}{2\sqrt{mglA}} \equiv \frac{C\omega_{z0}}{2\sqrt{mglA}}$  – безразмерный параметр, пропорциональный циклическому импульсу  $p_{\varphi_0} \equiv C\omega_{z0}$ . Штрихом обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ .

Полученную систему можно свести к одному уравнению для комплексной переменной  $\gamma = \alpha + i\beta$

$$\gamma'' - i2\nu\gamma' - \gamma = 0.\tag{5.2.21}$$

Общее решение уравнения (5.2.12) имеет вид

$$\gamma = \tilde{D}_1 e^{i\omega_1 \tau} + \tilde{D}_2 e^{i\omega_2 \tau}, \quad (5.2.22)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_1 &= v \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}}\right); \\ \omega_2 &= v \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{v^2}}\right). \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

Здесь предполагается, что начальная угловая скорость волчка велика, так что  $v > 1$ . Отметим, что при очень большой начальной угловой скорости волчка, что соответствует  $v \gg 1$ , одна из безразмерных угловых скоростей становится малой,  $\omega_1 \approx \frac{1}{2v}$ , а другая – большой,  $\omega_2 \approx 2v$ .

Представляя комплексные постоянные  $\tilde{D}_j$  в виде  $\tilde{D}_j = D_j e^{i\delta_j}$  ( $j=1,2$ ), имеем вместо выражения (5.2.22)

$$\begin{aligned} \gamma &= D_1 e^{i(\omega_1 \tau + \delta_1)} + D_2 e^{i(\omega_2 \tau + \delta_2)} = \\ &= D_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2) + \\ &+ i(D_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2)) \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

или

$$\begin{aligned} \alpha &= D_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2); \\ \beta &= D_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2). \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

Декартовы координаты центра масс  $\xi_c, \eta_c$  в задаче о малых колебаниях определяются формулами

$$\begin{aligned} \xi_c &= l\beta = l(D_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2)); \\ \eta_c &= -l\alpha = -l(D_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2)). \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

При  $D_2 = 0$  центр масс движется по окружности радиуса  $ID_1$  с угловой скоростью  $\omega_1$  (медленная прецессия), при  $D_1 = 0$  – по окружности радиуса  $ID_2$  с угловой скоростью  $\omega_2$  (быстрая прецессия). В общем случае эти два движения накладываются.

Характер движения существенно зависит от соотношения между амплитудами  $D_1$  и  $D_2$ . В случае  $D_1 \gg D_2$  движение близко к медленной прецессии, причем на медленное прецессионное движение накладываются быстрые нутационные колебания.

Типичные траектории центра масс, полученные при различных начальных условиях, изображены на рис. 25.

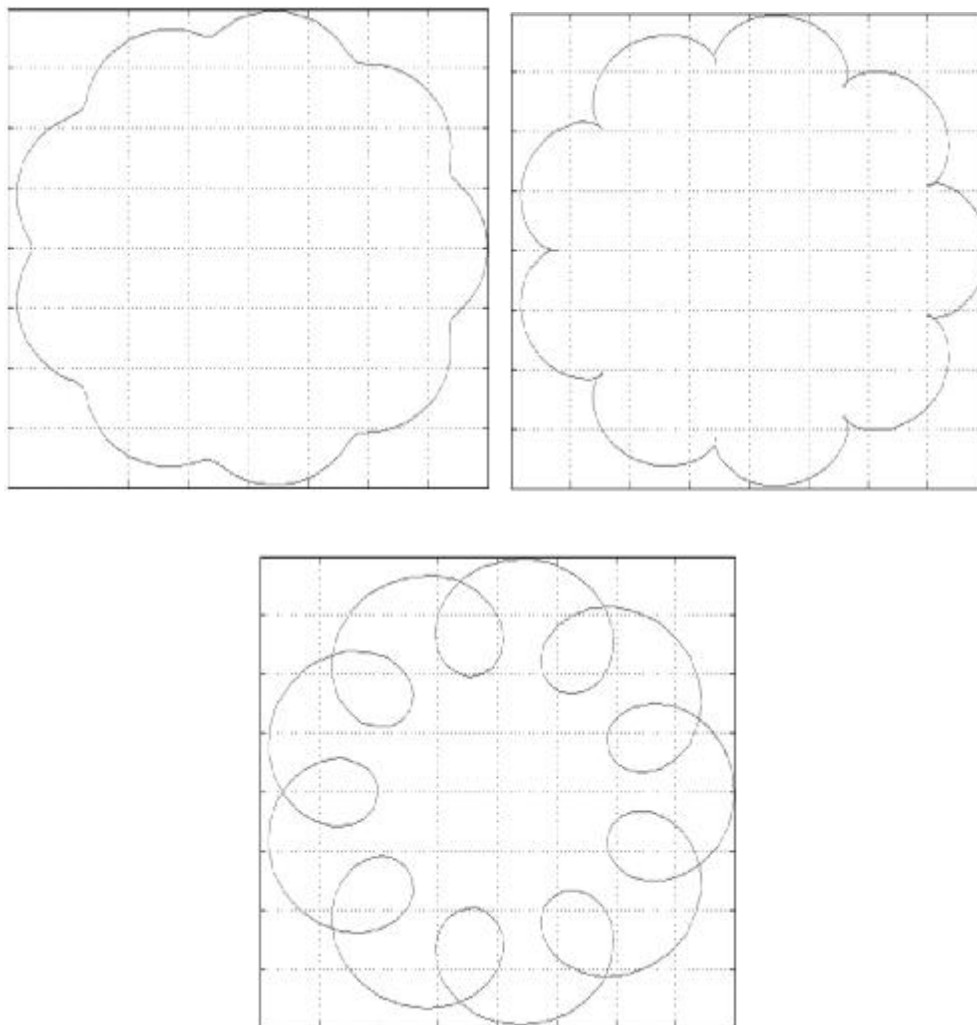


Рис. 25. Траектории центра масс при  $D_2 \leq D_1$

В случае, когда  $D_2 \gg D_1$ , на быстрое прецессионное движение накладываются быстрые нутационные колебания. Типичная траектория центра масс показана на рис. 26 центр масс движется по кривой, похожей на эллипс, причем оси эллипса поворачиваются.

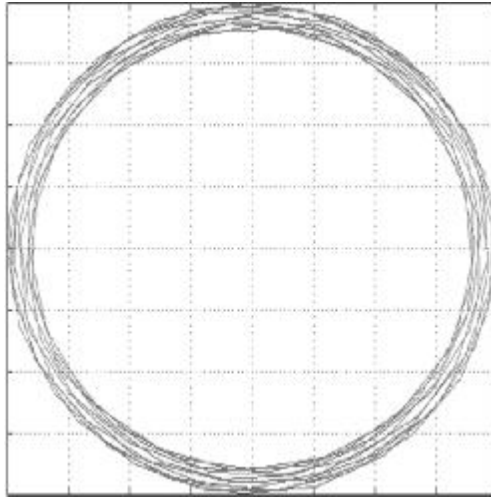


Рис. 26 Траектория центра масс при  $D_2 \gg D_1$

### **Задание на проведение эксперимента**

1. Составить программу численного интегрирования уравнений Рауса в задаче о движении волчка, используя подпрограммы интегрирования систем дифференциальных уравнений, имеющихся в библиотеке ЭВМ.

2. Исследовать качество работы методов численного интегрирования в режимах быстрой и медленной регулярной прецессии волчка, выбрать один из этих методов в качестве основного.

3. Пользуясь выбранным методом, исследовать движение волчка при различных начальных условиях, получить характерные траектории движения волчка.

## Комментарии к работе

Предлагаемое исследование требует обоснованного выбора метода интегрирования, как и в любом реальном численном исследовании динамических систем. Поэтому сначала необходимо провести исследование методов интегрирования повышенной точности, затем выбрав самый адекватный рассматриваемой задаче метод, провести исследование режимов нутационных колебаний волчка.

Исследование работы методов интегрирования удобнее всего проводить в режимах регулярной прецессии волчка. В режиме быстрой регулярной прецессии

$$\begin{aligned}\alpha &= D_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2); \\ \beta &= D_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2).\end{aligned}$$

В режиме медленной регулярной прецессии

$$\begin{aligned}\alpha &= D_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1); \\ \beta &= D_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1).\end{aligned}$$

Следовательно и в том и в другом случае центр масс волчка описывает окружность или

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \text{const}(t). \quad (5.2.27)$$

Проверка этого следствия консервативности системы является наиболее простым способом контроля качества работы методов интегрирования, так как углы  $\alpha, \beta$  получаются как компоненты вектора состояния.

Изменения радиуса траектории центра масс волчка также будут хорошо заметны. Дело в том, что при построении колебательного процесса на графике должен уместиться весь размах колебаний, поэтому малые изменения амплитуды могут быть незаметны. Это касается и фазового портрета движения системы. С другой стороны, отклонения от постоянного уровня можно легко контролировать, так как масштаб графика будет определяться величиной именно этих отклонений. Так как квадрат радиуса траектории движения центра масс волчка пропорционален его полной энергии, то контролируя (5.2.27) мы фактически контролируем изменения энергии волчка.

При моделировании регулярных прицессий методами интегрирования высоких порядков точности можно наблюдать некоторые необычные эффекты, связанные с особенностью рассматриваемой задачи. Методы второго порядка точности будут вести себя одинаково при любом шаге интегрирования. Так как явный метод добавляет энергию, а неявный отнимает, то мы получим во всех режимах прицессий уменьшение радиуса траектории волчка при моделировании с помощью неявного метода и увеличение – при моделировании с помощью явной процедуры.

Это уже противоречит физической сути объекта. Если мы учтем демпфирование в реальном волчке, то при положительном демпфировании (неявный метод) он будет тормозиться и упадет (радиус траектории увеличится), а при отрицательном демпфировании – закрутится быстрее и превратится в «спящий волчок» с нулевым радиусом прицессии.

Такое поведение связано с тем, что основные потери возникают при вращении волчка относительно собственной оси. Скорость такого вращения гораздо больше скорости прицессионных движений, поэтому волчок будет останавливаться или ускоряться прежде всего изменяя скорость собственного вращения.

В рассматриваемой модели волчка для снижения размерности задачи из уравнений движения исключен циклический интегралл



(уравнения Рауса). Поэтому метод не может подействовать на эту часть энергии волчка и отбирает или добавляет ее там, где это допускается уравнениями Рауса. Следовательно, искажается именно энергия прицессионных движений и нутационных колебаний. С этим и связаны парадоксальные результаты применения методов интегрирования.

Еще более интересной получается картина в методах четвертого порядка точности, там все наоборот, при малых шагах явный метод добавляет демпфирование, а неявный – отнимает, вернее добавляет условное отрицательное демпфирование. Так как в методах четвертого порядка из-за специфической формы области устойчивости все зависит от величины  $|h\lambda|$ , то всегда возможно подобрать шаг интегрирования, при котором в зависимости от режима регулярной прицессии будет меняться знак демпфирования, добавляемого методом.

Методы порядка точности  $n$  имеют ошибку интегрирования порядка  $O(h^n)$ , сама эта запись, к сожалению, говорит только о том, что норма ошибки интегрирования уравнений системы на отрезке  $[t_0, t_1]$  при уменьшении шага интегрирования убывает пропорционально  $h^n$ . О величине абсолютной ошибки по порядку точности метода судить нельзя. Поэтому, при одном и том же шаге интегрирования  $h$ , ошибка интегрирования методом четвертого порядка точности может быть выше, чем при интегрировании методом второго порядка точности. Для гладких функций правых частей это не так. Поэтому, при выполнении работы ошибки методов четвертого порядка точности будут значительно меньше, чем у методов второго порядка точности, следовательно, и демпфирование, вносимое методами в консервативную систему, будет значительно меньше, вместе с тем, тенденция к накоплению ошибки одного знака все равно есть.

Необходимо обратить внимание, на то, что локальная ошибка интегрирования на каждом шаге имеет порядок на единицу выше. Например, для явного метода первого порядка точности

$$\begin{aligned} X(t_{k+1}) &= X(t_k + h) = X(t_k) + h\dot{X}(t_k) + \frac{1}{2}h^2\ddot{X}(t_k) + \dots = \\ &= X(t_k) + hf(X_k, t_k) + O(h^2), \\ X_{k+1} &= X_k + hf(X_k, t_k), \\ \Delta_{k+1} &= X(t_{k+1}) - X_{k+1} = O(h^2). \end{aligned}$$

на каждом шаге отбрасывается остаток ряда величиной  $O(h^2)$ . Данный остаток характеризует локальную ошибку, которая накапливается прямо пропорционально числу шагов интегрирования. Так как при неизменном промежутке интегрирования  $[t_0, t_1]$  число шагов пропорционально  $(t_1 - t_0)/h$ , то ошибка на интервале интегрирования имеет порядок  $O(h^2)(t_1 - t_0)/h = O(h)$ , то есть на единицу меньше, чем порядок локальной ошибки. Эту особенность методов интегрирования необходимо учитывать при использовании различных процедур автоматического выбора шага. Локальная ошибка может быть во много раз меньше ошибки на промежутке, особенно при большом числе шагов. Данный факт может привести к значительным погрешностям при моделировании, так как контроль точности работы метода производится в автоматических процедурах по величине локальной ошибки. В этих условиях на всем интервале интегрирования могут возникнуть весьма существенные ошибки, которые к тому же не будут контролироваться программным обеспечением. То есть неопытный исследователь может подумать, что все хорошо, тем более что в этом стараются убедить нас создатели различных «тяжелых кадров» для моделирования динамических систем.

Возникает вопрос, как можно оценить абсолютную ошибку интегрирования, не пользуясь точным решением (его, как правило, не

существует, иначе методы численного интегрирования были бы не нужны).

Метод  $n$ -го порядка точности гарантирует нам решение  $\hat{X}(t, h)$ , которое отличается от точного решения  $X(t)$  на  $O(h^n)$ , следовательно

$$\hat{X}(t, h) = X(t) + O(h^n).$$

Получим два решения при разных шагах интегрирования  $h_1, h_2$  (желательно кратных, то есть  $h_1 = Nh_2$ ), при условии  $h_1 \gg h_2$ . Тогда частное (разница) двух решений

$$\hat{X}(t, h_1) - \hat{X}(t, h_2) = X(t) + O(h_1^n) - (X(t) + O(h_2^n)) = O(h_1^n) - O(h_2^n)$$

Так как при  $h_1 \gg h_2$ , справедливо  $O(h_1^n) \gg O(h_2^n)$ , то

$$\hat{X}(t, h_1) - \hat{X}(t, h_2) = O(h_1^n) - O(h_2^n) \approx O(h_1^n).$$

Следовательно, для того чтобы получить оценку ошибки интегрирования необходимо просчитать зависимость  $\hat{X}(t, h)$  с двумя различными шагами и вычесть результаты расчетов друг из друга. Это работает только тогда, когда ошибка по абсолютной величине существенно меньше самого решения  $\hat{X}(t, h)$ .

Остается только выбрать шаги  $h_1, h_2$ . С практической точки зрения считается достаточным, если  $O(h_1^n) > 10 \cdot O(h_2^n)$ . Для этого при использовании методов первого порядка точности необходимо взять  $h_1 = 10 h_2$ , а для четвертого, достаточно, чтобы  $h_1 = 2 h_2$ .

При составлении плана работы целесообразно задать начальные условия соответствующие режимам быстрой и медленной регулярной

прицессии и всем режимам нутационных колебаний, которые надо исследовать.

Так как решение задачи Коши единственно, мы можем вычислить эти начальные условия, используя аналитические решения (5.2.25).

Действительно

$$\begin{aligned}\alpha &= D_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2); \\ \beta &= D_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2).\end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -D_1 \omega_1 \sin(\omega_1 \tau + \delta_1) - D_2 \omega_2 \sin(\omega_2 \tau + \delta_2); \\ \dot{\beta} &= D_1 \omega_1 \cos(\omega_1 \tau + \delta_1) + D_2 \omega_2 \cos(\omega_2 \tau + \delta_2).\end{aligned}$$

Следовательно, при быстрой регулярной прицессии, когда  $D_1 = 0$ , положив,  $\delta_1 = 0$ ,  $D_2 = 1$ ,  $\delta_2 = 0$ ; получим  $\alpha(0) = 1$ ,  $\beta(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ ,  $\dot{\beta}(0) = \omega_2$ .

При медленной регулярной прицессии, когда  $D_2 = 0$ , положив,  $\delta_1 = 0$ ,  $D_1 = 1$ ,  $\delta_2 = 0$ ; получим  $\alpha(0) = 1$ ,  $\beta(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = 0$ ,  $\dot{\beta}(0) = \omega_1$ . То есть начальные условия для быстрой и медленной регулярной прицессии отличаются всего одной цифрой. Очевидно, что изменяя  $\dot{\beta}(0)$  в пределах от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  при неизменных условиях для других переменных, можно получить все упомянутые в пособии режимы нутационных колебаний.

Для того чтобы они не перекрывали друг друга после целого периода целесообразно выбирать кратные друг другу частоты прицессий  $\omega_2 / \omega_1 = N$ .

Необходимо обратить внимание на то, что сложение прецессий – есть сложение вращений относительно сонаправленных осей, поэтому пока быстрая прицессия накручивает  $N - 1$  период, медленная успеет накрутить еще один. Вследствие этого на траекториях центра масс будет наблюдаться  $N - 1$  лепесток. Эта ситуация отличается от картины сложения колебаний, когда в одном большом периоде будет уместиться ровно  $N$  малых.

### 5.3. РАБОТА № 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СУДНА

#### Цель работы

Построение численного решения задачи оптимального управления движением судна и исследование зависимости оптимального закона управления и соответствующей ему фазовой траектории движения от параметров задачи.

#### Математическая формулировка задачи

*Описание объекта.* В качестве простейшей математической модели движения судна принимается уравнение прямолинейного движения материальной точки в вязкой жидкости

$$m\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) = F(t), \quad (5.3.1)$$

где  $y(t)$  – координата положения судна;  $m$  – масса судна;  $\beta$  – коэффициент лобового сопротивления;  $F(t)$  – усилие, создаваемое двигателем.

Исследуется задача оптимального причаливания судна, т.е. управляющее воздействие  $F(t)$  должно быть выбрано таким образом, чтобы обеспечить перевод судна за фиксированное время  $T$  из произвольного начального состояния с фазовыми координатами

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (5.3.2)$$

в конечное состояние с нулевыми значениями координат

$$\begin{aligned} y(T) &= 0, \\ \dot{y}(T) &= 0, \end{aligned}$$

при минимальных затратах. Вопросы выбора критерия оптимальности и ограничений на управляющее воздействие рассматриваются в следующем разделе.

### **Задание критерия оптимальности и ограничений на управляющее воздействие**

Выбор критерия оптимальности, отражающего затраты на управляемое движение, и ограничений на управляющие воздействия является неформальным и далеко не простым этапом в решении задачи, когда, с одной стороны, формализуются качественные требования к системе, а с другой – закладываются основы для эффективного решения (т.е. с наименьшими вычислительными трудностями). Причем второй аспект часто может доминировать над содержательной стороной. Однако в исследуемой задаче это противоречие практически не проявляется.

Затраты на управляемое движение могут быть охарактеризованы общим расходом топлива. Для двигательных установок расход в единицу времени связан с величиной создаваемого воздействия и достаточно часто эта зависимость полагается квадратичной  $\kappa F^2(t)$ , где  $\kappa$  – размерный коэффициент. Тогда общий расход представим в виде

$$\int_0^T \kappa F^2(t) dt. \quad (5.3.3)$$

При этом создаваемые воздействия ограничены по величине и можно считать

$$|F(t)| \leq F_0. \quad (5.3.4)$$

Вместе с тем общие затраты могут быть заданы и косвенным образом, например, в виде потерь энергии, связанных с действием

диссипативных сил. Очевидно, что работа сил трения задается выражением

$$\int_0^T \beta \dot{y} dy(t) = \int_0^T \beta \dot{y}^2 dt. \quad (5.3.5)$$

Поскольку критерии (5.3.3) и (5.3.5) различны и приводят к разным результатам, то представляет интерес введение критерия, сочетающего в себе свойства как первого, так и второго, а также переходящего в каждый из них при определенных условиях. Такой критерий может быть задан в следующем виде:

$$J = \beta \int_0^T \dot{y}^2 dt + \mu \int_0^T \kappa F^2 dt, \quad (5.3.6)$$

где  $\mu > 0$  – безразмерный весовой коэффициент. Согласование размерностей слагаемых в выражении (5.3.6) проводится с учетом того, что количество топлива пропорционально его энергосодержанию, при этом коэффициент  $\kappa$  должен иметь соответствующую размерность. В случае, когда  $\mu = 0$ , критерий  $J$  переходит в выражение (5.3.5), при  $\mu \rightarrow \infty$  – эквивалентен выражению (5.3.3).

Окончательно задача оптимального причаливания судна может быть сформулирована следующим образом:

$$\min \int_0^T [\beta \dot{y}^2 dt + \mu \kappa F^2] dt, \quad (5.3.7)$$

при условиях

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + \beta\dot{y} &= F; \\ y(0) &= y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0, y(T) = 0, \dot{y}(T) = 0; \\ |F(t)| &\leq F_0. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Величины  $\mu, m, \beta, y_0, \dot{y}_0, T, F_0$  выступают в качестве параметров задачи.

### **Построение оптимального закона управления**

Решение сформулированной задачи оптимального управления (5.3.7) - (5.3.8) при выполнении лабораторной работы проводится в два этапа.

Первый – подготовительный – состоит в получении с помощью принципа максимума необходимых условий оптимальности в форме краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и проведении качественного исследования зависимости оптимального закона управления от параметров задачи.

На втором этапе осуществляется численное решение краевой задачи с использованием подпрограммы DNTBP (Double precision Nonlinear Two – point Boundary – value Problems), реализующей метод непрерывной пристрелки, и проводится численный эксперимент по исследованию влияния значений параметров задачи на характер ее решения.

### **Параметризация**

Большое число параметров задачи в исходной постановке делает численный эксперимент весьма громоздким и трудоемким при обработке. Поэтому необходимо выделить только существенно значимые параметры.

Вводя безразмерные время  $\tau = t/T$  и координату  $\bar{y} = y/y_0$ , от выражения (3.1) переходим к уравнению

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \bar{y} + \frac{\beta T}{m} \frac{d}{d\tau} \bar{y} = \frac{T^2 F(\tau)}{m y_0}, \quad (5.3.9)$$
$$\tau \in [0, 1]$$

С граничными условиями



$$\begin{aligned} \bar{y}(0) = 1, \quad \frac{d}{d\tau} \bar{y} |_{\tau=0} = \bar{y}'(0) = \frac{T\dot{y}_0}{y_0}, \\ \bar{y}(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

В качестве управления принимается безразмерная величина  $u(t) = F(t)/(my_0/T^2)$ , где  $my_0/T^2$  представляет собой значение силы, под действием которой материальная точка массой  $m$  из состояния покоя за время  $T$  проходит путь длиной  $J_0/2$ . Величина  $\alpha = \beta T/m$  характеризует затухание за время  $T$  при свободном движении судна.

Таким образом, выражение (5.3.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{y}''(\tau) + \alpha \bar{y}'(\tau) = u(\tau), \\ \tau \in [0,1]. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

При этом начальная безразмерная скорость  $\bar{y}'(0)$  есть отношение начальной скорости  $\dot{y}_0$  и постоянной скорости  $y_0/T$ .

С учетом введенных обозначений, ограничение (5.3.8) принимает вид

$$|u(t)| \leq \frac{F_0 T^2}{my_0} = u_0, \quad (5.3.12)$$

а критерий качества может быть записан в следующей форме:

$$J = \frac{\beta y_0^2}{T} \int_0^1 \bar{y}'^2(\tau) d\tau + \mu \frac{\beta y_0^2}{T} \int_0^1 u^2(\tau) d\tau, \quad (5.3.13)$$

где интегралы являются безразмерными величинами, а множители при них имеют размерность энергии. Умножение критерия качества на постоянную величину  $(\beta y_0^2 T^{-1} + \mu \kappa m^2 y_0^2 T^{-4})^{-1}$ , не влияющее на решение задачи оптимизации, позволяет записать его в компактной безразмерной форме

$$J = (1-r) \int_0^1 \bar{y}'^2(\tau) d\tau + r \int_0^1 u^2(\tau) d\tau,$$

где параметр

$$r = \frac{\mu \kappa t^2 y_0^2 T^{-4}}{(\beta y_0^2 T^{-1} + \mu \kappa t^2 y_0^2 T^{-4})}$$

меняется от 0 до 1 при изменении  $\mu$  от 0 до  $\infty$ .

В результате проведенной параметризации задача (5.3.7) - (5.3.8) преобразована к виду

$$\min \int_0^1 [(1-r)\bar{y}'^2 + ru^2] d\tau, \quad (5.3.14)$$

$$r \in [0, 1];$$

$$\bar{y}''(\tau) + \alpha \bar{y}'(\tau) = u(\tau), \quad (5.3.15)$$

$$\tau \in [0, 1];$$

$$\bar{y}(0) = 1, \quad \bar{y}'(0) = T\dot{y}_0/y_0; \quad (5.3.16)$$

$$\bar{y}(1) = 0, \quad \bar{y}'(1) = 0; \quad (5.3.17)$$

$$|u| \leq u_0. \quad (5.3.18)$$

Где число параметров уменьшено с семи до четырех:  $r, \alpha, \bar{y}'(0), u_0$ , каждый из которых специфическим образом влияет на решение (детально этот вопрос рассмотрен в следующем разделе).

### Необходимые условия оптимальности

Получение необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума требует приведения дифференциальных ограничений к стандартному виду – системе уравнений первого порядка.

Вводя новые переменные

$$z_1(\tau) = \bar{y}(\tau),$$

$$z_2(\tau) = \bar{y}'(\tau),$$

запишем выражения (5.3.15), (5.3.16) в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} z_1' &= z_2, \\ z_2' &= -\alpha z_2 + u, \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

$$\begin{aligned} z_1(0) &= 1, & z_2(0) &= y'(0), \\ z_1(1) &= 0, & z_2(1) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3.20)$$

С учетом введенных обозначений Гамильтониан задачи имеет вид

$$H(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2, u) = -(1-r)z_2^2 - ru^2 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 z_1, \quad (5.3.21)$$

а множители Лагранжа  $\lambda_1(\tau)$ ,  $\lambda_2(\tau)$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_1' &= -\frac{\partial H}{\partial z_1} = 0, \\ \lambda_2' &= -\frac{\partial H}{\partial z_2} = -2(1-r)z_2 - \lambda_1 + \alpha\lambda_2. \end{aligned} \quad (5.3.22)$$

Оптимальный закон управления  $u_{opt}(\tau)$  определяется из условия максимума Гамильтониана (5.3.21) при ограничениях (5.3.18)

$$u_{opt} = \arg \max_u \{H(z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2, u) / |u| \leq u_0\} \quad (5.3.23)$$

следовательно, является функцией переменных  $z_1, z_2, \lambda_1, \lambda_2$ .

Уравнения (5.3.19), (5.3.22) образуют, с учетом (5.3.23), замкнутую систему относительно  $z_1(\tau), z_2(\tau), \lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)$ , которая совместно с граничными условиями (5.3.20) представляет собой необходимые условия оптимальности. Определение оптимальной траектории, а, следовательно, и оптимального закона управления, состоит в решении сформулированной краевой задачи (5.3.19), (5.3.22), (5.3.23), (5.3.20).

### Анализ оптимального закона управления

Рассмотрим последовательно решение задачи управления при  $r=0$ ,  $r=1$  и  $0 < r < 1$ .

а) При  $r = 0$  Гамильтониан (5.3.21) имеет вид

$$H(z, \lambda, u) = -z_2^2 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2(-\alpha z_2 + u). \quad (5.3.24)$$

Тогда максимум  $H(z, \lambda, u)$  в области  $|u| \leq u_0$  достигается в точке

$$u_{opt} = \begin{cases} u_0, \lambda_2 > 0 \\ -u_0, \lambda_2 < 0 \\ u^* \in [-u_0, u_0], \lambda_2 = 0, \end{cases} \quad (5.3.25)$$

где  $u^*$  определяется из требования  $\lambda_2 = 0$ . Это требование совместно с системой (5.3.22) приводит к условию

$$z_2(\tau) = \lambda_1/2 = \text{const}(\tau).$$

Откуда, согласно выражению (5.3.19), следует

$$-\alpha z_2 + u^* = 0,$$

т.е.  $u^*(\tau) = \text{const}(\tau) = u^*$ .

Таким образом, оптимальный закон управления (5.3.25) является кусочно-постоянной функцией, расположение участков которой определяется поведением функции  $\lambda_2(\tau)$ .

Выражение для  $\lambda_2(\tau)$  может быть записано в общем виде, через неопределенные постоянные, которые находятся из граничных условий и требования непрерывности в точках переключения управляющего воздействия. Анализ решения показывает, что оптимальный закон управления имеет не более двух точек переключения (рис. 27), причем, длительность этих участков и значение  $u^*$  определяется (при постоянном  $u_0$ ) значением  $\bar{y}'(0)$  (т.е. соотношением длины пути  $y_0$ , времени движения  $T$  и начальной скорости  $\dot{y}_0$ ).

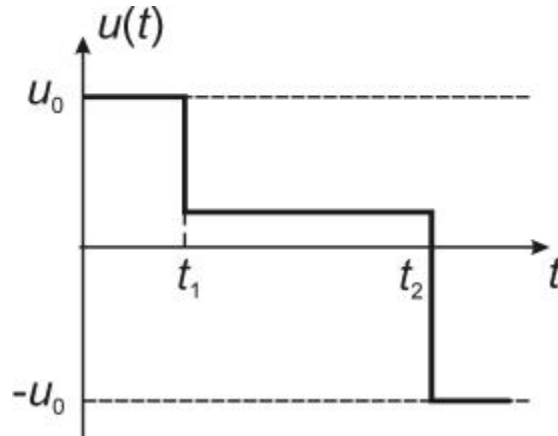


Рис. 27. Оптимальный закон управления при  $r = 0$

Зависимость  $u_{opt}(\tau)$  от  $u_0$  при постоянном значении  $\bar{y}'(0)$  приведены на рис. 28.

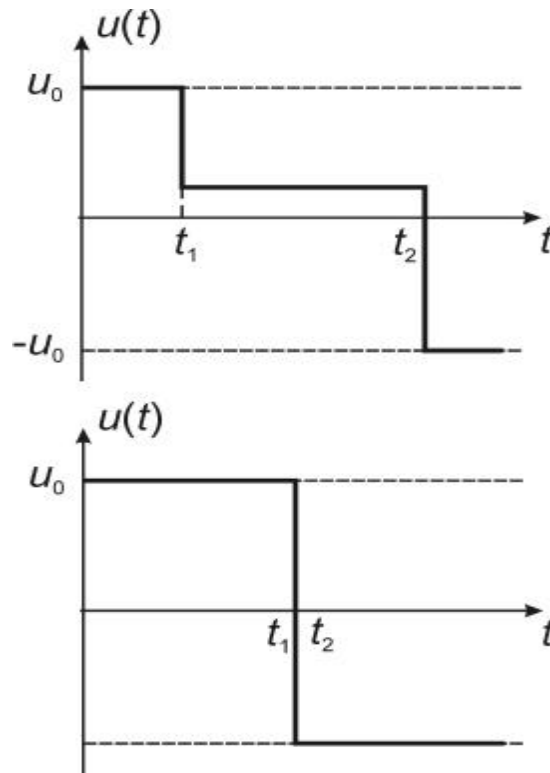


Рис. 28. Оптимальный закон управления при  $r = 0$ ,  $\bar{y}'(0) = const$

б) При  $r = 1$  Гамильтониан (5.3.21) имеет вид

$$H(z, \lambda, u) = -u^2 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 (-\alpha z_2 + u). \quad (5.3.26)$$

Максимум  $H(z, \lambda, u)$  в области  $|u| < u_0$  достигается в точке

$$u_{opt} = \begin{cases} u_0, & u^* > u_0 \\ -u_0, & u^* < -u_0 \\ u^*, & u^* \in (-u_0, u_0) \end{cases}, \quad (5.3.27)$$

где  $u^*(\tau) = \lambda_2(\tau)/2$  – точка безусловно максимума (5.3.26).

Таким образом, оптимальный закон управления включает участки трех типов, смена которых зависит от характера поведения функции  $\lambda_2(\tau)$ .

Согласно выражению (5.3.22)

$$\begin{aligned} \lambda_2(\tau) &= C_1 e^{\alpha\tau} + C_2, \\ C_1, C_2 &= const, \end{aligned} \quad (5.3.28)$$

т.е. является монотонной функцией и, следовательно, каждое из неравенств  $u^* \geq u_0$ ,  $u^* \leq -u_0$  может нарушаться лишь один раз (рис. 29).

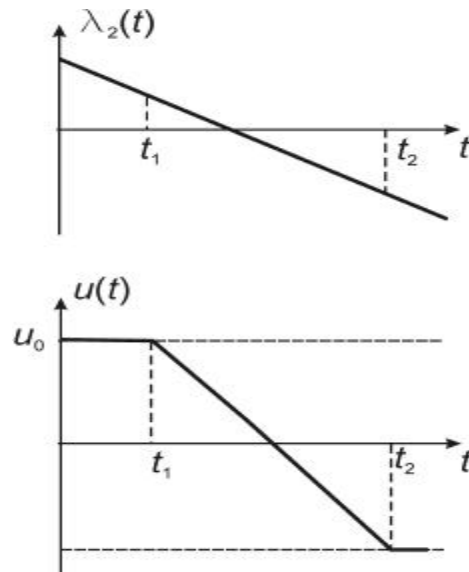


Рис. 29. Оптимальный закон управления при  $r = 1$

в) При  $0 < r < 1$  получаем комбинацию рассмотренных выше случаев, а именно

$$u_{opt} = \begin{cases} u_0, & u^* > u_0 \\ -u_0, & u^* < -u_0 \\ u^*, & u^* \in (-u_0, u_0) \end{cases}, \quad (5.3.29)$$

где  $u^* = \lambda_2(\tau)/2r$  – точка безусловного максимума Гамильтона, т.е. структура управляющего воздействия та же, что и в случае  $r=1$ , функция  $\lambda_2(\tau)$  определяется так же, как и в случае  $r=0$ .

На рис. 30 приведены графики  $u_{opt}(\tau)$ , соответствующие различным значениям  $u_0$ :

- а) ограничение  $u_0$  велико и не влияет на  $u_{opt}$ ;
- б) управляющее воздействие выходит на ограничение;
- в) при некотором предельном  $u_0$  управляющее воздействие становится кусочно-постоянным (точки  $t_1, t_2$  сливаются), дальнейшее уменьшение  $u_0$  делает задачу неразрешимой.

### Задание на проведение численного эксперимента

1. Провести подготовку к численному эксперименту написать и отладить необходимое программное обеспечение

2. Тестирование программы

Сравнить результаты расчетов с аналитическим решением для  $A=0$  и  $R=1$ . При этом возможны два режима счета: когда управление  $u$  выходит на ограничение.

3. Провести исследования различных режимов управления. Основными варьируемыми параметрами являются:

$$R \in [0,05, 1], u_0 \in [2, 6], A \in [0,01, 0,5].$$

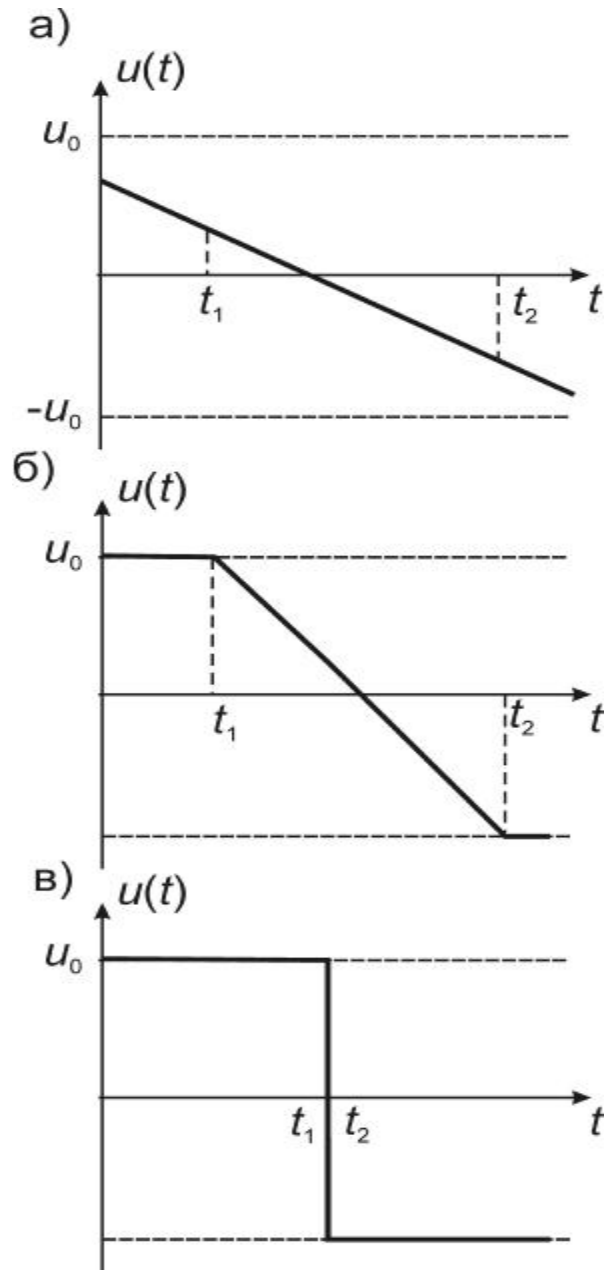


Рис. 30. Оптимальный закон управления, соответствующие различным значениям  $u_0$  : а) ограничение  $u_0$  велико и не влияет на величину управляющего воздействия; б) управляющее воздействие выходит на ограничение; в) при некотором предельном  $u_0$  управляющее воздействие становится кусочно-постоянным (точки  $t_1, t_2$  сливаются), дальнейшее уменьшение  $u_0$  делает задачу неразрешимой.



## **Комментарии к работе**

Целью численного эксперимента является:

- а) приведение поставленной задачи оптимального управления к необходимому для программирования виду;
- б) приобретение навыков использования стандартных программ и отдельных модулей;
- в) освоение методами тестирования программ;
- г) проведение исследования зависимости оптимальных законов управления и фазовых траекторий от параметров задачи.

## **Программная реализация численного решения краевой задачи**

Прежде чем приступить к проектированию любой задачи, необходимо определить ее класс и наличие стандартных программ на выбранном языке программирования, обслуживающих данный класс задач. Стандартные программы оформляются обычно в виде отдельных подпрограмм, вызываемых из программы пользователя. При обращении к ним необходимо привести исходную задачу к требуемому виду и согласовать входные параметры.

Рассматриваемая задача оптимального управления сформулирована как краевая задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.3.19) - (5.3.22). Для решения подобных задач может быть использована подпрограмма DNTBP на Фортране, реализующая метод непрерывной пристрелки.

## **Приведение к стандартной форме**

При анализе оптимального закона управления рассмотрены три варианта значений параметра  $r$ :  $r = 0$ ,  $r = 1$ ,  $0 < r < 1$ . Для последних двух законы управления имеют одинаковую структуру (5.3.25), (5.3.27). При  $r = 0$  закон управления существенно иной, т.к. имеется участок движения с постоянной скоростью, определяемой из точечного условия  $\lambda_2 \equiv 0$ . При этом численное решение требует введения специальных приемов, учитывающих данную особенность.

С учетом сказанного, следует рассматривать лишь случаи  $0 < r \leq 1$ , что не является ограничением, так как задача допускает предельный переход при  $r \rightarrow 0$ .

Тогда система уравнений имеет вид (5.3.19), (5.3.22) с граничными условиями (5.3.20), где функция  $u_{opt}(\tau)$  определяется соотношением (5.3.29). Отметим, что полученная система является нелинейной, так как соотношение (5.3.29) нелинейно.

Чтобы привести запись задачи к стандартному виду

$$\dot{x} = F(x, t), \quad x \in R^n, \quad F \in R^n, \quad t \in [0, T],$$

введем обозначения

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, & x_2 &= z_2, \\ x_3 &= \lambda_1, & x_4 &= \lambda_2, \\ A &= \alpha, & R &= r. \end{aligned}$$

При моделировании желательно наряду с определением оптимальных законов управления вычислять и функционал задачи (5.3.14) для возможности сравнения решений при различных параметрах. Последнее без труда реализуется, если ввести дополнительную переменную  $x_5$ , определяемую из дифференциального уравнения

$$\dot{x}_5 = (1 - R)x_2^2 + ru^2, \quad x_5(0) = 0.$$

Очевидно, что  $x_5(T) = J$ .

Таким образом, исходная краевая задача свелась к стандартному виду

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, & x_1(0) &= x_{10}, \quad x_1(T) = 0 \\
\dot{x}_2 &= -Ax_2 + u, & x_2(0) &= x_{20}, \quad x_2(T) = 0 \\
\dot{x}_3 &= 0, & & \\
\dot{x}_4 &= 2(1-R)x_2 - x_3 + Ax_4, & & \\
\dot{x}_5 &= (1-R)x_2^2 + Ru^2, & x_5(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.3.30}$$

где  $u$  вычисляется по формулам:

$$u = \begin{cases} u_0, & x_4 > 2Ru_0 \\ -u_0, & x_4 < 2Ru_0 \\ x_4/2Ru^*, & -2Ru_0 \leq x_4 \leq 2Ru_0 \end{cases} . \tag{5.3.31}$$

### **Задание правых частей системы уравнений**

Вычисления правых частей дифференциальных уравнений (5.3.29) пользователем составляется соответствующая подпрограмма, имя которой (например, FUN) передается в качестве параметра подпрограмме DNTBP, которая периодически обращается к этой подпрограмме.

### **Вычисление матрицы Якоби**

Для реализации метода непрерывной пристрелки, используемого в подпрограмме DNTBP необходимо вычислять матрицу Якоби  $\partial F/\partial x$  - матрицу производных от правых частей по переменным.

Для рассматриваемой задачи

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A & 0 & 0, x_4 > 2Ru_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0, x_4 < 2Ru_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^{-1}, -2Ru_0 < x_4 < 2Ru_0 & 0 \\ 0 & 1-R & -1 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица Якоби тоже должна вычисляться в подпрограмме FUN, причем не в явном виде, а в виде  $\frac{\partial F}{\partial x} Y$ , где  $Y$  – вспомогательный вектор.

### **Ввод исходных данных и вывод результатов вычислений**

Входными данными задачи являются параметры  $A, R, u_0, x_{10}, x_{20}$ , а также параметры подпрограммы DNTBP.

Выходными результатами являются значения фазовых и сопряженных переменных, оптимального закона управления и функционала качества, полученные на всем интервале интегрирования с некоторым шагом вывода. Для вывода этих результатов  $(t, x_1, \dots, x_4, u, x_5)$  пользователем составляется соответствующая подпрограмма, имя которой также передается подпрограмме DNTBP.

### **Подготовка к численному эксперименту**

Описанная выше методика подготовки к численному эксперименту является универсальной и достаточно полной. В данном задании можно ограничиться только составлением головной программы и подготовкой исходных данных, т.к. можно воспользоваться готовыми подпрограммами – подпрограммой вычисления правых частей ДУ и матрицы Якоби FUN и

подпрограммой вывода результатов OUT, что впрочем не исключает их самостоятельной подготовки.

Головная программа должна содержать: ввод исходных данных из файла; контрольную распечатку исходных данных; обращение к основной подпрограмме DNTBP; вывод кода ошибки (результата работы DNTBP ). Файл с входными данными содержит значения параметров  $A, R, u_0, x_{10}, x_{20}$ , а также вектор параметров подпрограммы DNTBP. Рекомендуется подготовить данные под оператор NAMELIST.

### **Тестирование программы**

Тестирование программ занимает важное место при создании программных продуктов и служит целям проверки алгоритмов и отладки программы. Среди методов тестирования наиболее надежным является сравнение численного решения с аналитическим, полученным в частном случае. При этом важно предусмотреть возможность проверки всех режимов счета и работы самой программы.

Для рассматриваемой задачи аналитическое решение строится достаточно просто для  $A = 0$  и  $R = 1$ . При этом возможны два режима счета: когда управление  $u$  выходит на ограничение  $u_0$ , при этом система дифференциальных уравнений линейна, и когда не выходит, при этом система нелинейна.

### **Проведение исследования различных режимов управления**

После отладки и тестирования программы проводится исследование зависимости оптимальных законов управления и фазовых траекторий при различных решениях уравнения.

Основными варьируемыми параметрами являются:

$$R \in [0,05, 1],$$

$$u_0 \in [2, 6],$$

$$A \in [0,01, 0,5].$$

## **Анализ полученных результатов**

Завершающий этап любого исследования. Строятся основные графические зависимости и делаются выводы об эффективности различных способов (критериев) управления.

### **5.4. РАБОТА №4. ПРОХОЖДЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС**

#### **Цель работы**

Исследование моделей ротора в упругом подвесе с приводом большой мощности.

К числу важных проблем динамики роторных машин относится комплекс вопросов, связанных с разгоном и торможением ротора в процессе его ввода в рабочий режим или вывода из него. Вопросы эти обусловлены тем, что современные быстроходные машины работают, как правило, в зарезонансных режимах, когда угловая частота вращения ротора превышает собственную частоту системы его упругого подвешивания. В силу неизбежной неуравновешенности ротора он возбуждает вынужденные колебания своего упругого подвеса, амплитуда которых резко возрастает при приближении угловой скорости вращения ротора к круговой собственной частоте подвеса, т.е. при прохождении ротора через резонансную зону. При этом величина максимальных амплитуд колебаний существенно зависит от скорости прохождения этой зоны, которая, в свою очередь, определяется мощностью роторного привода (или его тормоза). При малой скорости прохождения возникает интенсивный взаимообмен энергией между приводом (или тормозом) и подвесом, что существенно усложняет динамическое поведение системы и требует анализа совместной динамики подвеса и привода. Детальный анализ такого процесса изложен в [9.Д]. В настоящей работе рассматривается тот случай, когда обратное воздействие ротора на привод

незначительно, то есть, привод обладает достаточно большой мощностью и не "чувствует" прохождения ротора через резонанс.

### Описание системы

Рассмотрим модель ротора в упругом подвесе в виде схемы, показанной на рис. 31.

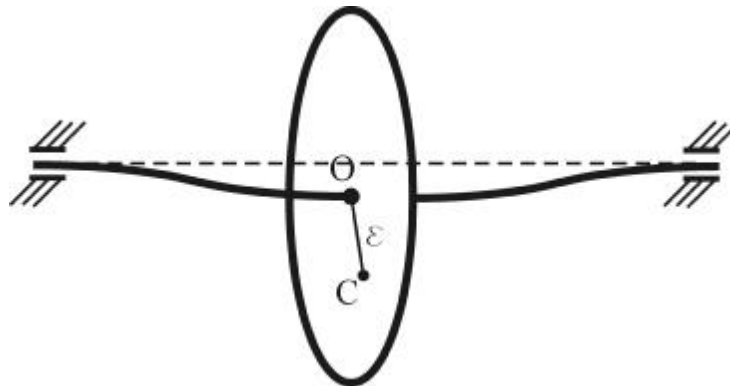


Рис. 31. Модель ротора в упругом подвесе

Геометрический центр ротора  $O$  будем считать лежащим на оси вала, а его центр масс  $C$  расположенным на расстоянии  $\varepsilon$  от точки  $O$ .

Ограничиваясь рассмотрением движения центра ротора в одной плоскости (например, в вертикальной), обозначим вертикальную координату точки  $O$  через  $q$ . Тогда, согласно теореме о движении центра масс, имеем для вертикальной координаты уравнение движения

$$m(q + \varepsilon \sin \varphi) = -cq - b\dot{q}, \quad (5.4.1)$$

где в скобках в левой части стоит абсолютное ускорение центра масс  $C$  ( $\varphi$  – угол поворота ротора вместе с валом, отсчитываемый от горизонтальной оси), а в правой – сумма сил упругости вала (обусловленной его изгибом в вертикальной плоскости) и силы вязкого трения (которая всегда присутствует в подобных системах).

Вводя стандартные обозначения  $k^2 = c/m$ ,  $2n = b/m$ , перепишем уравнение (5.4.1) в виде

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \varepsilon(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi). \quad (5.4.2)$$

Стоящие в правой части составляющие вынуждающей силы имеют разный физический смысл и существенно различны по своей величине. Первая из них представляет собой центробежную силу инерции ротора, и она резко возрастает по величине с ростом скорости его вращения. Второе слагаемое, обусловленное угловым ускорением ротора, пропорционально модулю вращающего момента привода, он обычно падает с ростом скорости вращения. Поэтому им можно пренебрегать в сравнении с первым слагаемым, тогда вместо выражения (5.4.2) получим

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = \varepsilon\dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \quad (5.4.3)$$

Полагая теперь, что вал ротора вращается равноускоренно, то есть

$$\varphi = \frac{1}{2}ht^2, \quad (5.4.4)$$

Перепишем уравнение (5.4.3) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q &= P(t) \sin ht^2/2, \\ P(t) &= \varepsilon(ht)^2. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Видно, что амплитуда вынуждающей силы резко растет во времени, однако для упрощения дальнейшего анализа пренебрежем изменением амплитуды в окрестности резонанса, характеризуемого совпадением частоты вращения ротора  $\Omega$  с собственной частотой его упругой подвески  $k$ , и сосредоточимся только на изменении частоты



вращения  $\Omega$  вблизи ее резонансного значения  $\Omega = k$ . Полагая поэтому  $P(t) = P_0 = const$ , приходим к уравнению

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2q = P_0 \sin \frac{ht^2}{2}, \quad (5.4.6)$$

приблизненно описывающему динамику вращающегося ротора на упругом основании.

### Анализ решения

Уравнение (5.4.6) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, его полное решение складывается из свободного колебательно-затухающего движения и вынужденного движения, которое представляет собой реально наблюдаемое движение центра крепления ротора  $O$ . Это вынужденное движение может быть записано в форме интеграла Дюамеля

$$q = \frac{1}{k} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} P_0 \sin \frac{h\tau^2}{2} \sin k(t-\tau) d\tau. \quad (5.4.7)$$

Стоящий здесь интеграл может быть посредством несложных преобразований приведен к табулированным интегралам Френеля, имеющим вид

$$\begin{aligned} C(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \cos z^2 dz, \\ S(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \sin z^2 dz, \end{aligned} \quad (5.4.8)$$

Для этих интегралов имеются таблицы [6,7], с помощью которых решение (5.4.7) может быть вычислено для любого момента времени.

Однако наибольший интерес представляет движение ротора вблизи точки резонанса, наступающего в момент времени  $t_*$ , когда

$$\Omega = \Omega_* = ht_* = k. \quad (5.4.9)$$

Как следует из результатов качественного анализа [8], в этой точке не достигается максимальное значение амплитуды вынужденных колебаний осциллятора. Максимум этой амплитуды достигается уже после прохождения резонансной частоты  $k$ , когда частота вращения становится равной

$$\Omega_{**} = k \left( 1 + \frac{1}{1 + 0.14 \frac{\delta}{\pi} \sqrt{2\pi s}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4s}} \right). \quad (5.4.10)$$

Здесь  $\delta = \frac{2\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}}$  – логарифмический декремент затухания

$s = \frac{t_* k}{2\pi} = \frac{k^2}{2\pi h}$  – характеризует число периодов собственных колебаний за время  $t_*$ .

Общий ход процесса прохождения через резонанс для ряда значений параметра  $s$  показан на рис. 32.

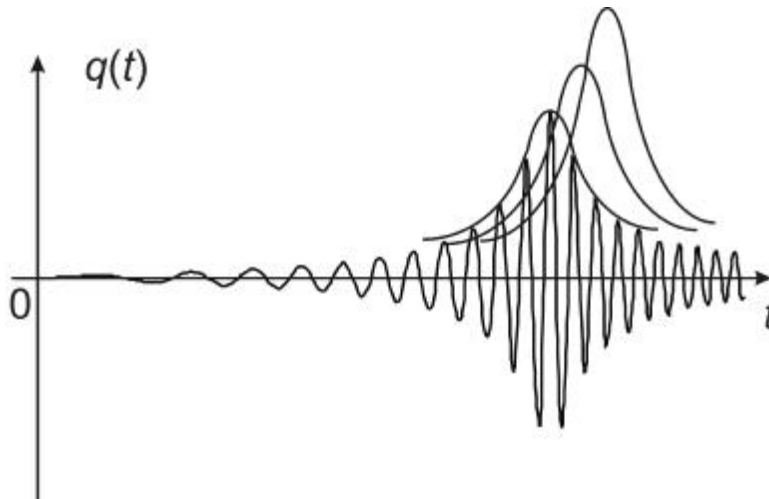


Рис. 32. Процесс разгона ротора с разными ускорениями

Видно, что с ростом  $s$ , то есть, с уменьшением скорости прохождения через резонанс ( $s \sim 1/h$ ), резко увеличивается максимальная амплитуда вынужденных колебаний, а отвечающая ей частота приближается к собственной частоте осциллятора  $k$ .

При численной реализации рассматриваемого процесса следует наряду с варьированием  $h$  варьировать также и коэффициент демпфирования  $n$  осциллятора, так как он оказывает определенное влияние на амплитуду резонансных колебаний и на положение точки их максимума.

Для качественной оценки максимальной амплитуды можно воспользоваться приближенной формулой, выражающей коэффициент динамичности

$$\beta_{max} \approx \frac{F(f)}{\sqrt{\frac{1}{2\pi s} + \left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2}}, \quad (5.4.11)$$

где

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi}{2\delta^2 s}}}, \quad (5.4.12)$$

Зависимость  $F(f)$  представлена на рис. 33.

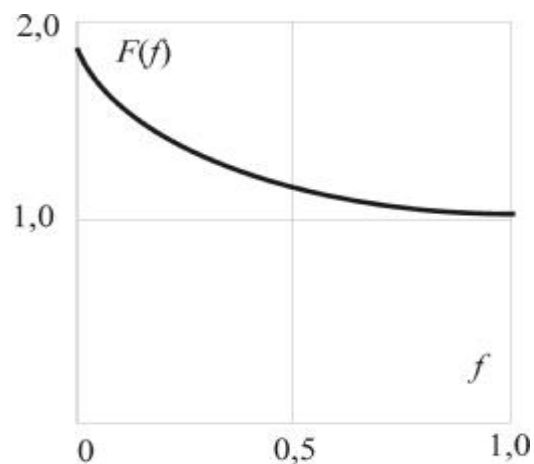


Рис. 33. Зависимость  $F(f)$

### Задание на проведение эксперимента

1) Используя стандартные подпрограммы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см. работу № 2), составить программу моделирования на ЭВМ процесса прохождения линейного осциллятора через резонанс, описываемого соотношениями (5.4.6) - (5.4.7).

2) Провести тестирование работы программы для режима медленного квазистатического прохождения через резонанс (максимальная амплитуда должна совпадать с амплитудой колебаний с постоянной резонансной частотой).

3) Для случая  $P(t) \equiv P_0 = \text{const}$ , по результатам моделирования процесса разгона ( $h > 0$ ) построить семейство зависимостей  $\Omega_{**}(s, \delta_i)$ ,  $\beta_{\max}(s, \delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, I_\delta$ . Значения величин  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{I_\delta}$ , а также  $k$  являются исходными данными для проведения работы.

4) Выполнить задание п.3 для случая торможения ( $h < 0$ ), считая, что в начальный момент времени осциллятор совершал установившиеся колебания с частотой возбуждения  $\Omega = 1.5k$ .

5) Выполнить задание п.п. 3, 4 для случая, когда амплитуда  $P(t)$  определена соотношением (5.4.5).

6) Выполнить задание п.5 для случая, когда закон изменения  $\Omega(t) = \Omega_\infty(1 - e^{-\alpha t})$ .

### Комментарии к работе

Задача о прохождении системы через резонанс явилась следствием практических потребностей. Паровые турбины электростанций до 50-х годов 20 века имели мощность менее 100 МВт. Их первая собственная частота была выше рабочей частоты вращения равной по стандартам электросетей 50 Гц или 3000 об/мин. Вместе с тем, такие небольшие турбины имели низкий КПД, что означало потери топлива при генерации электроэнергии. Развитие техники в 20 веке шло по пути увеличения КПД, в основном, за счет увеличения единичной мощности агрегатов. Перед инженерами

стояла задача – создать турбины с единичной мощностью 100 МВт и более. Эти турбины должны были иметь первую собственную частоту менее 50 Гц. А по пути к рабочей частоте должны были проходить собственный резонанс.

Следует заметить, что нагрузка от динамических сил при вращении с частотой 3000 об/мин очень большая. Из формулы (5.4.5) следует, что амплитуда  $A_F$  динамической силы  $F$  равна

$$A_F = mP(t) = m\varepsilon\omega^2$$

При массе турбины около 10 тонн и эксцентриситете всего 0,1 мм амплитуда силы  $A_F = 10^4 \text{ кг} \cdot 10^{-4} \text{ м} \cdot (300 \text{ рад/с})^2 = 90000 \text{ Н}$ , что эквивалентно весу в 9 тонн.

Турбина тщательно балансируется. Чтобы исключить влияние прогрева и неравномерного расширения, балансировку делают много раз. Нагревают турбину на 50 °С и балансируют и так вплоть до рабочей температуры. Но все равно, динамическая нагрузка остается значительной и инженеру важно знать, насколько увеличится амплитуда колебаний турбины при прохождении резонанса, чтобы рассчитать напряжения и деформации в этот момент.

Такая задача была решена в 50-е годы сотрудником кафедры «Механика и Процессы Управления» Ленинградского Политехнического института Кацем. Получение формул, показывающих динамическое превышение амплитуды и изменение частоты резонансных колебаний от скорости разгона, в совокупности с другими инженерными решениями позволила создать турбины большой единичной мощности с высоким КПД. В конце 60-х годов был «взят» и рубеж 300МВт, который означал работу уже за вторым резонансом.

Вместе с тем, формулы (5.4.10)-(5.4.12) с точки зрения математики получены совершенно неправильно. Под интегралом

парабола заменена константой, что, конечно, является в общем случае грубой ошибкой.

При проведении работы предстоит исследовать насколько такая замена адекватна исходной механической модели.

План работы должен помочь выяснить, влияет ли на возможность такой замены закон изменения угловой скорости при разгоне и торможении.

В рассматриваемой задаче такая замена стала возможна благодаря замечательному свойству колебательных систем, которое широко используется и в других областях техники, например, при радиосвязи, мобильной связи, при подавлении узкополосных помех, при генерации напряжения заданной стабильной частоты в часах, компьютерах.

Колебательная система, как правило, настолько сильно реагирует на резонансную частоту, что можно не учитывать ее реакцию на нерезонансные воздействия. Это позволяет селективировать нужные частоты из широкого спектра сигналов, а также организовать автоколебательный процесс при генерации переменного напряжения кварцевым генератором. Применительно к задаче прохождения резонанса это свойство колебательных систем позволяет учитывать воздействие динамических сил только в узкой резонансной области. При резонансе угловая скорость турбины при любом законе разгона и торможения всегда близка к собственной частоте  $k$ , следовательно, амплитуда

$$A_F = mP(t) \approx m\epsilon k^2.$$

Это позволяет с минимальными погрешностями заменить параболу  $P(t) = \epsilon(ht)^2$  константой  $\epsilon k^2$  при любой скорости разгона и любом гладком законе торможения.

В работе исследуются резонансные режимы, в которых особенности методов интегрирования проявляются наиболее сильно,

поэтому необходимо правильно выбрать и обосновать метод интегрирования дифференциальных уравнений.

Имеется еще одна проблема при проведении моделирования. Она заключается в том, что в отличие от задач с постоянной или периодической вынуждающей силой мы имеем дело с непериодической силой в правой части. Поэтому необходимо задавать согласованные с фазой этой силы начальные условия. При разгоне от нулевой угловой скорости это не важно, так как «синхронизация» происходит за счет выбора синуса в качестве функции от фазы, а при торможении, рассогласование фаз может привести к удару в начальный момент времени, колебания от которого будут иметь амплитуду, большую чем резонансная. Для того, чтобы избежать такого удара рекомендуется моделировать разгон и торможение за один проход, задавая закон изменения частоты вращения в виде, показанном на графиках (рис. 34).

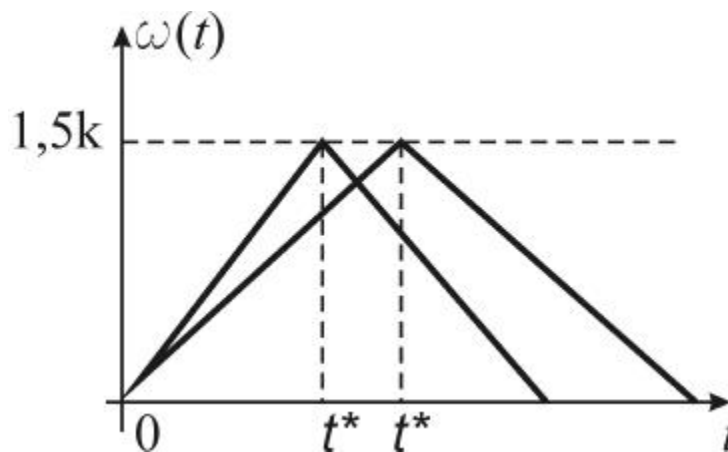


Рис. 34 Закон изменения частоты вращения

Для экспоненциального закон изменения угловой скорости рекомендуется также моделировать разгон-торможение за один проход, заменив прямые участки графиков отрезками экспонент, (рис. 33).

## 5.5. РАБОТА №5. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЗБУДИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ

### Цель работы

Численное исследование динамики нелинейной электромеханической системы – электромагнитного возбудителя колебаний.

### Описание системы

Вибрационное устройство такого типа состоит из электромагнита с притягиваемым якорем, упруго соединенным с неподвижным основанием (рис. 35).

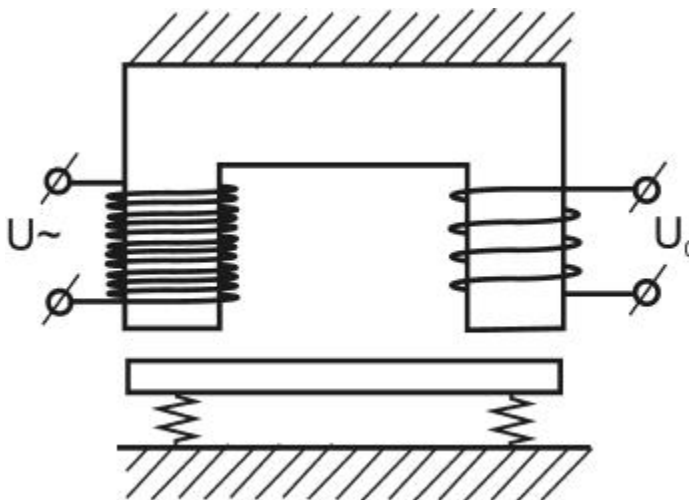


Рис. 35 Электромагнитный возбудитель колебаний

Электромагнитный возбудитель принадлежит к классу электромеханических систем, в которых механические и электромагнитные процессы существенным образом связаны между собой. В данном случае вертикальные колебания якоря приводят к изменению магнитного потока через контур тока питающей сетевой обмотки и, следовательно, к появлению э.д.с. индукции. В то же время изменение тока в цепи обмотки вызывает изменение индукции в зазоре и, как следствие, изменение силы, действующей на якорь.



Для описания динамики электромеханических систем используются уравнения Лагранжа-Максвелла (5.5.1). В случае замкнутых токов проводимости и отсутствия конденсаторов в электрических цепях уравнения Лагранжа-Максвелла записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial i_r} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial i_r} &= E_r, \quad (r = 1, 2, \dots, m); \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial (T + W)}{\partial q_k} + \frac{\partial \varphi_M}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_k} &= Q_k, \quad (k = 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (5.5.1)$$

где  $T$  и  $\Pi$  – механические кинетическая и потенциальная энергии;  $\varphi_M$  – механическая диссипативная функция;  $i_r$  – токи в контурах;  $q_k$  – обобщенные координаты;  $W$  – энергия магнитного поля.

$$W = \frac{1}{2} \int_V \frac{B^2}{\mu} dv, \quad (5.5.2)$$

где  $B$  – индуктивность;  $\mu$  – магнитная проницаемость;  $\Psi$  – электрическая диссипативная функция.

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^m R_{rs} i_r i_s,$$

где  $R_{rs}$  – сопротивления в ветвях контуров;  $E_r$  – алгебраическая сумма э.д.с. в  $r$ -ом контуре;  $Q_k$  – обобщенная сила, действующая по координате  $q_k$ .

Энергия магнитного поля складывается из энергии поля в стальном сердечнике

$$W_c = \frac{1}{2} R_c \varphi^2,$$

где  $\varphi$  – магнитный поток через сечение сердечника и энергии поля в зазорах. Зазор  $h + x$  мал по сравнению с поперечными размерами  $a$  и

$b$ , это позволяет считать поле в зазорах однородным, а энергию пропорциональной объему зазоров

$$W_3 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} (h+x)S,$$

где  $S = a \cdot b$  – площадь поперечного сечения;  $\mu$  – магнитная проницаемость воздуха.

Индукция в зазоре  $B = \varphi/S$ . Окончательно для энергии магнитного поля получаем выражение

$$W = \frac{1}{2} \left[ \frac{2(h+x)}{\mu_0 S} + R_c \right] \varphi^2. \quad (5.5.3)$$

Поток  $\varphi_1$  через контур тока  $i_1$  равен  $z_1 \cdot \varphi$ , где  $z_1$  – число витков. Поэтому соотношение, связывающее поток с током, будет

$$i_1 = \frac{\partial W}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{z_1^2} \left[ \frac{2(h+x)}{\mu_0 S} + R_c \right] \varphi. \quad (5.5.4)$$

Механический кинетический потенциал:

$$L = T - \Pi = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} c x^2, \quad (5.5.5)$$

где  $m$  – масса якоря,  $c$  – жесткость пружины. Величины

$$\varphi_r = \frac{\partial W}{\partial i_r} (r = 1, \dots, m),$$

называемые потоками индукции или

потокоцеплениями, аналогичны обобщенным импульсам. Тогда, выразив значения силы тока через магнитные потоки и подставив их в уравнение (5.5.1), получим уравнения, аналогичные уравнениям Рауса в механике

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 + \frac{R_1}{z_1^2} \left[ \frac{2(h+x)}{\mu_0 S} + R_c \right] \varphi_1 &= E; \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + cx &= -\frac{1}{z_1^2 \mu_0 S} \varphi_1^2 \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

где  $E$  – сумма э.д.с. в контурах, пронизываемых магнитным потоком (контуре, образуемом сетевой обмоткой с гармонической э.д.с., и контуре обмотки подмагничивания, на которую подано постоянное напряжение);  $R_1$  – активное сопротивление цепи.

Система уравнений (2.5.6) нелинейна. Для анализа таких систем проводится обезразмеривание переменных с целью выделения параметров различного порядка. Для этого переменные масштабируются таким образом, чтобы безразмерные были порядка 1.

$$\varphi = \varphi/(U/\omega), \quad \xi = \frac{x}{h}, \quad \tau = \omega t.$$

В безразмерных переменных уравнения переписываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\tau} + \varepsilon(a + \xi)\varphi &= \sin \tau + \varepsilon e, \\ \frac{d^2\xi}{d\tau^2} + 2\beta \frac{d\xi}{d\tau} + \nu^2\xi &= -f\varphi^2, \end{aligned} \quad (5.5.7)$$

где введены параметры:

$$\begin{aligned} a &= 1 + \frac{R_c \mu_0 S}{2h}, & \varepsilon &= \frac{2R_1 h}{\mu_0 S z_1^2 \omega}, \\ 2\beta &= \frac{b}{m\omega}, & \nu^2 &= \frac{c}{m\omega^2}, \\ f &= \frac{U^2}{\mu_0 S z_1^2 \omega^4 m h}, & \varepsilon e &= \frac{U_0}{U}. \end{aligned}$$

## Анализ решения

Используя технические особенности рассматриваемой системы, можно выделить параметры различного порядка малости. Для электромагнитов с малым сопротивлением в цепи возбуждения и малым напряжением подмагничивания параметр  $\varepsilon$  мал. При  $\varepsilon = 0$ , т.е. в случае пренебрежимо малого сопротивления, уравнения системы (5.5.7) разделяются и решаются аналитически.

При этом якорь будет совершать двухчастотные колебания с частотами  $\omega$  и  $2\omega$ .

Асимптотические методы нелинейной механики позволяют найти периодические колебания нелинейной системы (5.5.7) при малом  $\varepsilon$ , а также исследовать их устойчивость. Для этого, в частности, может быть использован метод Пуанкаре [10.Д]. Система (5.5.7) в порождающем приближении, т.е. при  $\varepsilon = 0$ , имеет семейство  $2\pi$  периодических решений, зависящих от параметра  $\alpha$ :

$$\varphi^{(0)} = \alpha - \cos \tau, \quad (5.5.8)$$

$$\begin{aligned} \xi^{(0)} = & -\frac{1}{v^2} f\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\right) + \frac{2f(v^2 - 1)\alpha}{(v^2 - 1)^2 + 4\beta^2} \cos \tau + \frac{4\beta f \alpha}{(v^2 - 1)^2 + 4\beta^2} \sin \tau - \\ & - \frac{f(v^2 - 4)}{2[(v^2 - 4)^2 + 16\beta^2]} \cos 2\tau - \frac{2\beta f}{(v^2 - 4)^2 + 16\beta^2} \sin 2\tau. \end{aligned}$$

Согласно теореме Малкина [10.Д]  $2\pi$  периодические решения исходной системы могут соответствовать лишь тем решениям (5.5.7), для которых постоянная  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$P(\alpha) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [a + \xi^{(0)}(\tau)] \varphi^{(0)}(\tau) d\tau + e = 0.$$

После подстановки порождающего решения (5.5.9) и интегрирования получаем

$$P(\alpha) = -\alpha \left[ a - \frac{1}{v^2} f(\alpha^2 + \frac{1}{2}) - \frac{2f(v^2 - 1)}{(v^2 - 1)^2 + 4\beta^2} \right] + e = 0. \quad (5.5.10)$$

Устойчивые режимы возможны, если

$$\frac{dP}{d\alpha} > 0. \quad (5.5.11)$$

Можно показать, что неравенство (5.5.11) возможно, если все три корня полинома (5.5.10) вещественны, причем устойчивый режим соответствует наименьшему по модулю корню  $P(\alpha)$ .

Вещественность корней полинома (5.5.10) определяется формулой Кордано. Приводя уравнение (5.5.10) к виду

$$P(\alpha) = a_0 \alpha^3 - a_1 \alpha + a_2 = 0$$

$$a_0 = \frac{f}{v^2}, \quad a_1 = \left[ a - \frac{f}{2v^2} - \frac{2f(v^2 - 1)}{(v^2 - 1)^2 + 4\beta^2} \right], \quad a_2 = e$$

имеем для корней следующие выражения:

$$y_1 = A + B, \quad y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad q = \frac{a_2}{a_0}$$

где

$$A = (-q/2 + \sqrt{Q})^{1/3}, \quad B = (-q/2 - \sqrt{Q})^{1/3};$$

$$Q = -\left(\frac{a_1}{3a_0}\right)^3 + \left(\frac{a_2}{2a_0}\right)^2.$$

Три различных действительных корня будет в том случае, если  $Q < 0$ , т.е.

$$\left(\frac{a_1}{3a_0}\right)^{3/2} > \frac{a_2}{2a_0}, \quad (5.5.12)$$

где, разумеется, необходимо, чтобы  $a_1$  было больше 0

$$a - \frac{1}{2\nu^2} f - \frac{2f(\nu^2 - 1)}{(\nu^2 - 1)^2 + 4\beta^2} > 0. \quad (5.5.13)$$

Таким образом, при условии, что корни уравнения (5.5.10) простые, система (5.5.7) имеет при достаточно малых  $\varepsilon$  не более одного устойчивого периодического решения, обращающегося при  $\varepsilon = 0$  в порождающее, принадлежащее семейству (5.5.9). Условия (5.5.12), (5.5.13) позволяют выбрать параметры системы  $a, f, \nu, e, \beta$ , отвечающие периодическому движению.

Как видно из (5.5.10) в случае отсутствия подмагничивания при  $e = 0$  устойчивому режиму соответствует  $\alpha = 0$ . Очевидно, что при этом колебания якоря имеют частоту  $2\omega$ .

Цель настоящей работы состоит в численном исследовании динамики электромагнитного возбудителя, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений (5.5.7).

Частота возмущения  $\nu$ , коэффициент демпфирования  $\beta$  и величина  $a$  заданы

$$\nu^2 = 1,1; \quad \beta = 0,15; \quad a = 1,2.$$

### **Задание на проведение численного эксперимента**

Численный эксперимент включает:

1. Подбор и тестирование процедуры численного интегрирования в линейном случае ( $\varepsilon = 0$ ).

Тестирование состоит в сравнении аналитического решения для вынужденных колебаний с численно полученными установившимися

колебаниями. Начальные условия как для потока  $\varphi$ , так и для скорости и перемещения якоря нулевые. Параметр  $f$  подбирается из условия, чтобы постоянная составляющая вынужденных колебаний составляла 0,25. Здесь же исследуется влияние величины шага интегрирования на величину ошибки.

Сравнение аналитического и численного решения удобно проводить графически, как функций безразмерного времени.

2. Тестирование нелинейной системы заключается в проверке того факта, что при нулевом напряжении подвозбуждения ( $e = 0$ ) установившиеся колебания имеют период  $\pi/\omega$ , т.е. происходят с удвоенной частотой.

3. Исследование нелинейной системы при  $\varepsilon \neq 0$  и  $e \neq 0$ . В этом случае путем численного интегрирования задачи Коши для уравнений (5.5.7) при нулевых начальных условиях необходимо рассчитать установившиеся периодические (периода  $2\pi/\omega$ ) колебания якоря при различных напряжениях сети (параметр  $f$ ) и напряжениях подвозбуждения (параметр  $e$ ). Для нескольких значений  $f$  при фиксированных геометрических параметрах и частоте  $\omega$  найти предельные значения  $e_{max}$ , при которых периодические движения не существуют. Построить зависимость  $e_{max}(f)$ .

### **Комментарии к работе**

Работа посвящена необычайно актуальной теме. Вокруг нас огромное количество различных вибрирующих устройств. Это, например, квартирный и школьный звонок, виброзвонок в сотовом телефоне, динамики аудиосистем, электромассажеры, перфораторы, машинки для бритья и стрижки, различные вибрационные уплотнители (земляных и гравийных насыпей, бетона, асфальтобетона), отбойные молотки, горнорудные грохоты и транспортеры. Перед большинством из этих устройств стоит задача преобразовать электрическую энергию в энергию механических или звуковых колебаний.

Самым простым способом такого преобразования является электромагнитный возбудитель колебаний. Он преобразует энергию напрямую и практически не имеет трущихся частей. Эти два преимущества позволили использовать электромагнитные возбудители везде: от звонков до горно-рудных грохотов. Широкое внедрение таких устройств было невозможно без решения одной из главных проблем – наличия режима колебаний с удвоенной частотой. Этот режим возникает из-за того, что притягивающийся сердечник является индуцированным магнитом и успевает перемагнититься (поменять полярность) за время одного периода изменения питающего напряжения. На практике такой режим выглядит как исчезновение вибраций, потому что амплитуда колебаний с удвоенной частотой в десятки раз меньше, чем при колебаниях с рабочей частотой.

Для борьбы с этим режимом применяют подмагничивание. В акустических динамиках в качестве сердечника устанавливают просто постоянный магнит. В системах по-мощнее наматывают дополнительную небольшую обмотку, которую питают автономно постоянным напряжением. Совершенно очевидно, что чем больше подмагничивание, тем больше амплитуда колебаний сердечника, но здесь появляется новая опасность – он может прилипнуть к электромагниту и вибрация снова исчезнет.

Исследованию устойчивости при подмагничивании режима колебаний с частотой переменного питающего напряжения посвящена данная работа.

Разработка теории колебаний электромагнитного возбудителя позволила, с одной стороны, правильно рассчитывать устойчивые режимы колебаний, с другой стороны отказываться от электромагнитных возбудителей там, где при работе возможно нарушение условий устойчивости.

Например, в сотовом телефоне вибровозвонк выполнен в виде эксцентрика на валу микродвигателя постоянного тока. В перфораторах применяется пневматическая ударная схема, в которой



электромотор создает избыточное давление воздуха в каналах и периодически переключает клапаны, а удар производится с помощью поршня. В подбоечных машинах, которые уплотняют железнодорожную насыпь применяются эксцентриковые механизмы. Современные вибротранспортеры так же работают на эксцентриках. Практически везде, где параметры системы нестабильны электромагнитные возбудители не применяются (например в зависимости от того, лежит ли телефон в кармане или находится в руке его необходимо описывать разными механическими моделями).

Существует несколько способов оценки времени переходного процесса, если система линейна – его скорость определяется наименьшей по модулю вещественной частью собственных чисел, если система нелинейна и имеет малый параметр, характеризующий взаимодействие ее составных частей, то время установления стационарных режимов определяется этим параметром.

В задании на проведение численного эксперимента упомянуты три режима. Первый – режим линейных колебаний, в реальном эксперименте он недостижим, так как соответствует режиму колебаний с нулевым зазором. В численном эксперименте время переходного процесса определяется демпфированием и составляет  $\frac{3}{\beta}$  – это ориентир для выбора промежутка интегрирования.

Второй режим соответствует уже нелинейной системе и вполне может быть получен на практике при нулевом подмагничивании. Можно убедиться, что после окончания переходного процесса амплитуда колебаний падает на порядок, а частота удваивается. Так как переходный процесс определяется взаимодействием отдельных частей системы с малым параметром  $\varepsilon$ , то время переходного процесса составляет порядка  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Это при малых  $\varepsilon$  может быть значительно дольше, чем в первом случае.

В работе исследуется процесс установления стационарного режима и потери устойчивости, при этом особенности методов интегрирования могут существенно удлинить переходный процесс и сместить границу устойчивых режимов, так как искажают реально демпфирование, поэтому необходимо правильно выбрать и обосновать метод интегрирования дифференциальных уравнений.

## **5.6. РАБОТА №6. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ РОТОРНЫХ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ**

### **Цель работы**

Определение собственных частот и форм крутильных колебаний системы с несколькими степенями свободы и исследование их зависимости от распределения инерционных и жесткостных характеристик системы.

### **Построение модели**

**Составление расчетной схемы и дифференциальные уравнения движения.**

При исследовании крутильных колебаний, возникающих в роторных системах, часто используются расчетные схемы с сосредоточенными параметрами, представляющие собой совокупность абсолютно твердых тел, связанных между собой безынерционными упругими элементами. Инерционные свойства системы характеризуются моментами инерции твердых тел, а ее упругие свойства – жесткостями (или податливостями) на кручение упругих элементов.

Наиболее простыми являются роторные системы с последовательным соединением инерционных и упругих элементов. Расчетной схемой такого рода систем может служить безынерционный упругий вал с насаженными на него массивными

дисками. Моменты инерции дисков и жесткости участков вала между дисками определяются стандартными методами [10].

Дифференциальные уравнения движения данной системы могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\theta}_1 &= C_{12}(\theta_2 - \theta_1); \\
 &\dots \\
 I_i \ddot{\theta}_i &= C_{i,i+1}(\theta_{i+1} - \theta_i) - C_{i-1,i}(\theta_i - \theta_{i-1}); \\
 &\dots \\
 I_n \ddot{\theta}_n &= C_{n-1,n}(\theta_n - \theta_{n-1}),
 \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

где  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  – угол поворота  $i$ -го диска в неподвижной системе координат;  $I_i$  – момент инерции  $i$ -го диска;  $C_{i,i+1}$  – жесткость вала между  $i$ -м и  $i+1$ -м дисками.

В векторной форме уравнения (5.6.1) принимают вид

$$I\ddot{\theta} + C\theta = 0, \tag{5.6.1}$$

где  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ ;

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_{12} & -C_{12} & 0 & \dots & 0 \\ -C_{12} & C_{12} + C_{23} & -C_{23} & \dots & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_{23} + C_{34} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{n-1,n} \end{bmatrix}.$$

При этом  $I$  и  $C$  имеют соответственно диагональную и трехдиагональную структуру.

### Определение частот и форм крутильных колебаний

При определении спектра собственных колебаний решение системы (5.6.2) разыскивается в виде

$$\theta = V \sin(pt + \alpha), \quad (5.6.3)$$

где  $V$  – постоянный вектор, характеризующий соотношение между различными обобщенными координатами;  $\alpha$  – начальная фаза. При этом частота  $p$  и вектор  $V$  удовлетворяют матричному уравнению

$$(C - p^2 I)V = 0. \quad (5.6.4)$$

Условие существования ненулевого решения  $V$  однородной алгебраической линейной системы (5.6.4) приводят к характеристическому уравнению

$$\det(C_p^2 I) = 0. \quad (5.6.5)$$

Корни данного уравнения дают совокупность собственных частот

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n.$$

Собственные формы определяются как решения систем линейных алгебраических уравнений

$$(C - p_i^2 I)V_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.6.6)$$

Для однозначного определения решений системы (5.6.6) используется условия нормировки  $\|V_i\|^2 = 1, i = 1, \dots, n$ .

## Основные вычислительные схемы

В настоящее время для численного определения частот и форм собственных колебаний используются эффективные вычислительные алгоритмы нахождения собственных чисел и векторов вещественной матрицы, т. е. решения задачи

$$(A - \lambda_i E)u_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.6.7)$$

Большинство методов осуществляет одновременное определение собственных чисел и векторов в процессе приведения матрицы  $A$  к специальному виду (диагональному или верхнему треугольному). При этом наиболее точно определяются наибольшие по величине собственные числа и соответствующие им собственные векторы.

Приведение задачи (5.6.6) к виду (5.6.7) может быть выполнено одним из следующих способов:

$$(p_i^2 E - I^{-1}C)V_i = 0 \quad (5.6.8)$$

при этом  $A = I^{-1}C, \lambda_i = p_i^2, u_i = V_i$ ;

$$(p_i^2 E - I^{-1/2}CI^{-1/2})(I^{1/2}V_i) = 0 \quad (5.6.9)$$

при этом  $A = I^{-1/2}CI^{-1/2}, \lambda_i = p_i^2, u_i = I^{1/2}V_i, I^{-1/2} = \text{diag}\{1/\sqrt{I_i}\}_{i=1}^n$ ;

$$(C^{-1}I - \frac{1}{p_i}E)V_i = 0. \quad (5.6.10)$$

при этом  $A = C^{-1}I, \lambda_i = 1/p_i^2, u_i = V_i$ ;

Использование соотношений (5.6.8), (5.6.9) позволяет наиболее точно вычислить высокие частоты и соответствующие им формы

колебаний. При использовании соотношений (5.6.10) с большей точностью определяются низшие частоты и формы. Необходимо учесть, что матрица жесткостей в случае крутильных колебаний роторных систем вырожденная. Для ее регуляризации с сохранением структуры к первому и последнему элементам следует прибавить малую величину  $\varepsilon = C/10^5$ , что соответствует введению слабых упругих связей с неподвижным основанием для первого и последнего дисков. При этом наименьшая частота будет ненулевой и примерно равна  $\sqrt{2\varepsilon/\Sigma I_i}$ . Остальные формы должны исказиться на величину порядка  $\varepsilon$ .

### **Задание на проведение численного эксперимента**

1. Вычислить частоты и собственные формы крутильных колебаний четырех- и восьмимассовой системы, пользуясь (5.6.8)-(5.6.10) по заданным параметрам установок. Оценить точность метода. Выбрать лучший.

2. Выбранным методом провести анализ зависимости собственных частот и форм колебаний от величин моментов инерции и жесткостей, указанных преподавателем.

### **Комментарии к работе**

Для того, чтобы выполнить работу, необходимо ответить на вопрос, зачем нужен анализ спектральных характеристик крутильных и изгибных колебаний механических систем.

Действительно, этому анализу посвящен целый раздел такого прикладного пакета, как ANSYS, часто собственные частоты и формы колебаний определяются экспериментально и в обязательном порядке просчитываются, для турбин, кинематических цепей двигателей внутреннего сгорания, фундаментов атомных электростанций, лафетов ракетных установок и так далее.

Конечно, важно знать, что собственная частота не совпадает с рабочей частотой колебаний, но, например для фундаментов это не актуально, так как сильного периодического воздействия на них, со

стороны например турбины нет. Потом, для исключения резонансных режимов достаточно знать частоту колебаний, а значительно более сложные вычисления собственных форм – не проводить.

Для ответа на вопрос рассмотрим реакцию роторной системы на внешнее гармоническое возбуждение.

Вместо (5.6.1) получим

$$I\ddot{\theta} + C\dot{\theta} = M_0 \sin \omega t, \quad (5.6.11)$$

где  $M_0 = [m_1, m_2, \dots, m_n]^T$  – амплитуды гармонических моментов, приложенных к сосредоточенным массам роторной системы.

Можно представить частное решение системы (5.6.11) в виде ряда по собственным векторам  $V_k$ :

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^n A_k V_k \sin \omega t \quad (5.6.12)$$

После подстановки (5.6.12) в (5.6.11), получим

$$-\omega^2 I \sum_{k=1}^n A_k V_k \sin \omega t + C \sum_{k=1}^n A_k V_k \sin \omega t = M_0 \sin \omega t,$$

или, так как  $\sin \omega t \neq 0$  ни на каком на связном промежутке:

$$-\omega^2 I \sum_{k=1}^n A_k V_k + C \sum_{k=1}^n A_k V_k = M_0. \quad (5.6.13)$$

Так как из (5.6.1) следует, что

$$C \sum_{k=1}^n A_k V_k = I \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k V_k$$

Тогда из (5.6.13) получим

$$-\omega^2 I \sum_{k=1}^n A_k V_k + I \sum_{k=1}^n p_k^2 A_k V_k = M_0. \quad (5.6.14)$$

Нам необходимо разыскать константы  $A_k$ . Для этого вернемся к (5.6.1) домножим обе части уравнения на  $V_j$

$$V_j^T (C - p_i^2 I) V_i = 0. \quad (5.6.15)$$

Аналогично, домножив уравнение для индекса  $j$  на  $V_i$ , получим

$$V_i^T (C - p_j^2 I) V_j = 0. \quad (5.6.16)$$

В силу симметрии  $C$ :  $V_i^T C V_j = V_j^T C V_i$ , следовательно, если вычтем (5.6.16) из (5.6.15) получим

$$(p_i^2 - p_j^2) V_i^T I V_j = 0.$$

То есть из симметрии  $C$  следует ортогональность собственных форм с весом  $I$ . Домножив обе части уравнения (5.6.14) на  $V_j$ , можно вычислить константы разложения  $A_j$  из уравнений

$$(-\omega^2 + p_j^2) A_j V_j^T I V_j = V_j^T M_0. \quad (5.6.17)$$

То есть, в нерезонансных режимах при  $\omega \neq p_j$ :

$$A_j = \frac{V_j^T M_0}{(-\omega^2 + p_j^2) V_j^T I V_j}. \quad (5.6.18)$$



Таким образом, зная частоты и формы колебаний можно сразу же вычислить реакцию системы на внешнее гармоническое воздействие в виде ряда

$$\theta(t) = \sum_{j=1}^n \frac{V_j^T M_0}{(-\omega^2 + p_j^2) V_j^T I V_j} V_j \sin \omega t. \quad (5.6.19)$$

Никаких дополнительных уравнений решать не нужно. Именно в этом заключается главная ценность анализа спектральных характеристик крутильных и изгибных колебаний механических систем. Зная, например, частоту и амплитуду колебаний почвы при землетрясении, можно рассчитать напряженно-деформированное состояние фундамента атомной электростанции, если известны его частоты и формы колебаний. Причем, не обязательно все, так как часто  $p_j \sim j$ , то достаточно взять 2-3 формы с частотами выше рабочей частоты вынужденных колебаний  $\omega$ .

Таким образом, в случае крутильных колебаний, одним из основных условий, которое должно выполняться, при использовании формулы (5.6.19) является ортогональность собственных форм с весом  $I$ . Именно ортогональность необходимо контролировать при вычислении собственных частот и форм.

## **5.7. РАБОТА №7. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЗБУДИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ С ЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ**

### **Цель работы**

Численное исследование взаимодействия возбудителя колебаний с линейной колебательной системой.

### **Возбудители колебаний**

Возбудители колебаний находят широкое применение в технике и служат для поддержания вибраций различных технических

устройств (вибрационных машин). К их числу относятся, например, вибрационные транспортеры, питатели и дозаторы, вибрационные грохоты - машины, применяемые для разделения сыпучих материалов по крупности, вибробункеры, вибрационные погружатели, виброуплотнители и т.д.

Возбудители колебаний классифицируются по характеру физических процессов, вследствие которых возникают силы, вызывающие колебания: электромеханические, гидравлические, пневматические, электромагнитные, магнитострикционные и т.д.

Электромагнитный возбудитель колебаний описан в работе №5.

Особенностью всех возбудителей колебаний является то, что динамические процессы в самом возбудителе и вызываемые им колебания механической системы оказываются взаимосвязаны. Задача о взаимодействии возбудителя колебаний (его называют источником возбуждения) с механической колебательной системой состоит в определении движения возбудителя колебаний, создающего переменные во времени механические силы, и вызываемых этими силами колебаний механической системы, связанной с возбудителем.

Задачи о взаимодействии источника возбуждения с колебательной системой называют задачами о колебаниях с ограниченным возбуждением.

## **Простейшая электромеханическая система с ограниченным возбуждением**

### **Уравнения нестационарных процессов**

В настоящей работе предлагается исследовать динамические процессы в одном из видов электромеханических возбудителей, состоящего из кривошипа с пружиной, приводимого во вращение электродвигателем, и связанного с простейшей колебательной системой (рис. 36). При вращении двигателя происходит изменение силы упругости шатуна, что вызывает колебания тела. В то же время переменный момент, вызываемый колебаниями тела, действует на

кривошип. Таким образом, движения вала и колебательной системы оказываются взаимосвязаны.

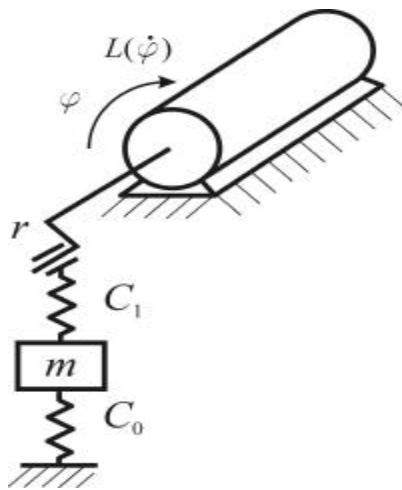


Рис. 36 Схема простейшего возбудителя колебаний

Возбудитель колебаний предназначен для работы в стационарном режиме, который устанавливается за счет изменения тех или иных регулировочных параметров, например, для шунтового электродвигателя – за счет изменения сопротивления в цепи возбуждения. Определенным значениям регулировочных параметров отвечает статическая характеристика – зависимость вращающего момента двигателя от угловой скорости стационарного вращения  $L(\omega)$ . При изменении одного из регулировочных параметров получается однопараметрическое семейство статических характеристик (рис. 37). Управление скоростью вращения двигателя с нагрузкой осуществляется надлежащим смещением статической характеристики путем изменения регулировочных параметров.

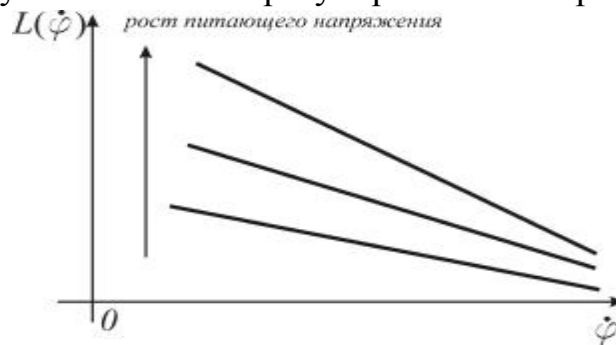


Рис. 37. Зависимость вращающего момента электродвигателя от угловой скорости стационарного вращения.

Запишем кинетическую и потенциальную энергию системы при условии, что радиус кривошипа много меньше длины пружины жесткости  $c_1$ .

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} c_0 x^2 + \frac{1}{2} c_1 (x - r \sin \varphi)^2,$$
(5.7.1)

где  $x$  – отклонение массы от положения равновесия,  $\varphi$  – угол поворота ротора,  $r$  – радиус кривошипа.

Используя эти выражения, составим уравнения Лагранжа второго рода динамики исследуемой системы

$$m \ddot{x} + c_1 (x - r \sin \varphi) + c_0 x = 0,$$

$$I \ddot{\varphi} - c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi = L(\dot{\varphi}).$$
(5.7.2)

Вводя линейное демпфирование при вертикальных колебаниях массы  $\beta \dot{x}$  и момент сопротивления вращению  $H(\dot{\varphi})$ , зависящий только от угловой скорости ротора, перепишем уравнения (5.7.2) в виде

$$m \ddot{x} + \beta \dot{x} + (c_1 + c_0) x = c_1 r \sin \varphi,$$

$$I \ddot{\varphi} + H(\dot{\varphi}) = c_1 r (x - r \sin \varphi) \cos \varphi + L(\dot{\varphi}).$$
(5.7.3)

Видим, что момент  $c_1 r x \cos \varphi$  является составной частью нагрузки на валу двигателя, которая, следовательно, зависит от колебаний. Влияние колебаний на вращение ротора будет тем сильнее, чем больше их амплитуда. Поэтому можно ожидать, что взаимодействие источника энергии с колебательной системой будет наиболее сильным в резонансной области.

### Преобразование уравнений движения. Выделение малого параметра

Для дальнейшего исследования системы (5.7.3) проведем обезразмеривание переменных. Введем безразмерное время  $\tau = \omega_* t$ , где  $\omega_*^2 = (c_1 + c_0)/m$  – парциальная частота свободных колебаний массы при неподвижном роторе, а также безразмерное перемещение  $\tilde{x} = x/r$ . Для безразмерных переменных уравнения движения (5.7.3) переписываются в виде

$$\ddot{\tilde{x}} + 2n\dot{\tilde{x}} + \tilde{x} = \frac{c_1}{\omega_*^2 m} \sin \varphi, \quad (5.7.4)$$

$$\ddot{\varphi} = \tilde{l}(\varphi) - \tilde{h}(\varphi) + \frac{c_1 r^2}{I \omega_*^2} (\tilde{x} - \sin \varphi) \cos \varphi.$$

Здесь

$$2n = \beta / (m \omega_*),$$

$$\tilde{l}(\varphi) = L(\varphi) / (I \omega_*^2),$$

$$\tilde{h}(\varphi) = H(\varphi) / (I \omega_*^2).$$

Характерной особенностью реальных электромеханических возбудителей является малость отношения  $(c_1 r^2) / (I \omega_*^2)$ , а также разности безразмерных моментов  $\tilde{l} - \tilde{h}$ . Такое вхождение малого параметра характеризует существенно более медленное изменение угловой скорости ротора по сравнению с процессами в колебательной системе.

Уравнения в безразмерных переменных с введенным малым параметром имеют вид

$$\ddot{x} + x = -2n\dot{x} + q \sin \varphi, \quad q = \frac{c_1}{c_1 + c_0}, \quad (5.7.5)$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon [l(\varphi) - h(\varphi) - (x - \sin \varphi) \cos \varphi].$$

Здесь уже  $l$  и  $h$  – величины порядка единицы. Введем далее замену переменных, называемую заменой Ван-дер-Поля,

$$x = a \sin(\varphi + \psi), \quad \dot{x} = a\dot{\varphi} \cos(\varphi + \psi), \quad \dot{\varphi} = \Theta. \quad (5.7.6)$$

Новые переменные  $a$  и  $\psi$  имеют смысл амплитуды и фазы колебаний массы  $m$  и являются функциями времени,  $\Theta$  – безразмерная угловая скорость

$$\Theta = \frac{d\varphi}{\omega_* dt}.$$

Дифференцируя первое выражение (5.7.6) и сравнивая со вторым, имеем

$$\dot{a} \sin(\varphi + \psi) + a\dot{\psi} \cos(\varphi + \psi) = 0. \quad (5.7.7)$$

Дифференцируя выражение для  $\dot{x}$  и подставляя в первое уравнение (5.7.5), получим

$$\begin{aligned} (\dot{a}\Theta + a\dot{\Theta} + 2na\Theta) \cos(\varphi + \psi) + a[1 - \Theta(\Theta + \dot{\psi})] \sin(\varphi + \psi) = \\ = \frac{c_1}{c_1 + c_0} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.7.8)$$

Уравнения (5.7.7), (5.7.8) разрешим относительно производных  $\dot{a}$ ,  $\dot{\psi}$  и, присоединяя уравнение вращения, получим систему дифференциальных уравнений эквивалентную исходной. Она более удобна для численного интегрирования, так как не содержит быстроосциллирующую переменную:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{a} = -\frac{1}{\Theta} [(a\dot{\Theta} + 2na\Theta) \cos^2(\varphi + \psi) + \\ + (1 - \Theta^2)a \sin(\varphi + \psi) \cos(\varphi + \psi) - q \sin \varphi \cos(\varphi + \psi)], \\ \dot{\psi} = \frac{1}{\Theta} [(\dot{\Theta} + 2n\Theta) \cos(\varphi + \psi) \sin(\varphi + \psi) + \\ + (1 - \Theta^2) \sin^2(\varphi + \psi) - \frac{q}{a} \sin \varphi \sin(\varphi + \psi)], \\ \dot{\Theta} = \varepsilon [l(\Theta) - h(\Theta) + (a \sin(\varphi + \psi) - \sin \varphi) \cos \varphi], \\ \dot{\varphi} = \Theta. \end{array} \right. \quad (5.7.9)$$

### Асимптотический анализ стационарных режимов

Наличие малого параметра во втором уравнении системы (5.7.5) позволяет применить для анализа как стационарных, так и переходных режимов асимптотические методы нелинейной механики.

Уравнения (5.7.5) представляют собой уравнения с одной быстрой фазой  $\varphi$  и осциллирующей переменной  $x$

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} + x &= q \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega, \\ \dot{\omega} &= \varepsilon [l(\omega) - h(\omega) + (x - \sin \varphi) \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

Примем за независимую переменную угол  $\varphi$ , тогда уравнения (5.7.10) переписутся в форме

$$\begin{aligned} \omega^2 x'' + 2n\omega x' + x &= q \sin \varphi, \\ \omega' &= (\varepsilon/\omega) [l(\omega) - h(\omega) + (x - \sin \varphi) \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (5.7.11)$$

Здесь штрихом обозначено дифференцирование по углу  $\varphi$ . Метод асимптотического интегрирования таких систем предложен В.Н. Волосовым. Для получения уравнений медленных движений нужно найти общее решение первого уравнения из (5.7.11), считая  $\omega$  параметром, а затем подставить найденное решение во второе

уравнение и усреднить по  $\varphi$ . Общее решение первого уравнения содержит экспоненциально затухающие слагаемые, но они не вносят вклада при усреднении. Поэтому для определения  $\omega$  в первом приближении достаточно внести во второе уравнение выражение для  $x$ , соответствующее стационарному решению

$$x = a \sin(\varphi + \delta),$$

$$a = \frac{q}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \quad \sin \delta = -\frac{2n\omega a}{q}, \quad (5.7.12)$$

После подстановки выражений (5.7.12) в уравнение вращения из выражений (5.7.11) получим

$$\omega' = \frac{\varepsilon}{\omega} \left[ l(\omega) - h(\omega) - \frac{n\omega a^2}{q} \right].$$

И, усредняя по  $\varphi$ , имеем уравнение меленного вращения

$$\omega' = \frac{\varepsilon}{\omega} \left[ l(\omega) - h(\omega) - \frac{n\omega a^2}{q} \right]. \quad (5.7.13)$$

Величина  $n\omega a^2/q$  называется вибромоментом. Стационарная угловая скорость определяется решением алгебраического уравнения

$$l(\omega) - h(\omega) - \frac{n\omega q}{(1 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2} = 0. \quad (5.7.14)$$

Момент сопротивления вращению  $S(\omega) = h(\omega) + n\omega a^2/q$  включает две составляющие и зависит от амплитуды колебаний при этом зависимость  $S(\omega)$  имеет резонансный характер (рис. 38).



Стационарные значения частоты вращения ротора удобно определять графически как точки пересечения графиков функций  $S(\omega)$  и  $l(\omega)$ . Это построение показывает, что решение задачи о стационарных колебаниях в общем случае неоднозначно. Эта неоднозначность обусловлена ограниченной мощностью источника возбуждения, т.к. при идеальном источнике (двигателе бесконечной мощности) кривая  $l(\omega)$  превращается в прямую  $\omega = const$ .

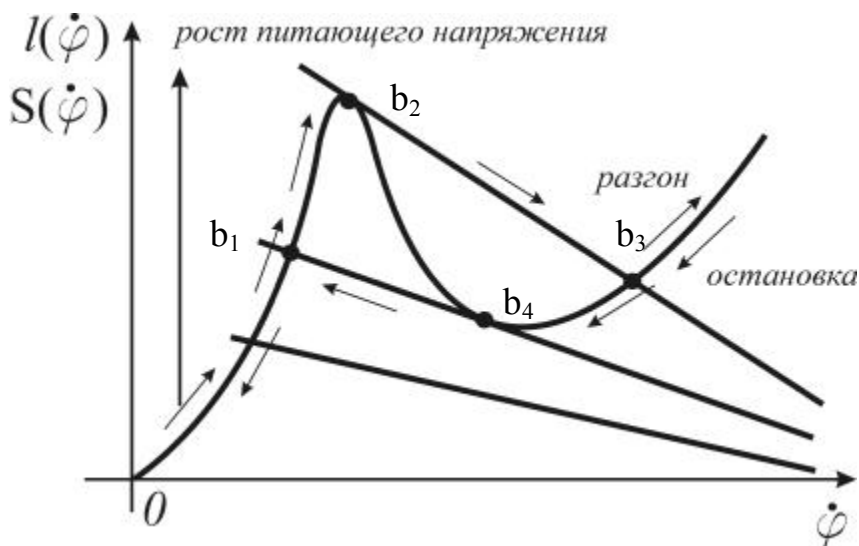


Рис. 38 Графики момента двигателя  $l(\dot{\varphi})$  (прямые) и момента сопротивления  $S(\dot{\varphi})$ . Точки пересечения – соответствуют состояниям равновесия

Необходимым условием устойчивости стационарного режима является выполнение неравенства

$$\frac{d}{d\omega}[l(\omega) - S(\omega)] < 0. \quad (5.7.15)$$

Устойчивость колебаний легко устанавливается графически. На рис. 37 точки  $b_1, b_3$  соответствуют устойчивым, а точка  $b_2$  — неустойчивым колебаниям.

При регулировании двигателя сопровождаемым увеличением мощности статическая характеристика  $l(\omega)$  смещается вверх. Это соответствует смещению вверх точки  $b_1$  по кривой  $S(\omega)$ . При достаточно остром резонансном пике увеличение стационарной частоты будет мало заметно, но амплитуда колебаний будет существенно возрастать. Когда статическая характеристика двигателя касается графика  $S(\omega)$  в точке  $b_2$ , то это положение соответствует границе устойчивости точки  $b_1$ . При дальнейшем увеличении мощности произойдет срыв колебаний: двигатель начнет разгоняться до установления нового стационарного режима, соответствующего точке  $b_3$ . Дальнейшее увеличение мощности на этом участке приводит к заметному росту частоты.

Совокупность описанных нелинейных эффектов: "застревание" двигателя вблизи резонансной частоты при квазистатическом изменении мощности двигателя, возрастание амплитуды колебаний без заметного роста частоты и "срыв" колебаний, сопровождаемый резким уменьшением амплитуды, называется эффектом Зоммерфельда.

При квазистатическом увеличении мощности (прямом переходе через резонанс) колебания с частотами в интервале между точками  $b_2$  и  $b_3$  не реализуемы. При уменьшении мощности (обратно прохождении через резонанс) не реализуемы колебания с частотами, соответствующими участку  $b_1b_2$ . При достижении границы нереализуемого участка происходит срыв резонанса, показанный на рис. 37 стрелкой.

### **Задание на проведение численного эксперимента**

Перед выполнением лабораторной работы определить диапазон изменения безразмерного момента двигателя  $l$ , сравнимого с моментом сопротивления вращению  $S(\omega)$ . Для этого, сперва, используя формулу (5.7.12), подобрать параметр демпфирования  $n$  и величину  $q$  из условия, чтобы относительная амплитуда на резонансе

не превышала 0,5. Затем, используя соотношение (5.7.14), найти характерную величину момента сопротивления  $S$ . Внешний момент сопротивления вращению считать линейно изменяющимся по частоте  $h = 0,1\omega$ .

При численных расчетах статическая характеристика двигателя полагается линейной

$$l = a_0 - b_0\omega, \quad b_0 = 0,2a_0.$$

1. Построить график, соответствующий решению уравнения (5.7.14) при различных параметрах  $a_0$ .

2. Получить численно дорезонансный стационарный режим, используя уравнения (5.7.9). Исследовать изменение стационарного режима, моделируя процесс увеличения мощности двигателя при различных параллельных статических характеристиках (увеличивая параметр  $a_0$ ). Определить параметр  $a_0$ , при котором происходит срыв колебаний.

Сравнить численно полученные параметры стационарных режимов с результатами асимптотического анализа (формулы (5.7.12), (5.7.14))

3. Построить временные зависимости амплитуды и фазы  $a(t), \psi(t)$  для статической характеристики, соответствующей прямому переходу через резонанс.

4. Задав начальные условия, отвечающие вынужденным колебаниям за резонансом, определить стационарные решения при уменьшении мощности двигателя. В частности, определить условия срыва при переходе через резонанс.

### **Комментарии к работе**

Работа посвящена исследованию совокупности эффектов, которые называются «эффект Зоммерфельда». К этой совокупности относятся: застревание на резонансе при разгоне, срыв колебаний при

разоне и торможении, наличие зоны частот, которая не входит в области устойчивых режимов движения и гистерезиса на кривых зависимостей стационарной амплитуды и частоты колебаний от напряжения питания двигателя.

Самам близким каждому современному человеку устройством, в котором проявляется эффект Зоммерфельда является автоматическая стиральная машина. В зависимости от эксцентриситета и массы белья она может раскрутиться до номинальных оборотов, может нет. В случае, если машина не может разогнаться ярко проявляется эффект «застревания на резонансе». Одним из небезопасных, но эффективных методов борьбы с этим эффектом является увеличение массы стиральной машины. Оно снижает резонансную частоту и облегчает срыв резонанса. Если массу увеличивать «интерактивно», например сесть на машину в процессе разгона, то может оказаться, что дорезонансная частота на которой «застряла» машина станет зарезонансной и разгон до номинальных оборотов произойдет очень быстро.

Помимо перечисленных в начале работы вибрационных устройств эффект Зоммерфельда проявляется также и при разгоне роторов паровых и газовых турбин, электрогенераторов, электродвигателей. Как правило, такой разгон до номинальных оборотов производится специальным небольшим электродвигателем. В противном случае, при подаче, например, пара в турбину может произойти разрушение корпуса турбины или искривление ротора из-за неравномерного прогрева. Поэтому, например, паровую турбину разгоняют до рабочей частоты несколько часов, постепенно подают в нее пар и только после равномерного прогрева начинают на номинальных оборота крутить уже паром. Для электродвигателя и электрогенераторов эффект Зоммерфельда проявляется при балансировке роторов и проведении испытаний, когда раскурчивание производится относительно маломощным мотором и вращающий момент передается через податливую штангу. Эта податливость мало

сказывается при номинальных оборотах, но может вызвать застревание на резонансе.

Особенно важно, с практической точки зрения, отличать эффект Зоммерфельда, вызванный взаимодействием возбудителя с возбуждаемой системой и аналогичные эффекты, возникающие, например, при кубичной нелинейности характеристик упругих элементов системы. Дело в том, что эффект Зоммерфельда относительно легко устраним, ужесточение упругих связей (например, замена соединительной муфты на более жесткую) или замена двигателя на более мощный часто решают проблемы, связанные со срывом колебаний и застреванием на резонансе. В случае кубичной нелинейности характеристик упругих элементов необходимо их заменять, что далеко не всегда возможно, а увеличение мощности двигателя может сделать эффект срыва более сильным и болезненным для системы.

Диаграмма на рис. 5.7.3 позволяет вычислить зависимости частоты стационарных режимов  $\omega_{ст}$  от напряжения на двигателе  $a_0$ . По этой зависимости можно, пользуясь (5.7.12) вычислить амплитуду колебаний в стационарных режимах. Таким образом, асимптотический анализ позволяет определить все параметры возможных для данной системы стационарных режимов.

Система уравнений (5.7.9) позволяет разделить быстрые и медленные движения первые три уравнения системы имеют маленькие по модулю правые части и связаны друг с другом, а последнее – большую правую часть и являются автономным. Это позволяет уменьшить вычислительную «жесткость» и интегрировать уравнения явным методом. Но в случае разгона, при малых угловых скоростях, правые части первых трех уравнений перестают быть маленькими, так как содержат множитель  $\frac{1}{\Theta}$ . Существует несколько вариантов решения этой проблемы. Во-первых, можно выбрать начальные условия так, чтобы они бы практически соответствовали

стационарному режиму с заданным напряжением  $a_0$ . Во-вторых, можно в дорезонансном режиме интегрировать исходные уравнения (5.7.5), а в резонансном и зарезонансном – эквивалентную систему (5.7.9). В-третьих, можно задать ступенчатый во времени алгоритм увеличения, а затем, уменьшения  $a_0$ . В этом случае за один проход можно получить все точки зависимости параметров стационарных режимов от напряжения  $a_0$ , не подбирая начальных условий для режима остановки системы.

## **5.8 РАБОТА №8. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДИССИПАЦИЕЙ**

### **Цель работы**

Исследование режимов колебаний нелинейной колебательной системы, описываемой уравнением Дуффинга. Получение резонансных характеристик. Анализ влияния начальных условий на поведение решения. Определение областей неустойчивости. Нахождение островных резонансов. Исследование существенно негармонических режимов движения.

### **Нелинейные системы с диссипацией**

В данной работе в качестве нелинейной системы рассматривается динамическая система, описываемая нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка с нелинейностью типа Дуффинга

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + x + \mu x^3 = F \cos \omega t. \quad (5.8.1)$$

Исследование посвящено весьма часто встречающейся на практике нелинейности упругих элементов и основным последствиям, к которым приводит наличие такой нелинейности. Если рассматривать режимы относительно больших перемещений, то

линейных упругих элементов вообще не существует. Влияние конструктивных нелинейностей, различных шпоночных соединений также может быть описано как кубичная нелинейность. Очень важно, проявляется она или нет в практической задаче, так как от этого зависят не только адекватность моделирования, но и инженерные подходы к решению проблем, связанных с такой нелинейностью.

### **Исследование уравнения Дуффинга с помощью метода гармонической линеаризации**

Метод гармонической линеаризации является приближенным и его применение подразумевает наличие у исходного уравнения (5.8.1) периодического решения.

Так как на практике колебания наблюдаются и необходимо определить их параметры, будем считать, что такое решение существует и представляется в виде:

$$x = a \cos(\omega t + \phi). \quad (5.8.2)$$

Используя метод гармонической линеаризации, получаем линеаризованное уравнение:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \lambda^2(a)x = F \cos \omega t, \quad (5.8.3)$$

где

$$\lambda^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} (a \cos \xi + \mu a^3 \cos^3 \xi) d\xi = 1 + 0,75a^3 \quad (5.8.4)$$

– уравнение скелетной кривой для нелинейности типа Дуффинга. Приравнявая в уравнении (2.8.3) коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , получаем систему уравнений для определения амплитуд колебаний  $a$  и сдвига по фазе  $\phi$ :

$$\begin{cases} (\lambda^2 - \omega^2)a = F \cos \phi, \\ -n\omega = F \sin \phi. \end{cases} \quad (5.8.5)$$

Решение имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a = \frac{F}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}, \\ \operatorname{tg}\phi = -\frac{2n\omega}{\lambda^2 - \omega^2}. \end{cases} \quad (5.8.6)$$

Подставив  $\lambda(a)$  в первое уравнение (5.8.6), получим уравнение относительно амплитуды. Решение этого уравнения удобно производить графическим способом. Построим для этого график зависимости  $a(\lambda)$ , рассматривая в выражении (5.8.6)  $\lambda$ , как независимый параметр. При малых значениях этот график будет иметь вид, представленный на рис. 39. Нанесем на этот же график скелетную кривую (5.8.4). (На рис. 39 изображена «жесткая» скелетная кривая с  $\mu < 0$ ). Точки пересечения обеих кривых определяют решения уравнения (5.8.6).

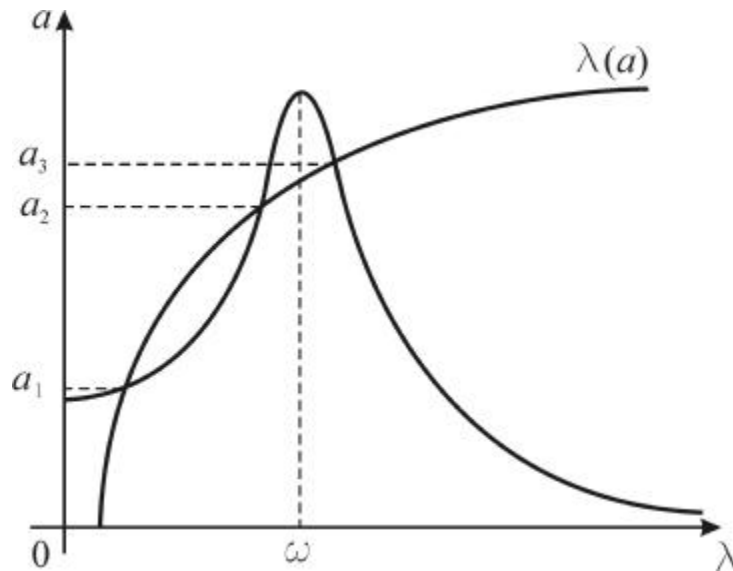


Рис. 39. Графическое решение уравнения (5.8.6)

На рис. 39 видно, что уравнение (5.8.6) может иметь несколько решений. Это означает, что в рассматриваемой системе возможно



установление различных колебательных режимов, близких к гармоническим, отличающихся амплитудой и фазой. Какой из этих режимов будет устанавливаться в действительности, зависит от начальных условий. В практических задачах начальные условия обычно не являются определенными, поэтому приходится считаться с возможностью возникновения любого из этих режимов.

Изменяя величину  $\omega$ , и определяя для каждого его значения величину  $a$  из уравнения (5.8.6), получим амплитудно-частотную характеристику системы  $a(\omega)$ , графическое изображение которой называют обычно резонансной кривой. Следует отметить, что в реальных системах амплитуда вынуждающего воздействия обычно является функцией частоты, поэтому в дальнейшем будем предполагать, что либо амплитуда вынуждающей силы пропорциональна квадрату частоты внешнего воздействия ( $f = \gamma\omega^2$ ), либо она постоянна ( $f = const$ ).

Запишем уравнение, определяющее АЧХ:

$$a = \frac{f(\omega)}{\sqrt{(\lambda^2(\omega) - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}. \quad (5.8.7)$$

Найдем точки пересечения резонансной и скелетной кривых. Если положить в уравнении (5.8.7)  $\lambda = \omega$ , то получим следующую зависимость амплитуды от частоты:

$$a = \frac{f(\omega)}{2n\omega}. \quad (5.8.8)$$

Это уравнение определяет на плоскости параметров некоторую кривую, являющуюся геометрическим местом точек пересечения резонансов кривых со скелетными кривыми. Эта линия пересекает скелетную кривую в тех же точках, что и резонансная кривая (рис. 40). Так как  $f(\omega) > 0$ , знаменатель выражения (5.8.7) при любых

значениях  $\lambda$  и  $\omega$  превышает  $2n\omega$ , точки резонансной кривой должны располагаться ниже точек кривой (2.8.8).

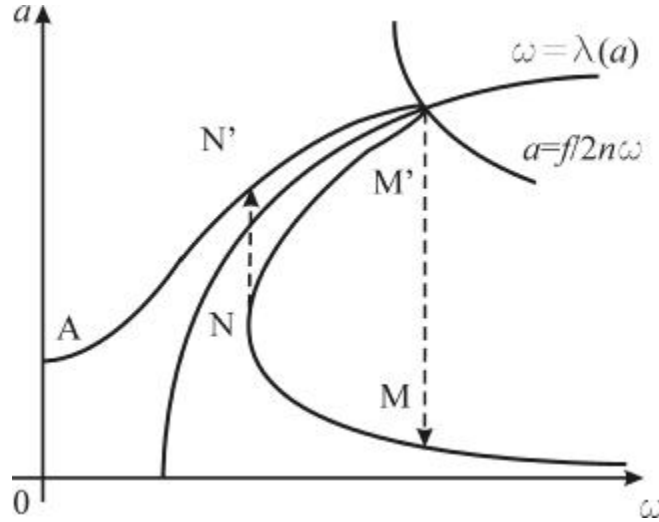


Рис. 40. Пересечение скелетной и резонансной кривых

Покажем, что кривые (5.8.7) и (5.8.8) касаются друг друга в тех точках, где  $\omega = \lambda$ . Для этого найдем производную  $\frac{da}{d\omega}$ , рассматривая (5.8.7) как зависимость, заданную в неявной форме:

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{f' \sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2} - \frac{2f \left( (\lambda^2 - \omega^2) \left( \lambda \frac{d\lambda}{da} a' - \omega \right) + 2n^2 \omega \right)}{\sqrt{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}$$

отсюда

$$\left. \frac{da}{d\omega} \right|_{\omega=\lambda} = \frac{2f'n\lambda - 2fn}{4n^2\lambda^2} = \frac{f'\lambda - f}{2n\lambda^2}. \quad (5.8.9)$$

Это выражение совпадает с выражением для производной от функции (5.8.8) при  $\omega = \lambda$ . Таким образом, построив скелетную кривую и линию (5.8.8), можно судить о форме резонансной кривой в окрестности точек ее пересечения со скелетной кривой. Поведение

резонансных кривых вдали от этих точек существенно зависит от вида функции и формы скелетной кривой.

Предположим, что  $f = const$ . Тогда кривая (5.8.8) является гиперболой. С "жесткой" скелетной кривой эта гипербола может пересекаться только один раз (рис. 39); с "мягкой" скелетной кривой она может иметь две точки пересечения (рис. 40) или не иметь ни одной (рис. 41). Приравняв производную  $\frac{da}{d\omega}$  нулю, найдем, что экстремальные значения амплитуда может принимать при

$$\omega = \omega^* = \sqrt{\lambda^2 - 2n^2} \quad (5.8.10)$$

Если  $2n^2 \ll \lambda^2$ , то  $\omega^* \approx \lambda$ , то есть экстремальные значения достигаются вблизи от точек пересечения резонансных кривых со скелетными. Теперь легко показать, что в зависимости от числа точек пересечения скелетной кривой с гиперболой (5.8.8) могут существовать резонансные кривые трех видов (рис. 40-42).

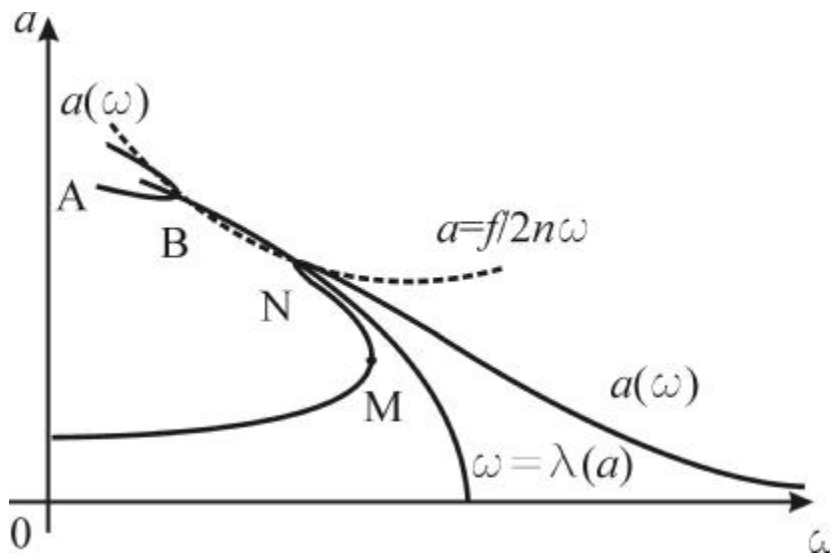


Рис. 41. Пересечение скелетной и резонансной кривых

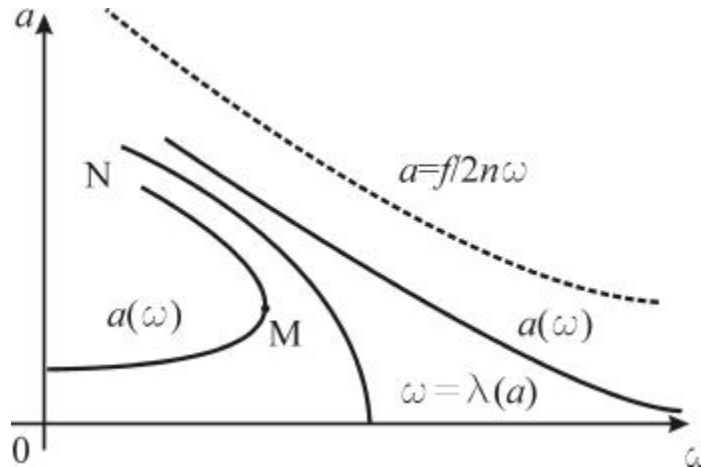


Рис. 42. Отсутствие пересечения скелетной и резонансной кривых

Рассмотрим более подробно случай, соответствующий жесткой скелетной кривой (рис. 40). Предположим, что частота внешнего воздействия медленно изменяется. Так что при каждом ее значении успевают установиться режим вынужденных колебаний. Определяя при каждом значении частоты амплитуду  $a$ , можно построить резонансную кривую. Если при этом  $\omega$  увеличивается (рис. 40), можно определить точки резонансной кривой, соответствующие участку  $AM$ .

В точке  $M$  произойдет срыв колебаний, при этом амплитуда резко уменьшится до значения, соответствующего точке  $M'$ . При уменьшении частоты от значения, соответствующего некоторой точке  $B$ , удастся получить точки резонансной кривой на участке  $BN$ . В точке  $N$  произойдет резкое увеличение амплитуды до значения, соответствующего точке  $N'$ . Получить колебательные режимы, соответствующие участку  $MN$ , вообще не удастся, поскольку соответствующие режимы являются неустойчивыми. Для случаев, соответствующих рис. 41 и рис. 42, неустойчивыми будут участки  $MN$  (рис. 41);  $MN$  и  $AB$  (рис. 41). Предположим теперь, что амплитуда внешнего воздействия пропорциональна квадрату частоты, что характерно для инерционной нагрузки

$$f = \gamma \omega^2. \quad (5.8.11)$$

В этом случае амплитуда принимает экстремальные значения также вблизи точек пересечения резонансной и скелетной кривой, приравнявая нулю производную  $\frac{da}{d\omega}$ , получаем:

$$\omega^* = \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 2n^2}}, \quad (5.8.12)$$

так что при  $2n^2 \ll \lambda^2$  имеем  $\omega^* \approx \lambda$ .

Подставив (5.8.11) в уравнение (5.8.8), получаем прямую

$$a = \frac{\gamma}{2n} \omega. \quad (5.8.13)$$

Она может пересекаться с "мягкой" скелетной кривой только в одной точке, а с "жесткой" либо в одной, либо не будет иметь точек пересечения (для скелетной кривой соответствующей нелинейности типа Дуффинга). Резонансные кривые, соответствующие этим случаям, изображены на рис. 43 - 45.

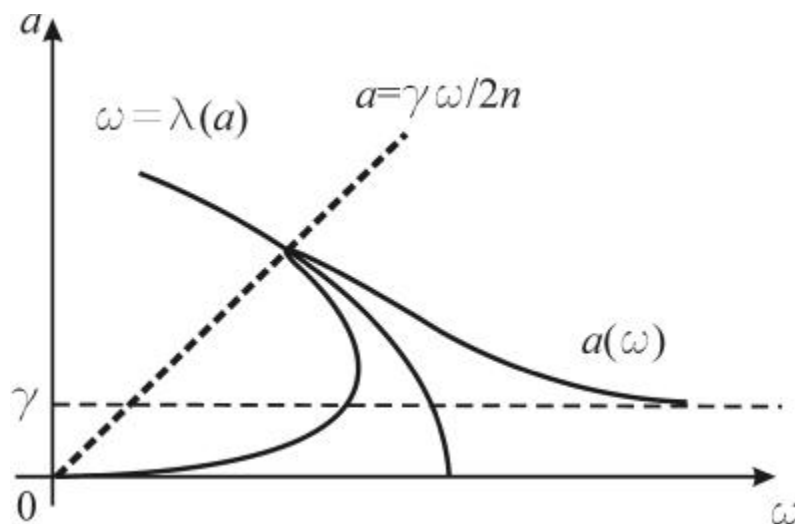


Рис. 43. Пересечение скелетной и резонансной кривых

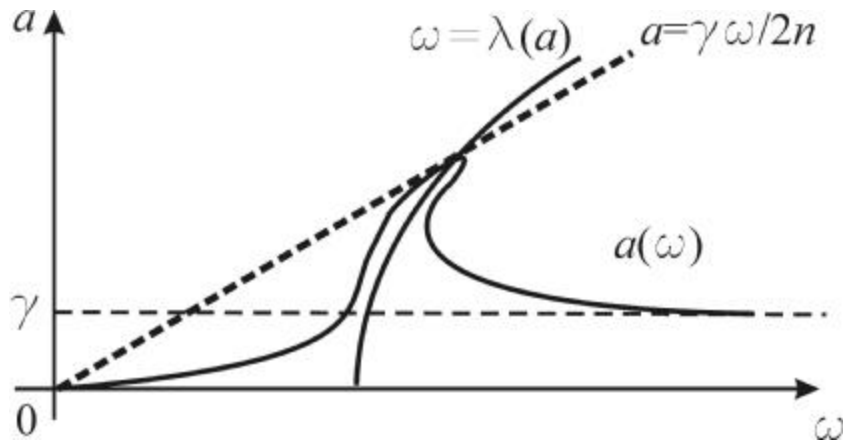


Рис. 44. Пересечение скелетной и резонансной кривых

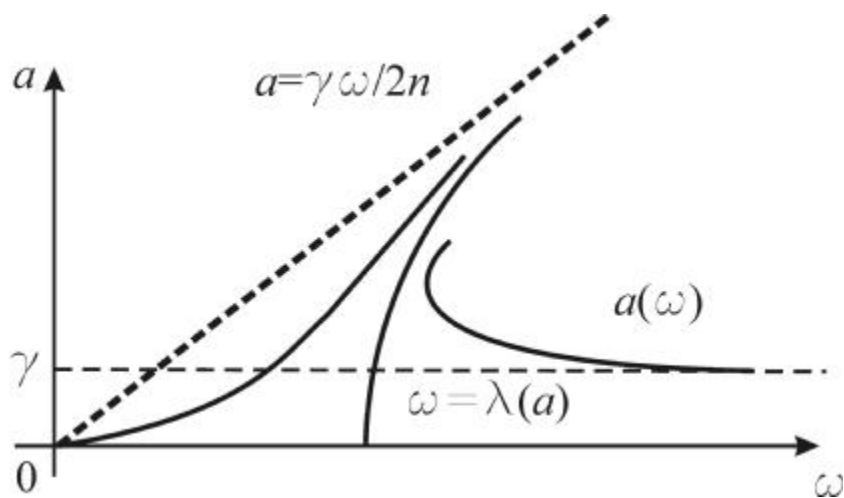


Рис. 45. Отсутствие пересечения скелетной и резонансной кривых

Определим значение параметра, при котором получаются вышеуказанные виды резонансных кривых. Для этого полагаем  $\omega = \lambda$  и подставляем (5.8.4) в (5.8.8). Получаем уравнение относительно амплитуды и определяем в зависимости от значения параметров количество вещественных положительных корней этого уравнения. Приведем полученные результаты в виде таблицы (табл.5.8.1).

Таблица 5.8.1

Значения параметра, при котором получаются различные виды резонансных кривых

$f(\omega)$	$\mu$	Количество экстремумов	Рис.
$const$	$\mu \geq 0$	1	40
	$-\frac{4n^2}{3f^2} < \mu < 0$	2	41
	$-\frac{4n^2}{3f^2} \geq \mu$	0	42
$\gamma\omega^2$	$\mu \leq 0$	1	43
	$0 < \mu < \frac{16n^2}{3\gamma^2}$	1	44
	$\mu \geq \frac{16n^2}{3\gamma^2}$	0	45

Однако метод гармонической линеаризации дает не точную картину для уравнения Дуффинга с мягкой нелинейностью. Это связано с тем, что в некоторой области частот возникает зона "неустойчивости", где не существует колебательного решения. Для объяснения этого эффекта рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0. \quad (5.8.14)$$

В случае "жесткой" скелетной кривой уравнение (5.8.14) имеет одну особую точку:  $x = 0$  типа центр, и все фазовые траектории являются замкнутыми, то есть для любых начальных условий существует устойчивый режим движения. Если же  $\mu < 0$ , то имеем три особых точки:  $x = 0$  – центр,  $x = \pm |\mu|^{-0,5}$  – два седла.

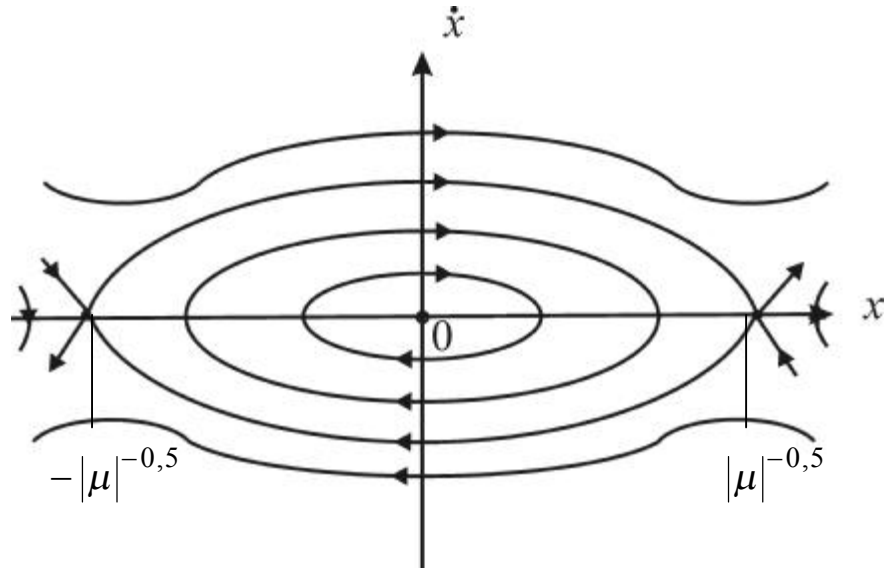


Рис. 46. Фазовые траектории системы

При введении в систему вязкого трения центр переходит в устойчивый фокус, а седла остаются седлами. Таким образом, значения амплитуд, определенные при помощи метода гармонической линеаризации из уравнения (5.8.1), превышающие величину  $|\mu|^{-0,5}$ , физически не реализуемы.

### **Исследования уравнения 2-го порядка с нелинейностью типа Дуффинга и кулоновским трением с помощью метода гармонической линеаризации**

Рассмотрим уравнение с нелинейностью типа Дуффинга и кулоновским трением

$$\ddot{x} + H \operatorname{sign}(\dot{x}) + x + \mu x^3 = F \cos \omega t. \quad (5.8.15)$$

Будем искать приближенное решение этого уравнения в виде

$$x = a \cos(\omega t + \phi). \quad (5.8.16)$$



Используя метод гармонической линеаризации, получаем линеаризованное уравнение:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \lambda^2(a)x = f(\omega) \cos \omega t, \quad (5.8.17)$$

где

$$\lambda^2(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} (a \cos \xi + \mu a^3 \cos^3 \xi) d\xi = 1 + 0,75a^3 \quad (5.8.18)$$

$$b = \frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} H \operatorname{sign}(-a\omega \sin \xi) \sin \xi d\xi = \frac{4H}{\pi a \omega} \quad (5.8.19)$$

Приравнивая в уравнении (5.8.17) коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , получаем систему уравнений для определения амплитуд колебаний  $a$  и сдвига по фазе  $\phi$ , решение которой имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{f^2(\omega) - \omega^2}}{|\lambda^2 - \omega^2|}, \\ \operatorname{tg} \phi = -\frac{h}{\sqrt{f^2(\omega) - \omega^2}} \operatorname{sign}(\lambda^2 - \omega^2). \end{cases} \quad (5.8.20)$$

Здесь  $h = 4H/\pi$ . Анализируя выражение (5.8.20), можно заметить, что при  $f(\omega) < h$  вещественных значений  $a$  не существует, то есть в этом случае не удастся найти приближенное решение гармонического вида, пользуясь методом гармонической линеаризации.

Очевиден физический смысл этого результата. Если сила сухого трения  $H$  превышает амплитуду вынуждающей силы  $f(\omega)$ , то движение объекта относительно основания не может начаться. При  $H < f(\omega) < h$ , так же не существует решение гармонического вида. Анализ показывает, что в этом случае имеет место движение с остановками.

Предположим, что  $f(\omega) = \gamma\omega^2$ , тогда решения гармонического вида получаются при  $\omega^2 > h/\gamma$ .

При  $\omega = \lambda$  амплитуда становится бесконечно большой, поэтому резонансные кривые, вообще говоря, не пересекаются со скелетной кривой. Исключение возможно только на частоте  $\omega^* = \sqrt{h/\gamma}$  при этом и числитель, и знаменатель выражения для  $a$  в (5.8.20) могут одновременно обращаться в ноль.

Найдем значения частот, при которых амплитуда принимает экстремальные значения. Для этого приравняем нулю производную

$$\frac{d(a^2)}{d(\omega^2)} = \frac{2\gamma^2\omega^2(\lambda^2 - \omega^2)^2 - (\gamma^2\omega^4 - h^2)2(\lambda^2 - \omega^2)\left(\frac{d(\lambda^2)}{d(a^2)}\frac{d(a^2)}{d(\lambda^2)} - 1\right)}{(\lambda^2 - \omega^2)^4}$$

Подставляя это выражение в (5.8.20), получим уравнения для определения экстремальных значений амплитуд

$$a = \frac{h\gamma}{\sqrt{h^2 - \gamma^2\omega^4}}. \quad (5.8.21)$$

Установим теперь некоторые свойства кривых (5.8.20) при  $f(\omega) = \gamma\omega^2$ :

Очевидно, что, если  $f(\omega) = \gamma\omega^2 = h$ , амплитуда обращается в ноль;

1. При  $f(\omega) = \gamma\omega^2 < h$  вещественных значений  $a$  не существует. Поэтому резонансные кривые выходят из точек  $\omega = \sqrt{h/\gamma}$ ,  $a = 0$  и располагаются правее линии  $\omega = \sqrt{h/\gamma}$

2. Если  $\gamma\omega^2 \gg h$ , то можно приближенно считать, что  $a = \frac{\gamma\omega^2}{|\lambda^2 - \omega^2|}$ . Очевидно, что с увеличением частоты резонансные характеристики асимптотически приближаются сверху к прямой  $a = \gamma$ .

3. Решая (5.8.20) относительно  $\omega^2$ , получаем

$$\omega^2 = \frac{a^2\lambda^2 \pm \sqrt{a^2(\gamma^2\lambda^4 - h^2) + h^2\gamma^2}}{a^2 - \gamma^2}.$$

Таким образом, каждому значению  $a$  может соответствовать не более двух вещественных значений  $\omega$ .

Если

$$a^2(\gamma^2\lambda^4 - h^2) + h^2\gamma^2 < 0, \quad (5.8.22)$$

то вещественных значений  $\omega$  не существует. Условие (5.8.22) эквивалентно двум условиям:

$$\begin{aligned} \gamma\lambda^2 &< h \\ a &> \frac{h\gamma}{\sqrt{h^2 - \gamma^2\lambda^4}} \end{aligned} \quad (5.8.23)$$

Этим условиям удовлетворяет область значений  $a$  и  $\lambda$ , лежащая на плоскости  $(\lambda, a)$  выше линии (5.8.21) (Рис. 47).

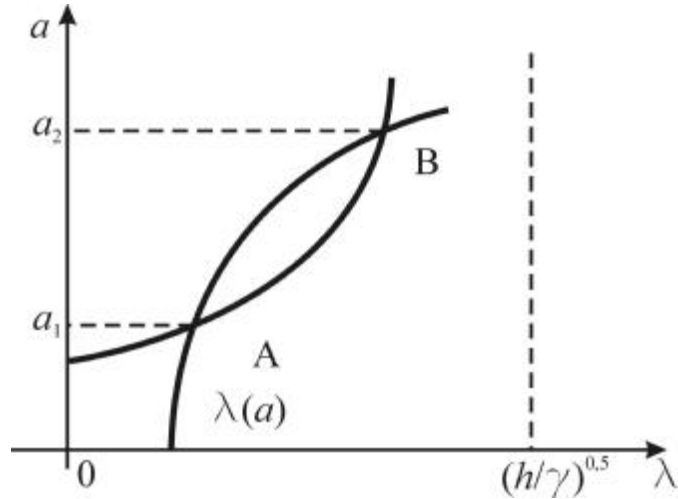


Рис. 47. Пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

При  $a_1 < a < a_2$  резонансная кривая не имеет вещественных точек. Отсюда непосредственно следует, что точки, в которых скелетная кривая пересекает линию (5.8.21), снизу вверх соответствует максимумам резонансных кривых, а точки пересечения типа В (Рис. 47) – минимумам. Найденные свойства резонансных кривых позволяют определить их форму. Учитывая вид скелетной кривой (5.8.3) для нелинейности типа Дуффинга, имеем:

для  $\mu > 0$  и  $h/\gamma < 1$  – ни одного экстремума (Рис. 48);

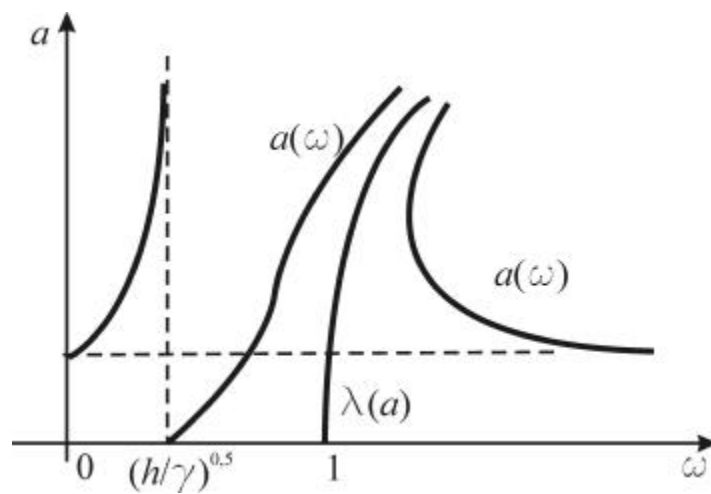


Рис. 48. Отсутствие пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

$\mu > 0$  и  $h/\gamma > 1$  – два экстремума (Рис. 49) или ни одного (Рис. 50);

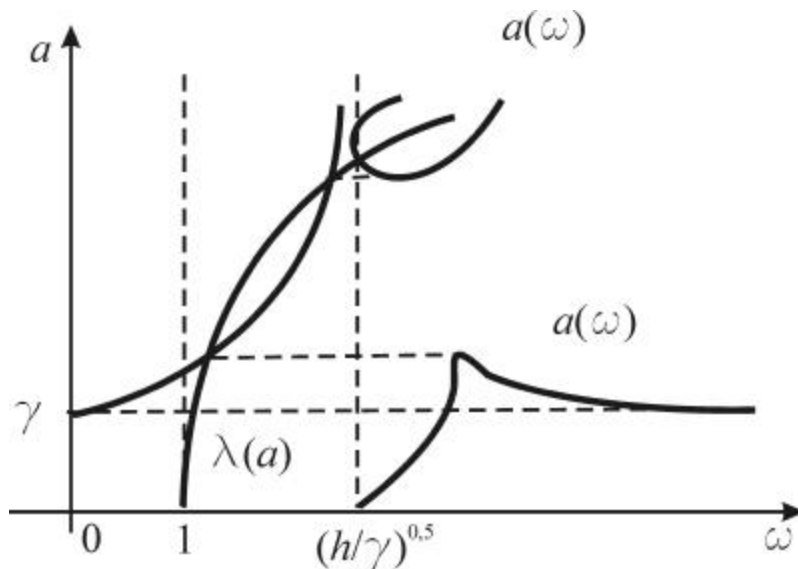


Рис. 49. Пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

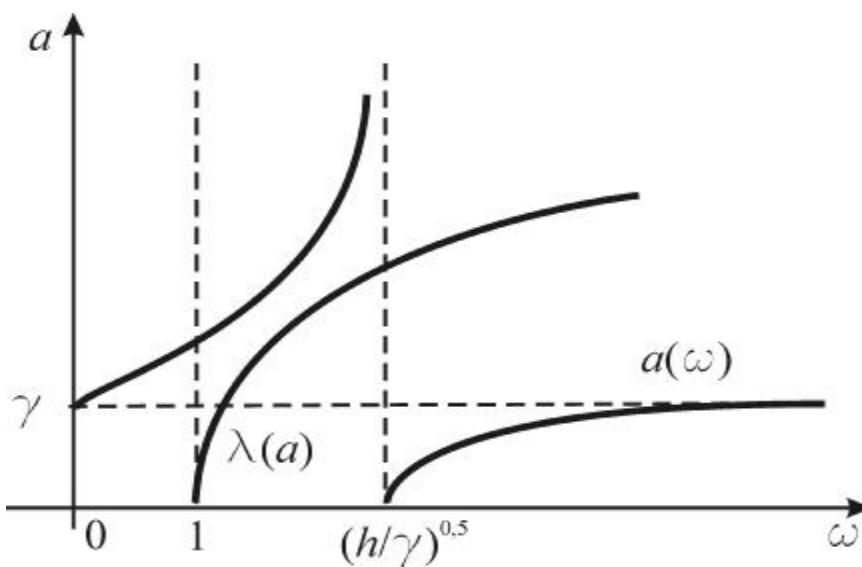


Рис. 50. Отсутствие пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

для  $\mu < 0$  – один экстремум (Рис. 51 и Рис. 52).

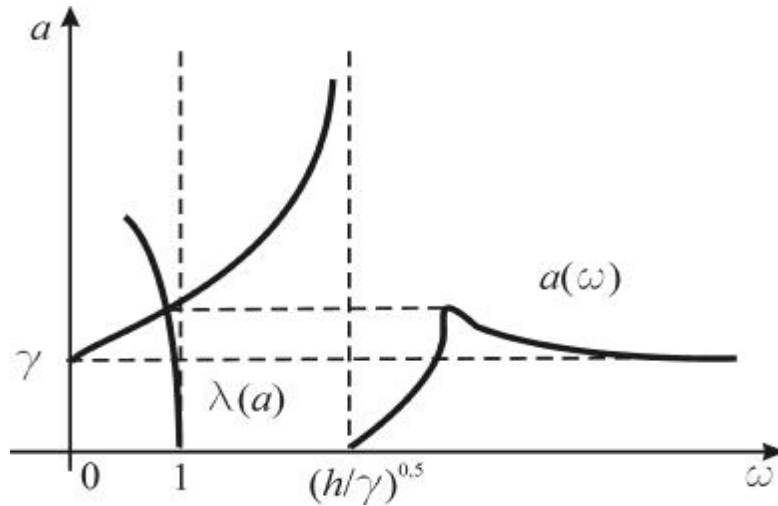


Рис. 51. Пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

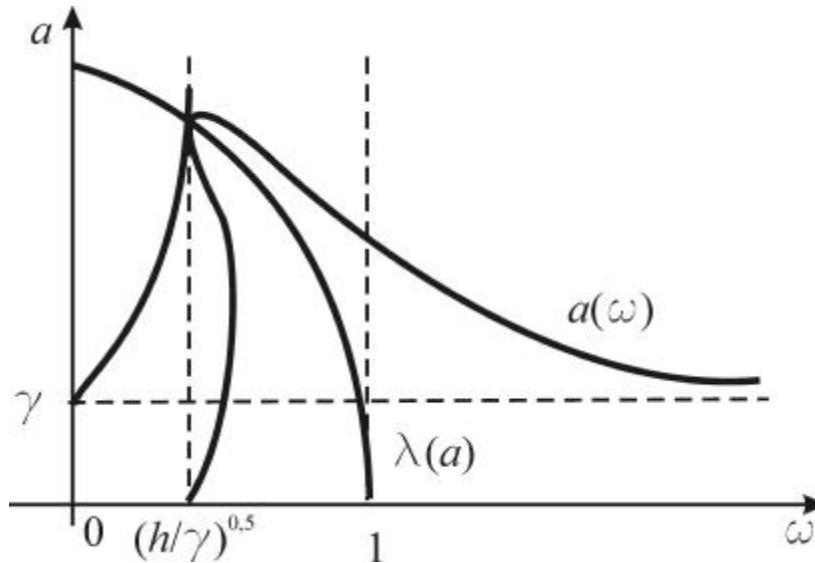


Рис. 52. Пересечения скелетной кривой и линии (5.8.21)

В отличие от вязкого трения, где нельзя было реализовать островные резонансы из-за областей неустойчивости для "мягких" скелетных кривых, здесь это возможно для случая, изображенного на рис. 49.

Все вышесказанное относится к методу гармонической линейаризации. Однако область его применимости достаточно узка. В общем случае у объекта, описываемого уравнением Дуффинга, могут быть достаточно сложные режимы движения.

В рассмотренных выше случаях мы предполагаем наличие у уравнения (5.8.1) периодического решения, однако решение может быть близким к периодическому или непериодическим. Исследование периодичности при проведении численных экспериментов удобно производить с помощью метода отображений Пуанкаре. Фазовое пространство для уравнения (5.8.1) является трехмерным  $(x, \dot{x}, t)$ . Проведем в этом пространстве плоскости  $t = 2\pi n/\omega$ ,  $n = 1, 2, \dots, t$ , отстоящие друг от друга на период воздействия внешней силы. Точки пересечения фазовых траекторий с этими плоскостями изображаем на плоскости  $(x, \dot{x})$ . Если изображающая точка остается неподвижной, то движение – периодическое, если же точка движется каким-то сложным образом, то такие режимы называют динамическим хаосом.

### **Задание на проведение численного эксперимента**

1. Составить программу численного интегрирования уравнения Дуффинга.

2. Получить для уравнения Дуффинга в случае вязкого трения и постоянной амплитуды внешнего воздействия резонансные характеристики. Исследовать области притяжения различных ветвей решения в зависимости от начальных условий. Для случая мягкой нелинейности определить на резонансных кривых области неустойчивости.

3. Получить островной резонанс для случая кулоновского трения, жесткой нелинейности и амплитуды возбуждения пропорциональной квадрату частоты возбуждения. Исследовать поведение решения в зависимости от начальных условий.

4. Получить существенно негармонические решения уравнения Дуффинга, исследовать поведение фазовой точки на отображении Пуанкаре.

Рекомендуемые параметры:

п.2:  $n = 0,2$ ;  $f = 1,0$ ;  $-0,1 < \mu < 1$ ;

п.3:  $n = 0,5$ ;  $0,1 < f < 1,0$ ;  $0,1 < \mu < 1$ ;

п.4:  $n = 0,2$ ;  $f = 50,0$ ;  $\mu = 1,0$ ;  $1,6 < \omega < 2,1$ .

### Комментарии к работе

Работа посвящена исследованию параметрического резонанса. Это явление возникает в механических системах довольно редко. С одной стороны это хорошо, с другой стороны, при проектировании конструкций инженеры его, как правило, не ожидают. Поэтому такой резонанс регулярно возникает в различных системах начиная от турбинных лопаток цилиндра низкого давления и кончая «пляшущими мостами». Характерной особенностью параметрического резонанса является экспоненциальное нарастание амплитуды колебаний. При обычном резонансе амплитуда нарастает линейно во времени. Такая разница объясняется тем, что в случае обычного резонанса энергия колебательной системы возрастает под действием периодической гармонической силы, а при параметрическом резонансе источник энергии носит, как правило, неколебательный постоянный характер. Еще одной особенностью параметрического резонанса является его чрезвычайно большая чувствительность к параметрам колебательной системы. Например изменение угла атаки крыла самолета на несколько градусов может вызвать флаттер.

Решения уравнения Матье, зоны параметрического резонанса, хорошо известны. Данная работа призвана показать, что учет даже малых дополнительных факторов, например диссипации, может принципиально изменить всю классическую структуру областей устойчивости. Это чрезвычайно важно при построении моделей механических систем, выяснении причин вибраций и разработке



способов борьбы с ними. В случае обычного резонанса незначительное увеличение демпфирования или изменение типа трения практически не даст результатов, а в случае параметрического резонанса может вообще прекратить всякие колебания.

Справедливо и обратное, самые незначительные, на первый взгляд изменения конструкции, например, введение в конструкцию упругих амортизаторов, уменьшающих жесткость системы, и даже периодическая структура опор может приводить к возникновению параметрического резонанса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие обобщает двадцатилетний опыт проведения «Вычислительных лабораторных работ». Структурно пособие состоит из двух частей. В главах 1 - 4 изложен теоретический и методический материал необходимый для выполнения расчетных заданий. Главы 1 – 3 посвящены изложению теории математического моделирования динамических систем. Глава 4 посвящена методическим вопросам подготовки, проведения работ, написания отчетов.

Вторая часть, глава 5 включает разделы 1 - 8, посвящена конкретным заданиям. Каждое задание содержит указание цели работы, перечень заданий для проведения вычислительного эксперимента, а также краткое изложение необходимого теоретического материала и комментарии. Раздел 5.1 посвящен исследованию семейства простейших одношаговых методов интегрирования, которые в литературе часто называются семейством методов Эйлера. Это исследование необходимо провести на примере хорошо известного объекта – линейного осциллятора. Раздел 5.2 посвящен исследованию одношаговых методов интегрирования высокого порядка точности, которые в литературе называются методами Рунге-Кутты, на примере Эйлера маятника. Раздел 5.3 посвящен задаче оптимального управления судном. Раздел 5.4 посвящен моделированию прохождения роторной системы через резонанс. Раздел 5.5 посвящен моделированию режимов электромагнитного возбудителя колебаний. Раздел 5.6 посвящен исследованию крутильных колебаний роторной системы. Раздел 5.7 посвящен исследованию взаимодействия колебательной системы с возбудителем колебаний. Раздел 5.8 посвящен исследованию параметрического резонанса в системах с диссипацией.

Приведенные задания являются специально подобранными классическими задачами, решения которых сопряжены с типичными для задач механики и оптимизации движения механических систем проблемами, которые надо учитывать при численном решении этих задач на ЭВМ.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Феодосьев, В.И.* Сопротивление материалов: учебник для вузов / В.И.Феодосьев.- 14-е изд., испр.- М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2007.- 590 с.
2. *Самарский, А.А.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 320 с.
3. *Тихонов А. Н.* Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. - 4-е изд. - (Курс высшей математики и матфизики; Вып.6)/ Тихонов А.Н., Свешников А.Г., Васильева А.Б. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 256 с.
4. *Хайрер Э.* Математический анализ в свете его истории/ Э. Хайрер, Г. Ваннер – М.: Научный Мир, 2008.- 386 с.
5. *Бате К.* Методы конечных элементов / К. Бате, М: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 1024 с.
6. *Кафтанова Ю. В.* Специальные функции математической физики. Том 1-3 / Ю.В. Кафтанова,– Харьков: Новое слово , 2009. – 180 с.
7. *Кафтанова Ю. В.* Специальные функции математической физики. Том 3 / Ю.В. Кафтанова,– Харьков: Новое слово , 2009. – 384 с.
8. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. – М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2009 . – 416 с.
9. *Скубов Д. Ю.* Нелинейная электромеханика / Д.Ю. Скубюов, К.Ш. Ходжаев – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 360 с.
10. *Блехман И. И.,* Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики. Изд.3/ И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.-299с.

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 460 с.
2. Д. *Гулд Х.* Компьютерное моделирование в физике: в 2 частях. / Х Гулд, Я Тобочник – М.: Мир, 1990. - 397 с.
3. Д. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей: в 2 т. / К. Флетчер – М.: Мир, 1991. – 456 с.
4. Д. *Задков В.Н.* Компьютер в эксперименте: Архитектура и программные средства систем автоматизации / В. Н Задков, Ю. В. Пономарев – М.: Наука, 1988. -386 с.
5. Д. *Тихонов А. Н.* Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола – М.: Наука, 1990. - 245с.
6. Д. *Деккер К.* Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / К. Деккер, Я. Вервер – М.: Мир, 1988.
7. Д. *Исполов Ю. Г.* Численное решение задачи Коши для конечномерных математических моделей механических систем // Механика и процессы управления. – Труды СПбГТУ, N 446, 1993. - с. 35-41.
8. Д. *Суханов А.А.* Оценка погрешности квадратурных формул для неаналитических функций //Механика и процессы управления: сб. науч. тр. Труды СПбГТУ. – СПб, 1995, № 458. – с.67-74.
9. Д. *Конonenko В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. – М.: Наука, 1964. – 254 с.
10. Д. *Вибрации в технике: справ. т.2, гл. II.* – М.: Машиностроение, 1979. – 573 с.

11.Д. *Иовлев Ю. И.* Крутильные и изгибные колебания элементов машин: учеб. пособие / Ю. И. Иовлев, З. В. Троицкая. – СПб: Изд-во ЛПИ, 1985. – 76с.

## Рекомендации по методике создания программ на алгоритмических языках программирования

Иногда бывает трудно найти программу, реализующую необходимый численный метод. В этом случае её необходимо написать самостоятельно. Также самостоятельно придется писать главную программу, осуществляющую вызов стандартных подпрограмм.

Общие рекомендации по написанию программ, позволяющие создать довольно эффективное и легко отлаживаемое программное обеспечение, таковы:

1. Подпрограмма, реализующая любой численный метод не должна быть длиннее 50-60 строк, иначе её трудно отлаживать. Если алгоритм длиннее, то необходимо разбивать его на несколько подпрограмм. При этом каждая подпрограмма должна быть максимально универсальным и автономным блоком, для того, чтобы её могли бы использовать другие алгоритмы.

Для максимальной автономии подпрограмм на языке FORTRAN необходимо, чтобы:

а) все параметры передавались через список, а не через COMMON - область;

б) все массивы, даже используемые только внутри подпрограммы, должны иметь переменную размерность и передаваться через список процедуры;

в) необходимо подробно комментировать тексты программ иначе в них трудно разобрат уже через неделю после написания, тем более, если какую либо свою подпрограмму написанную ранее необходимо применить в других программных комплексах.

В голове программы должен содержаться подробный комментированный список ввода-вывода с описанием всех переменных и параметров.

Пункт а) предотвращает возможные наложения COMMON - областей различных подпрограмм. Пункт б) предотвращает наиболее трудно выявляемые ошибки с наложением в памяти компьютера одних данных на другие из-за превышения размерности массивов, которые жестко заданы в подпрограмме.

2. Константы в подпрограмме необходимо либо задавать оператором DATA, либо передавать через список как параметры.

3. После написания каждую подпрограмму необходимо отладить отдельно на каком-либо тестовом примере. Отладочный пример должен быть простым, но достаточным для того, чтобы на нем работали все части подпрограммы. Только после отладки подпрограмму можно включать в комплекс программ, иначе отладить весь комплекс будет очень тяжело.

4. Необходимо провести тестирование всех стандартных подпрограмм, либо на прилагаемом примере, либо придумать свой пример. Такой тест поможет выявить возможные ошибки при копировании подпрограммы и даст возможность разобраться с тем, как правильно вызывать подпрограмму и использовать её.

Если действовать по предлагаемой методике, то можно быть уверенным, что ошибки возникают только в связках между подпрограммами и точно определять, где именно.

Приведем конкретный пример:

Допустим необходимо проинтегрировать задачу Коши вида

$$\dot{X} = AX$$

с начальными условиями  $X(0) = X_0$ , размерностью 5. Из стандартного программного обеспечения подбираем подпрограмму RKGS, описание которой приведено ниже:

*Подпрограмма RKGS предназначена для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с заданными начальными значениями.*

*Обращение: CALL RKGS(P,Y,F,NDIM,IHLF,FCT,OUT,AUX,M)*

## *Описание параметров*

### *Входные параметры:*

*P* - вектор входных данных с размером большим или равным 5, который определяет параметры интервала интегрирования и точности, и служит для связи подпрограммы вывода (составленной пользователем) с подпрограммой RKGS; компоненты этого вектора, кроме PRMT(5) сохраняются;

*P(1)* - нижняя граница интервала интегрирования;

*P(2)* - верхняя граница интервала интегрирования;

*P(3)* - начальный шаг независимой переменной;

*P(4)* - верхняя граница погрешности; если абсолютная погрешность больше, шаг интегрирования делится пополам; шаг интегрирования удваивается, если он становится меньше, чем *P(3)* и абсолютная погрешность меньше, чем  $P(4)/50$ ; пользователь может изменить *P(4)* при помощи подпрограммы вывода;

*P(5)* - этот элемент вектора пользователем не задается, если требуется решение системы на всем заданном интервале интегрирования (в подпрограмме RKGS этому элементу присваивается значение 0); если требуется завершить выполнение интегрирования в любой точке, необходимо присвоить *P(5)* нулевое значение в подпрограмме пользователя OUT; длину вектора *P* можно увеличить и использовать дополнительные элемент вектора для передачи данных между OUT и основной программой, вызывающей RKGS;

*Y* - вектор начальных значений (не сохраняется), становится вектором выходных переменных;

*F* - вектор весовых коэффициентов погрешности (не сохраняется); сумма его компонент должна быть равной единице; становится вектором скоростей;

*NDIM* - число уравнений системы;

*FCT(X,Y,F)* - подпрограмма правых частей;

*OUT(X,Y,F,IHLF,NDIM,P)* - подпрограмма вывода;



*AUX* - вспомогательный массив памяти размерности  $8 \cdot NDIM$ ;

*M* - всегда равно 8.

*Выходные параметры:*

*Y* - результирующий вектор зависимых переменных, вычисленных в промежуточных точках "X";

*F* - вектор производных функции "Y" в точке "X";

*IHLF* - определяет число делений пополам начального шага.

*Примечание.* Параметры *FCT* и *OUT* должны быть описаны оператором *EXTERNAL*.

Из описания ясно, что перед вызовом RKGS необходимо задать буферный массив *AUX* размерностью  $5 \times 5 = 25$ , вектор параметров *P* размерностью 5, векторы переменных и производных *Y* и *F* размерностью 5, а также написать две подпрограммы: правых частей - *FCT* и вывода - *OUT*. Передать параметры - значения элементов матрицы *A* в подпрограмму правых частей можно только через *COMMON* - блок потому что вектора параметров нет в списке этой подпрограммы. Заведем именованную область */FCTSUB/*, чтобы она не пересекалась с другими областями. Для отладочного этапа выберем матрицу *A* единичной и все начальные условия также единичными, тогда решениями должны быть пять одинаковых функций вида  $\exp(-X)$ .

Простейшая программа имеет вид:

```
DIMENSION AUX(25),Y(5),F(5),P(5)
COMMON /FCTSUB/ A(5,5)
EXTERNAL FCT,OUT
СВВОД МАТРИЦЫ ПАРАМЕТРОВ И НАЧАЛЬНЫХ
УСЛОВИЙ
DO 1 I=1,5
DO 2 J=1,5 2 A(I,J)=0.0 1 A(I,I)=-1.0
DO 3 I=1,5 3 Y(I)=1.0
СВВОД ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ
P(1)=0.0
P(2)=1.0
```

```

P(3)=.001
P(4)=.0001
DO 4 I=1,4 4   F(I)=0.25
СВЫЗОВ СТАНДАРТНОЙ ПОДПРОГРАММЫ
CALL RKGS(P,Y,F,5,IHLF,FCT,OUT,AUX,8)
STOP
END
СПОДПРОГРАММА ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ
SUBROUTINE FCT(X,Y,F)
DIMENSION Y(5),F(5)
COMMON /FCTSUB/ A(5,5) C   ЗАДАНИЕ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ
DO 1 I=1,5
F(I)=0.0
DO 1 J=1,5
1 F(I)=F(I)+A(I,J)*Y(J)
RETURN
END
СПОДПРОГРАММА ВЫВОДА
SUBROUTINE OUT(X,Y,F,IHLF,NDIM,P)
DIMENSION Y(5),F(5),P(5)
WRITE(*,*) X,Y
RETURN
END

```

После получения пяти одинаковых экспонент на экране дисплея можно в существующую программу, как в трафарет, вносить изменения, связанные с решением реальной задачи, не меняя структуру вызова стандартной подпрограммы.