



ОПТИМИЗАЦИЯ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ С НЕЦЕЛЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Выполнил студент 3641503/90101 группы
Руководитель, к. ф.-м. н., доцент
Консультант, ассистент

Муравьев А. С.
Смольников Б. А.
Смирнов А. С.



Введение

Решение задач оптимизации в механике имеет чрезвычайное значение.

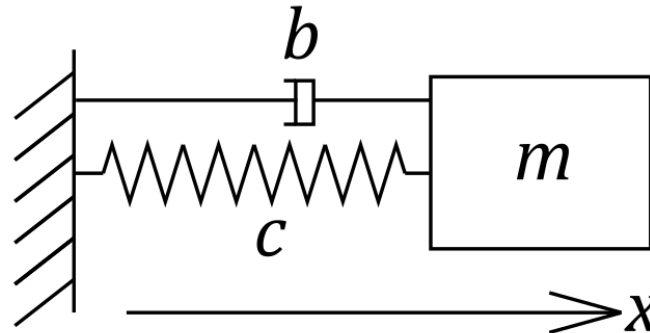
На данный момент существует немалое количество трудов, посвященных задачам оптимизации в механике. Однако все эти труды или большинство из них были посвящены системам с целым числом степеней свободы. Вместе с тем существуют и системы с нецелым числом степеней свободы, вопросам оптимизации которых не было уделено должного внимания.

В связи со сказанным, целью настоящей работы является решение задачи оптимизации для нескольких механических систем с нецелым числом степеней свободы по заранее выбранному критерию.

Так как понятие “число степеней свободы” традиционно связывалось с порядком системы и определялось как его половина, то системы с нецелым числом степеней свободы – те, что имеют нечетный порядок.

Общие сведения о системах с нецелым числом степеней свободы

1. Линейный осциллятор с бесконечно малой массой



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

При исчезающе малой массе имеем

$$b\dot{x} + cx = 0, \dot{x}_0 = x(0), x_0 = \dot{x}(0)$$

Произвольные начальные условия не удовлетворяют этому уравнению, а только такие:

$$\dot{x}_0 = -\frac{c}{b}x_0$$

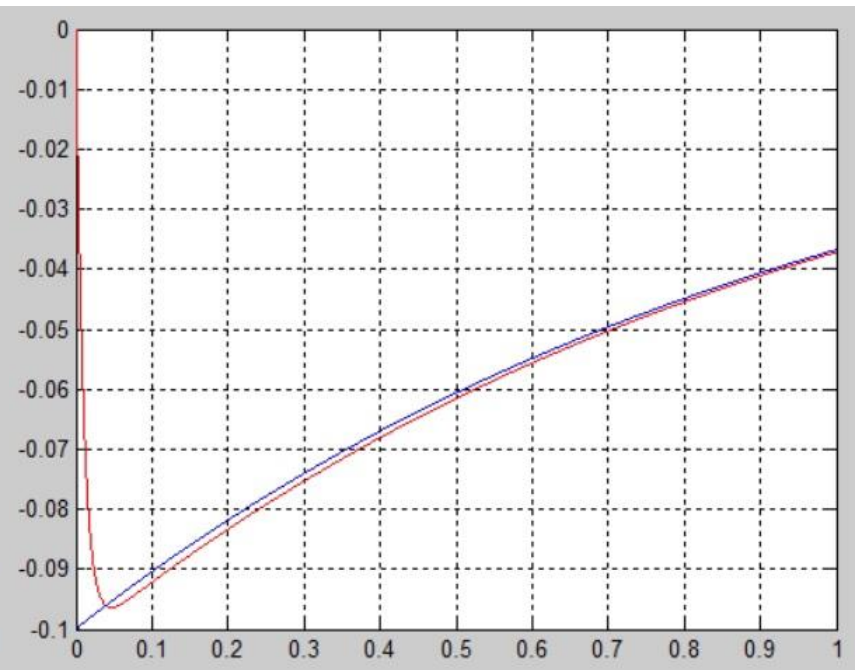
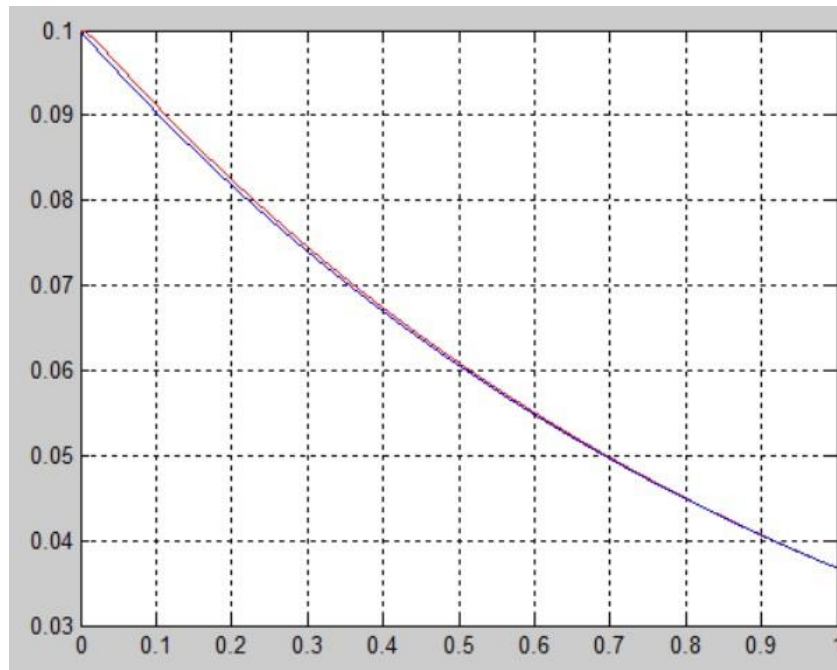


Дело в том, что на первом этапе движения с порядком продолжительности $\sqrt{m/c}$ слагаемое $m\ddot{x}$ оказывается слишком большим, чтобы им пренебречь – происходит быстрый переход \dot{x} от \dot{x}_0 до значения $-cx_0/b$.

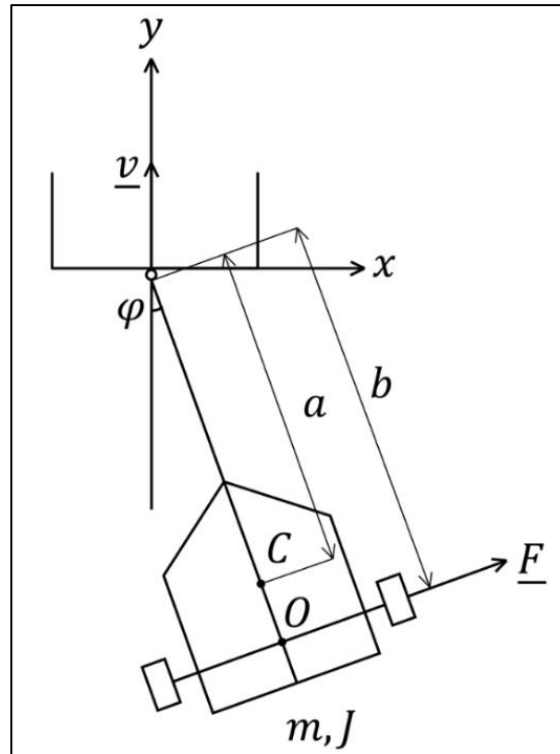
Далее движение описывается уравнением $b\dot{x} + cx = 0$ при единственном н. у. $x(0) = x_0$.

$$x = x(t)$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t)$$



2. Простейшая модель тягача с прицепом



Условие неголономной связи (оно же уравнение движения)

$$\bar{\sigma} \cdot \bar{v}_O = 0; \quad \dot{\varphi} + \alpha \sin \varphi = 0$$

Порядок системы = 1 \Rightarrow число степеней свободы = 1/2



Условия устойчивости

$$1) \rho < \sqrt{\delta(1 - \delta)},$$

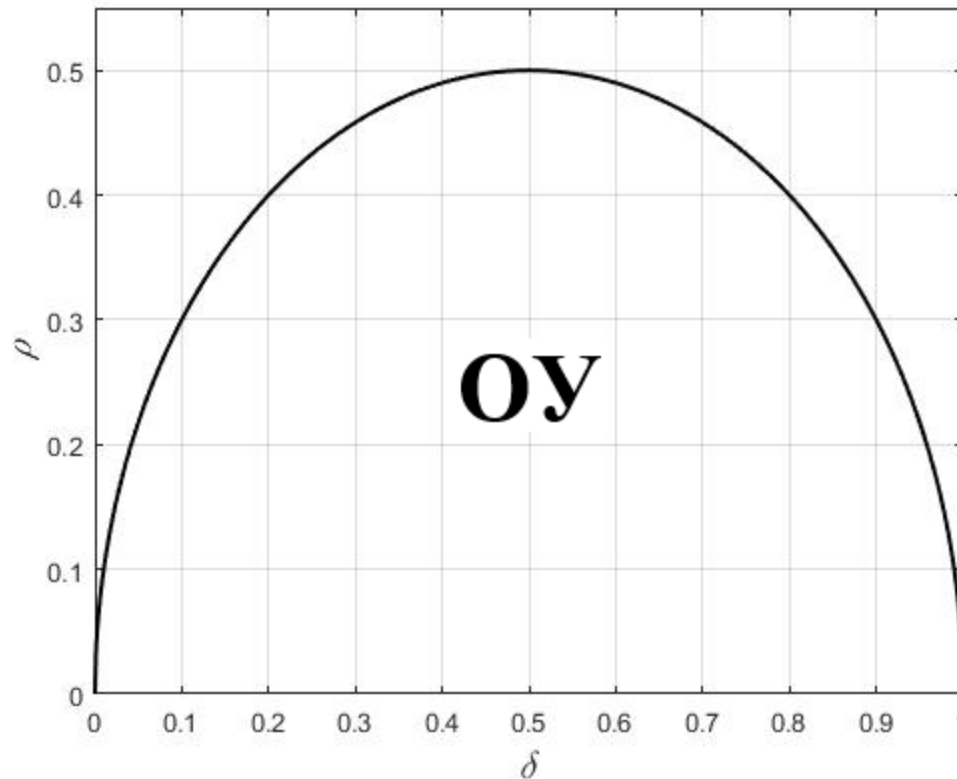
где:

$$\rho = r/b, \delta = a/b,$$

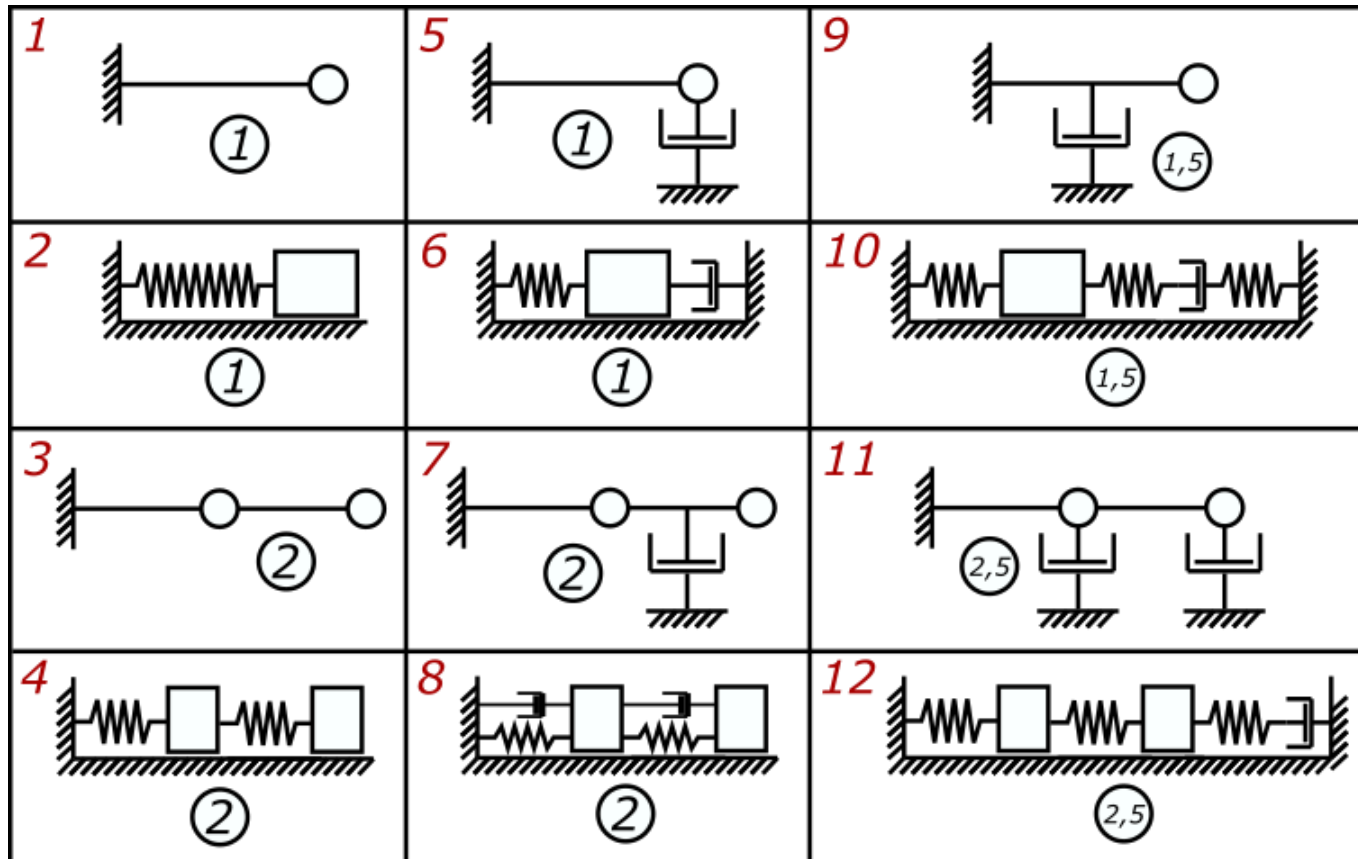
r – радиус инерции прицепа: $J = mr^2$

$$2) v > 0$$

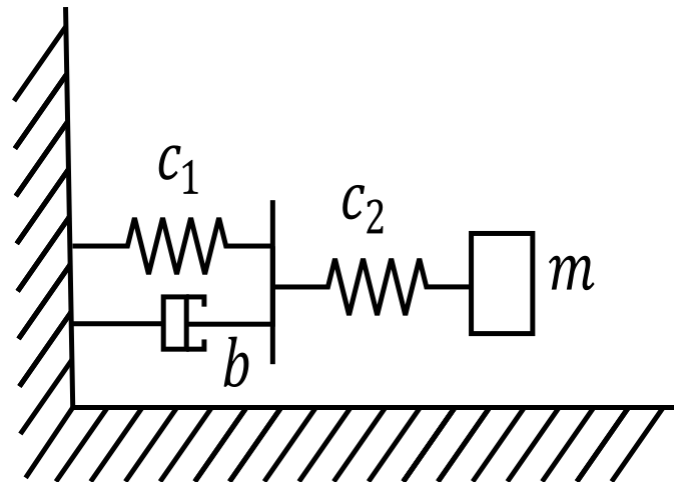
Область устойчивости



4. Нецелое число степеней свободы при введении в колебательные системы элементов трения



Пример



Уравнение движения пластинки

$$-c_1 x_1 - b \dot{x}_1 + c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

Уравнение движения груза

$$-c_2 (x_2 - x_1) = m \ddot{x}_2$$

Характеристическое уравнение

$$mb\lambda^3 + m(c_1 + c_2)\lambda^2 + bc_2\lambda + c_1c_2 = 0$$

Характеристическое уравнение = порядку системы имеет 3

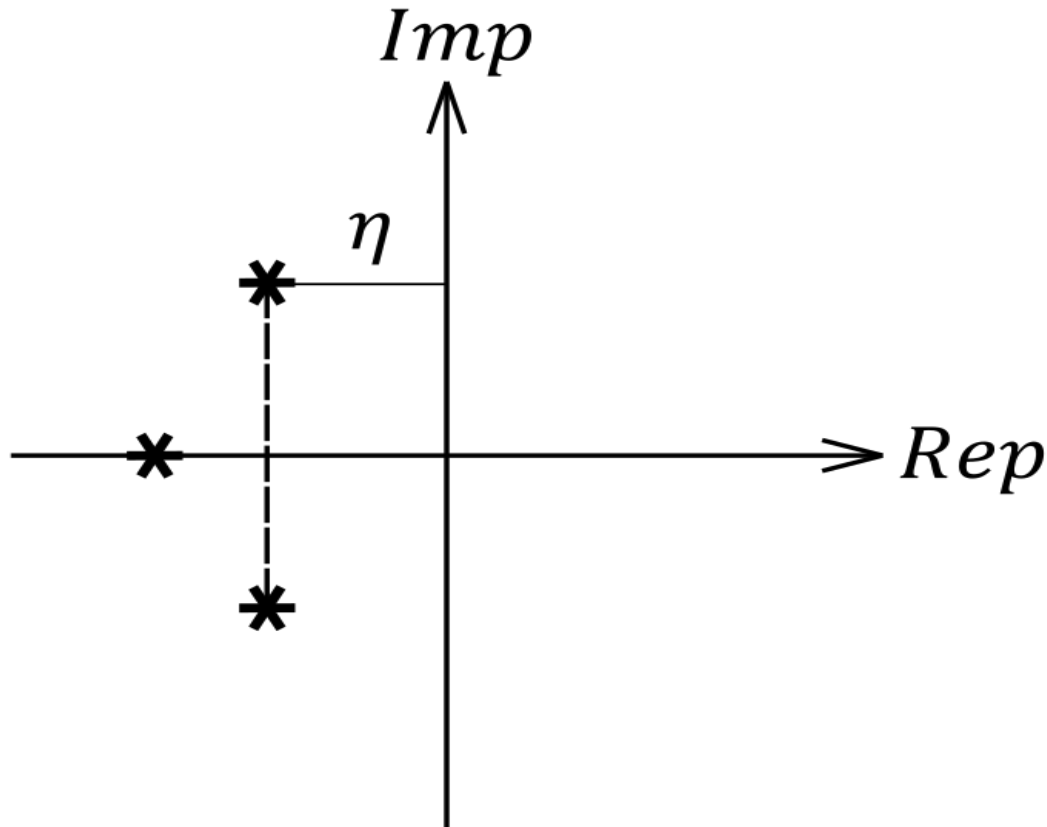
порядок => число степеней свободы равно 3/2.



Критерий оптимизации

Критерий оптимизации – максимум степени устойчивости η

Пример: система третьего порядка

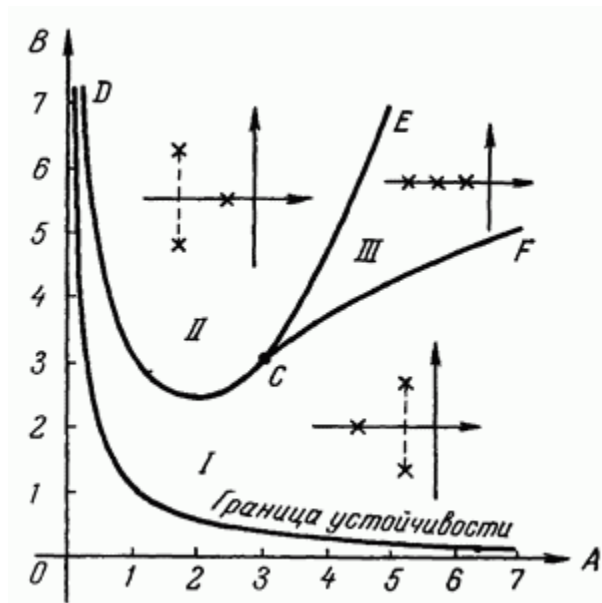


Идея вывода оптимального решения

Так как обе системы имеют третий порядок, то после приведения их характеристических уравнений к виду

$$Q(p) = p^3 + Ap^2 + Bp + 1 = 0,$$

для этих систем можно построить диаграмму Вышнеградского



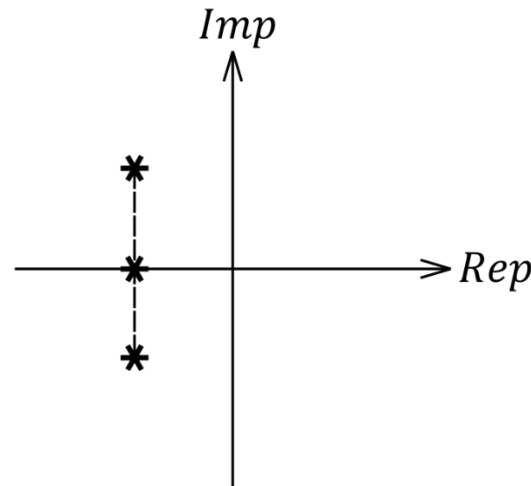
И так как оптимальная кривая находится внутри области устойчивости, то она будет разбиваться дискриминантными кривыми диаграммы на отдельные части. Следовательно, можно выводить оптимальную кривую по частям и объединить полученные результаты



1. Построение диаграммы Вышнеградского

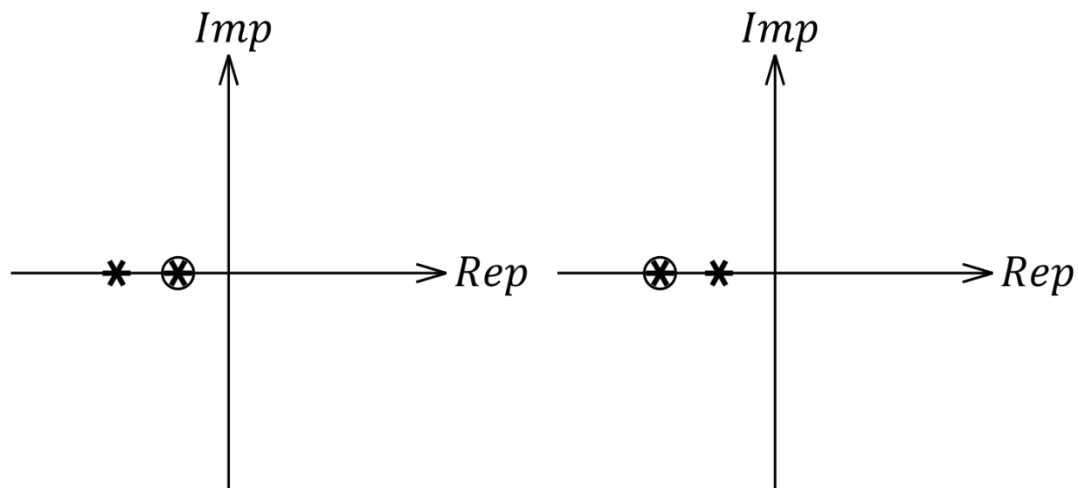
ДС: Одинаковая вещественная часть корней х.у.:

$$p = -n; -n \pm i\omega \Rightarrow \alpha(p + n)(p + n - i\omega)(p + n + i\omega) = 0$$



СФ, СЕ: Условие кратности корня характеристического уравнения

$$Q(p) = 0; dQ/dp = 0$$





2. Первый участок оптимальной кривой

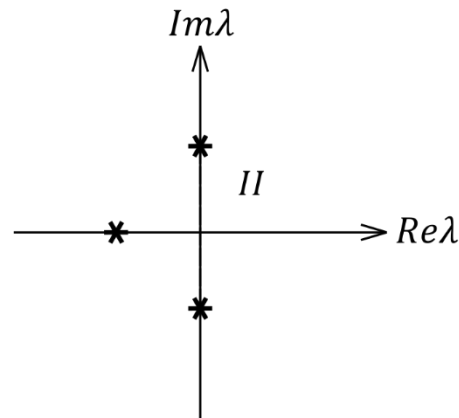
Введем в характеристическое уравнение замену переменных

$$p = \lambda - \eta$$

После подстановки получим уравнение смещенной системы

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0,$$

находящейся на колебательной границе устойчивости



Следовательно, справедливо условие

$$a_0 a_3 = a_1 a_2$$

Решая это уравнение относительно A , принимая B и η как параметры, получим выражение

$$A = A(B, \eta),$$

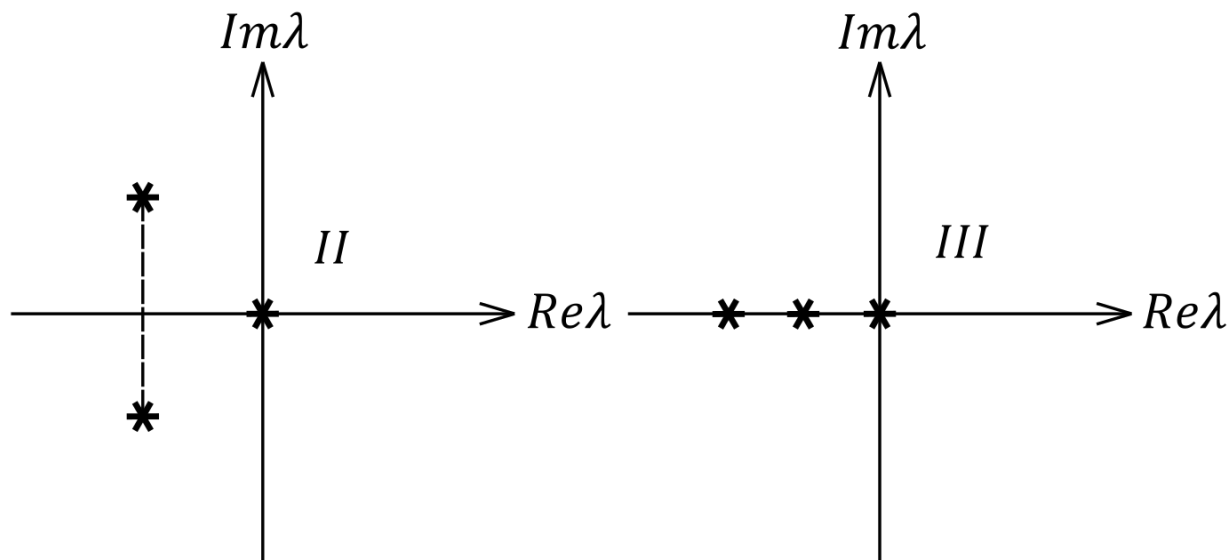
которое определяет линии равной степени устойчивости

Максимизируя η и подставляя в это выражение, получим участок оптимальной кривой



3. Второй и третий участки оптимальной кривой

Смещенная система будет находиться на апериодической границе устойчивости



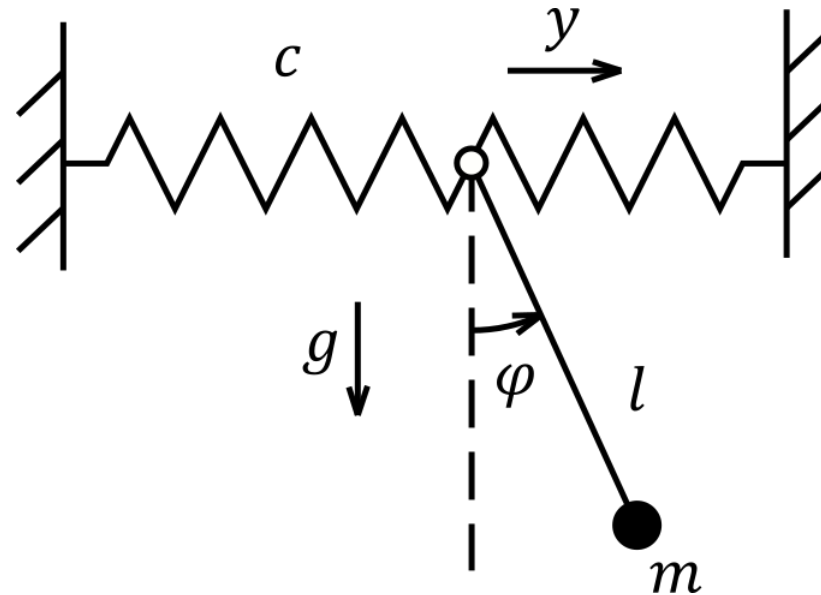
Будет справедливо условие:

$$a_0 = 0,$$

откуда также находятся линии равной степени устойчивости $A = A(B, \eta)$, одновременно принадлежащие и области II, и области III

Соответствующие участки оптимальной кривой, как и для области I, получаются путем максимизации η и подстановки $\max \eta$ в это выражение.

Подпружиненный маятник



Уравнения Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}$$

Кинетическая и потенциальная энергии

$$T = \frac{1}{2} m (l^2 \ddot{\varphi} + 2l \cos \varphi \dot{\varphi} \dot{y} + \dot{y}^2); \quad \Pi = mgl(1 - \cos \varphi) + \frac{1}{2} cy^2$$



Уравнения движения

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi} + ml \cos \varphi \ddot{y} + mgl \sin \varphi = 0 \\ m\ddot{y} - ml \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + ml \cos \varphi \ddot{\varphi} + cy = 0 \end{cases}$$

Линеаризованные уравнения движения

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + mgl\varphi = 0 \\ m\ddot{y} + ml\ddot{\varphi} + cy = 0 \end{cases}$$

После подстановки в систему

$$\begin{cases} \varphi = \Phi e^{\lambda t} \\ y = Y e^{\lambda t} \end{cases}$$

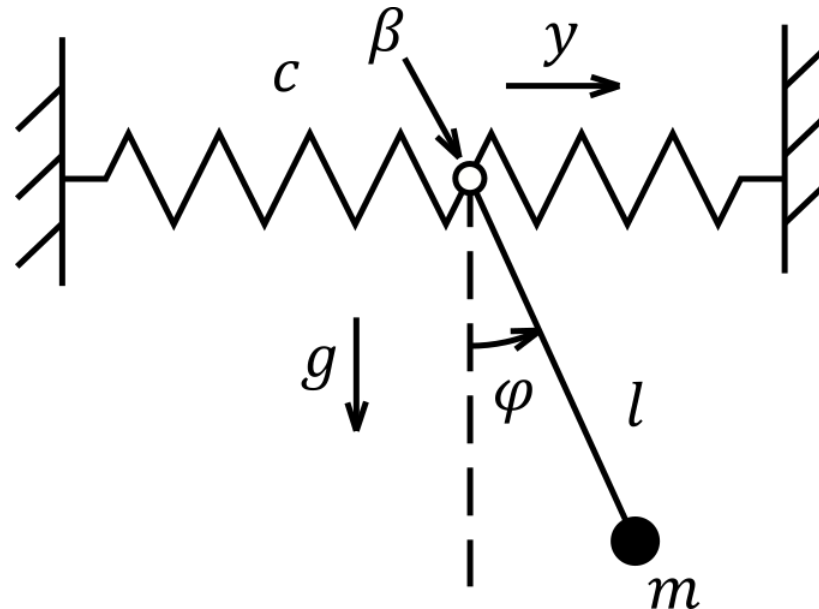
получим СЛАУ

$$\begin{cases} (ml^2 \lambda^2 + mgl)\Phi + ml\lambda^2 Y = 0 \\ ml\lambda^2 \Phi + (m\lambda^2 + c)Y = 0 \end{cases}$$

Из условия нетривиальности СЛАУ находим характеристическое уравнение

$$\left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l}\right)\lambda^2 + \frac{c}{m}\frac{g}{l} = 0$$

Подпружиненный маятник с учетом вязкого трения в шарнире



Диссипативная функция

$$\Phi = \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}$$

Линеаризованные уравнения движения

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi} + ml\ddot{y} + \beta \dot{\varphi} + mgl\varphi = 0 \\ m\ddot{y} + ml\ddot{\varphi} + cy = 0 \end{cases}$$



Характеристическое уравнение

$$\frac{\beta}{ml^2} \lambda^3 + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l} \right) \lambda^2 + \frac{\beta}{ml^2} \frac{c}{m} \lambda + \frac{c}{m} \frac{g}{l} = 0$$

Обозначим

$$k^2 = \frac{g}{l}$$

Введем масштаб

$$p = \frac{\lambda}{k}$$

Введем безразмерные параметры

$$\gamma = \frac{c}{mk^2} = \frac{cl}{mg}; \quad \nu = \frac{\beta}{mkl^2}$$

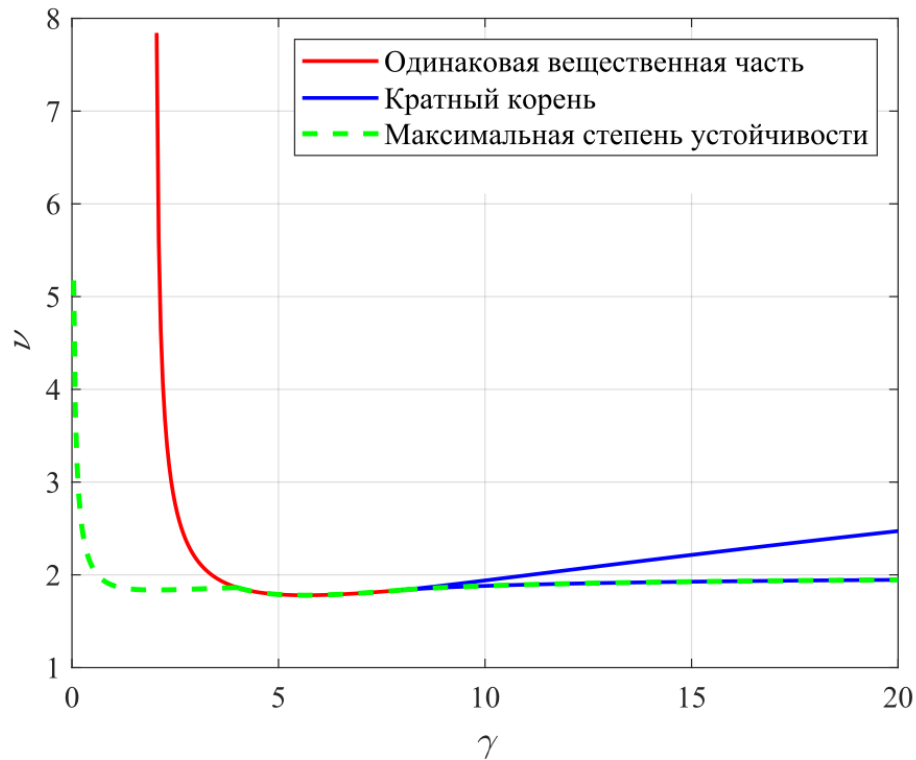
В результате получим характеристическое уравнение в безразмерном виде

$$\nu p^3 + (1 + \gamma)p^2 + \nu \gamma p + \gamma = 0$$



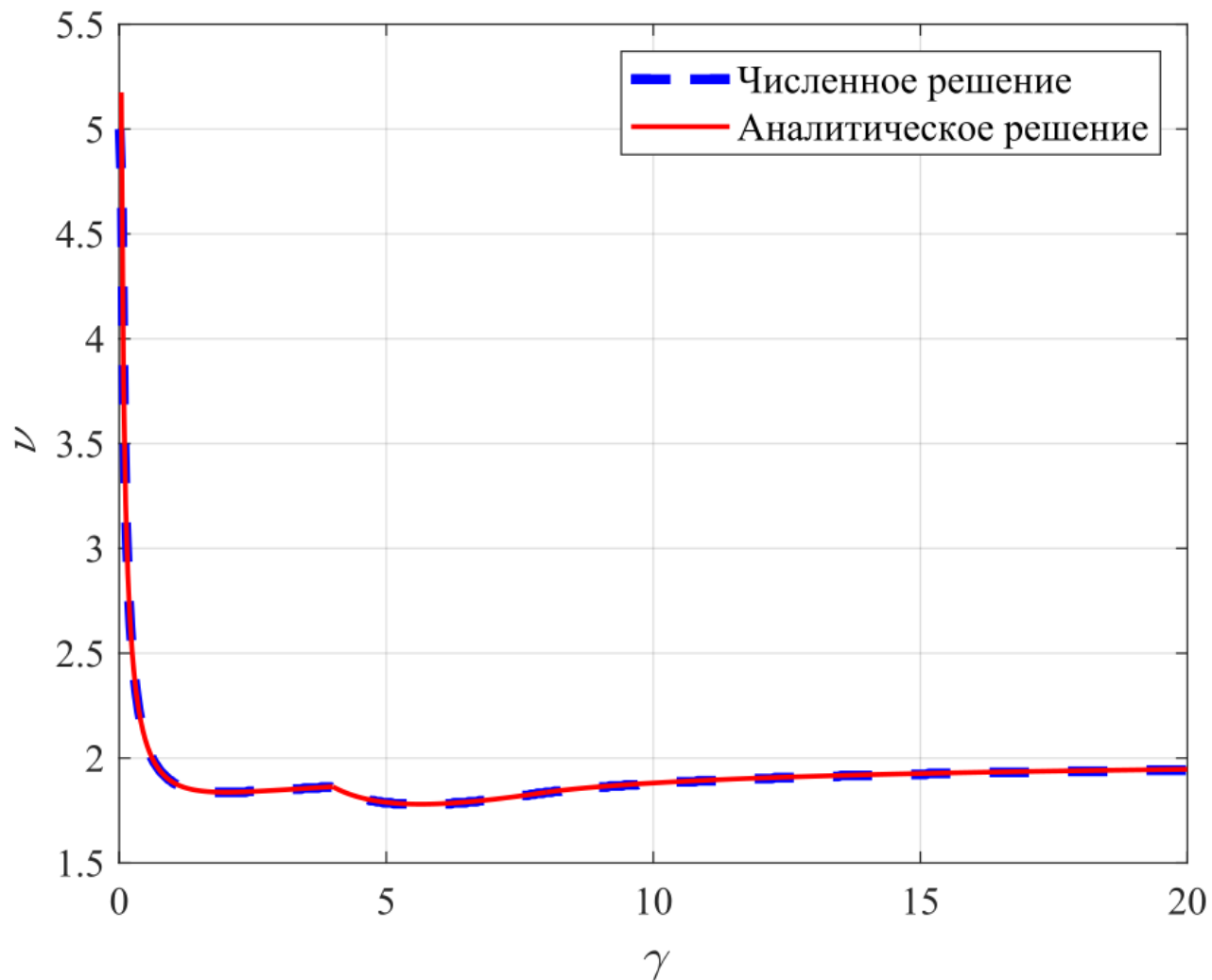
Оптимальное решение

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{2(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}(\gamma + 2)}, \quad \gamma \leq 4; \\ v(\gamma) = \frac{\sqrt{2}(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\gamma}(\gamma - 2)}, \quad 4 \leq \gamma \leq 8; \\ v(\gamma) = \frac{2\sqrt{2}(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\gamma - 2 - \sqrt{\gamma(\gamma - 8)}}}{\sqrt{\gamma} [5\gamma - 4 - 3\sqrt{\gamma(\gamma - 8)}]}, \quad \gamma \geq 8. \end{array} \right.$$



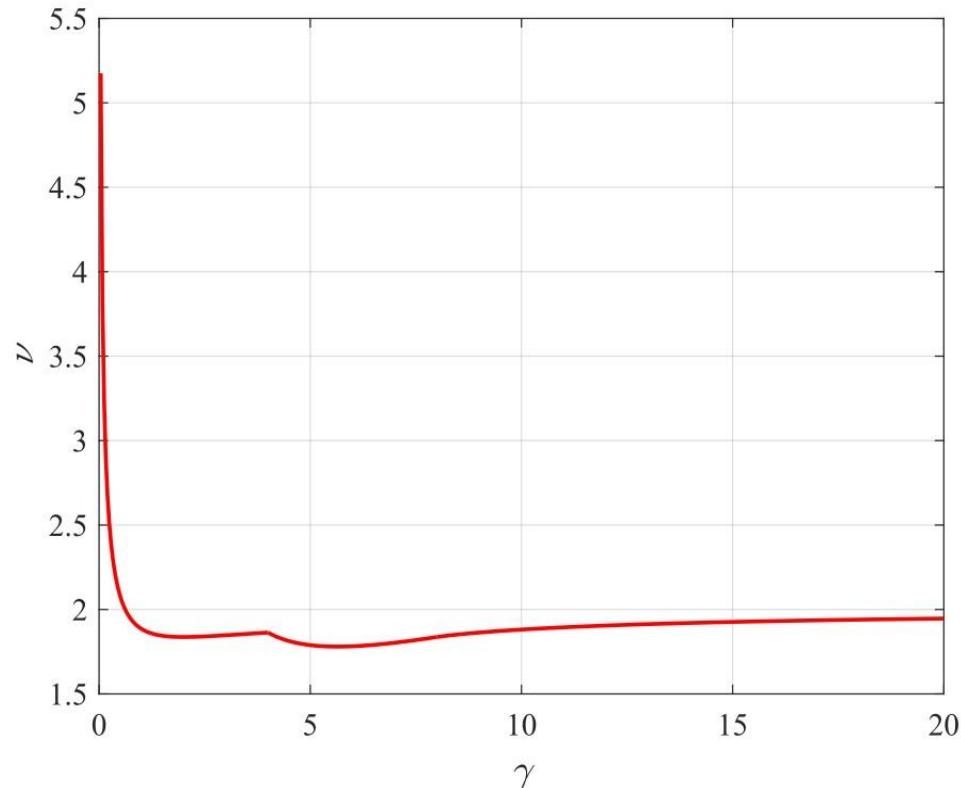


Сравнение аналитического решения с численным





Анализ поведения оптимальной кривой



Точки минимума:

$$\nu = 2; \nu = 3 + \sqrt{7} = 5.64575$$

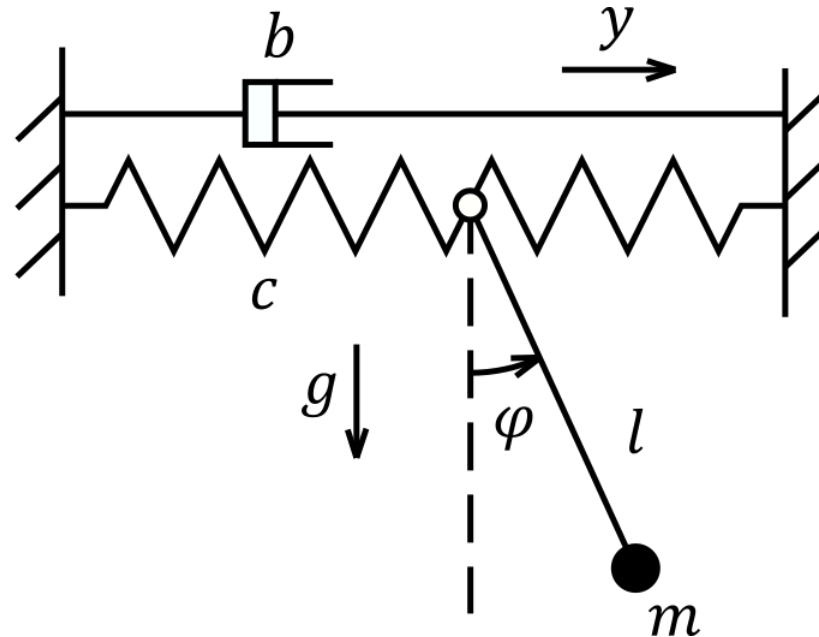
Точка негладкого максимума:

$$\gamma = 4$$

Значения оптимальной кривой в точках экстремума:

$$\nu(2) \cong 1.83712; \nu(3 + \sqrt{7}) \cong 1.78015; \nu(4) \cong 1.86339$$

Подпружиненный маятник с учетом вязкого трения в пружине



Диссипативная функция

$$\Phi = \frac{1}{2} b \dot{y}^2$$

Линеаризованные уравнения движения

$$\begin{cases} ml^2 \ddot{\varphi} + ml \ddot{y} + mgl \varphi = 0 \\ m \ddot{y} + ml \ddot{\varphi} + cy + b \dot{y} = 0 \end{cases}$$



Характеристическое уравнение

$$\frac{b}{m} \lambda^3 + \left(\frac{c}{m} + \frac{g}{l} \right) \lambda^2 + \frac{b}{m} \frac{g}{l} \lambda + \frac{c}{m} \frac{g}{l} = 0$$

Обозначим

$$k^2 = \frac{g}{l}$$

Введем масштаб

$$p = \frac{\lambda}{k}$$

Введем безразмерные параметры

$$\gamma = \frac{c}{mk^2} = \frac{cl}{mg}; \quad \nu = \frac{b}{mk}$$

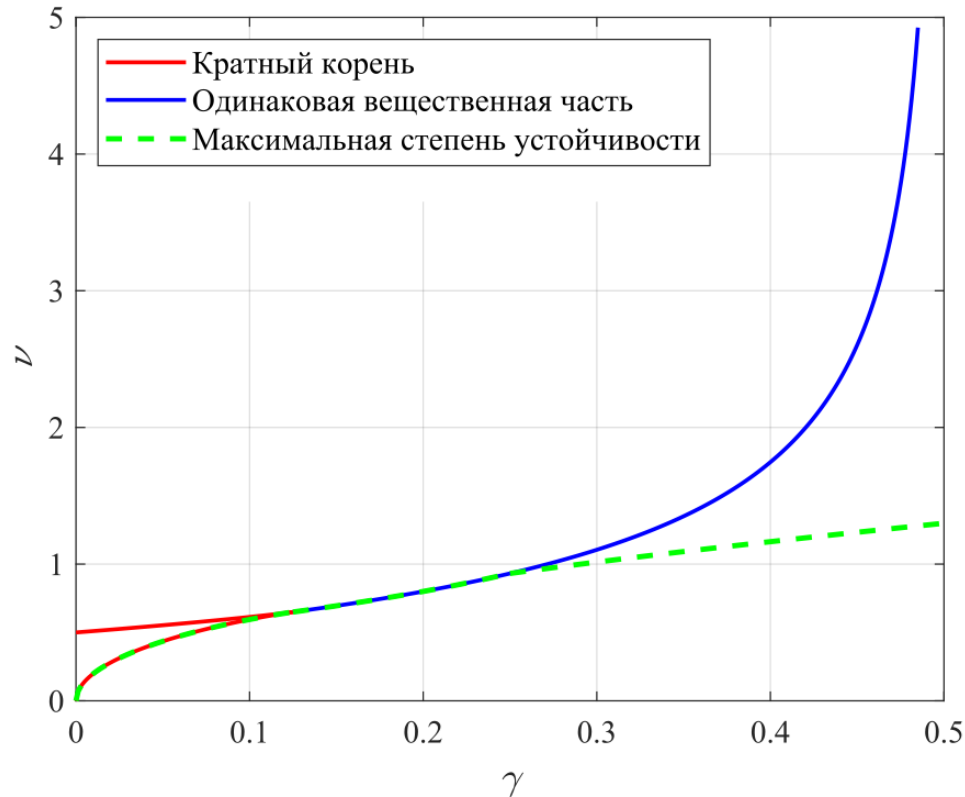
В результате получим характеристическое уравнение в безразмерном виде

$$\nu p^3 + (1 + \gamma) p^2 + \nu p + \gamma = 0$$



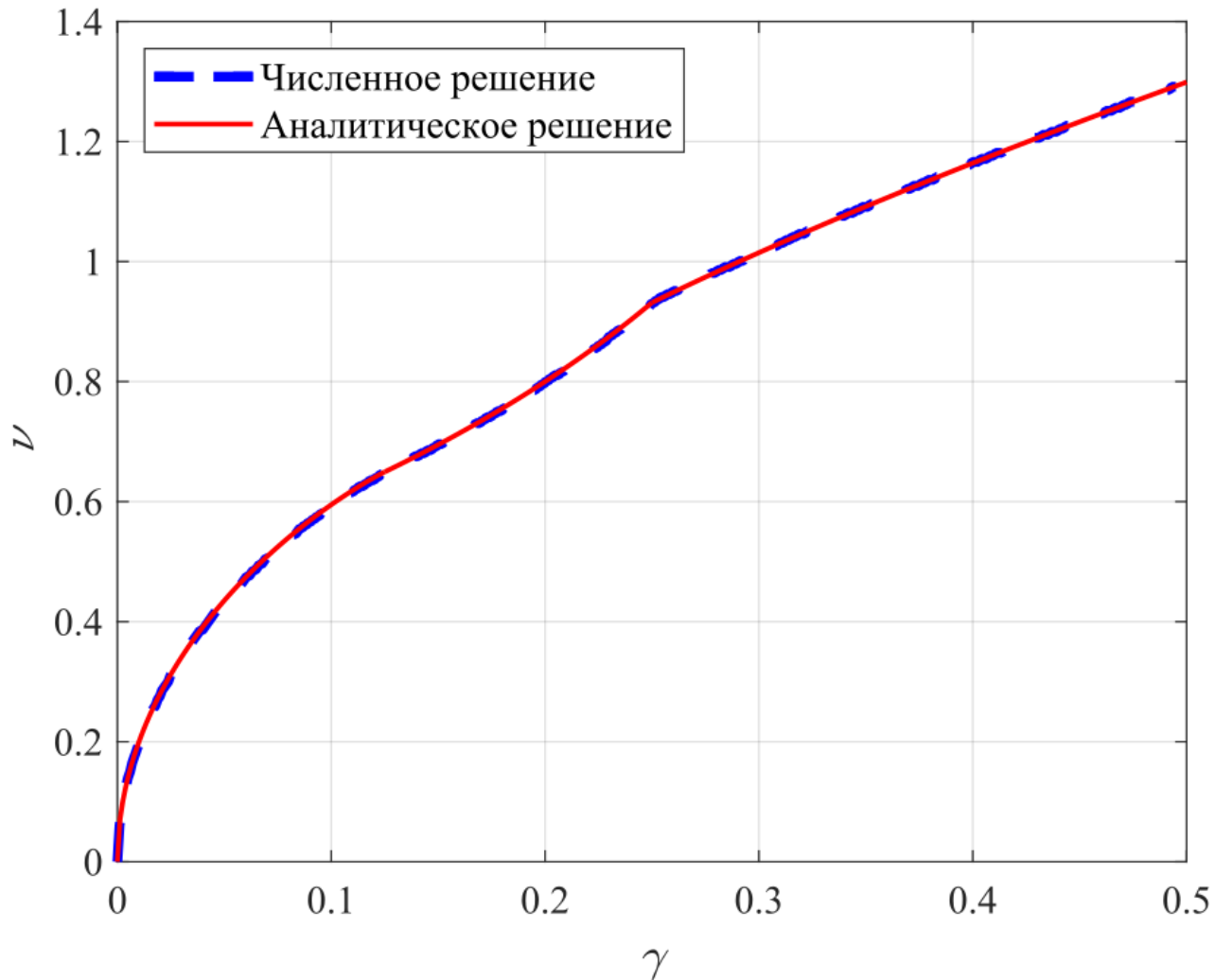
Оптимальное решение

$$v = \begin{cases} \frac{[2(1 + \gamma)]^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 - 2\gamma - \sqrt{1 - 8\gamma}}}{5 - 4\gamma - 3\sqrt{1 - 8\gamma}}, & \gamma \leq \frac{1}{8} \\ \frac{\sqrt{2}(1 + \gamma)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{(1 - 2\gamma)}}, & \frac{1}{8} \leq \gamma \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2\sqrt{\gamma(1 + \gamma)^3}}{(2\gamma + 1)}, & \frac{1}{4} \leq \gamma < \frac{1}{2} \end{cases}$$



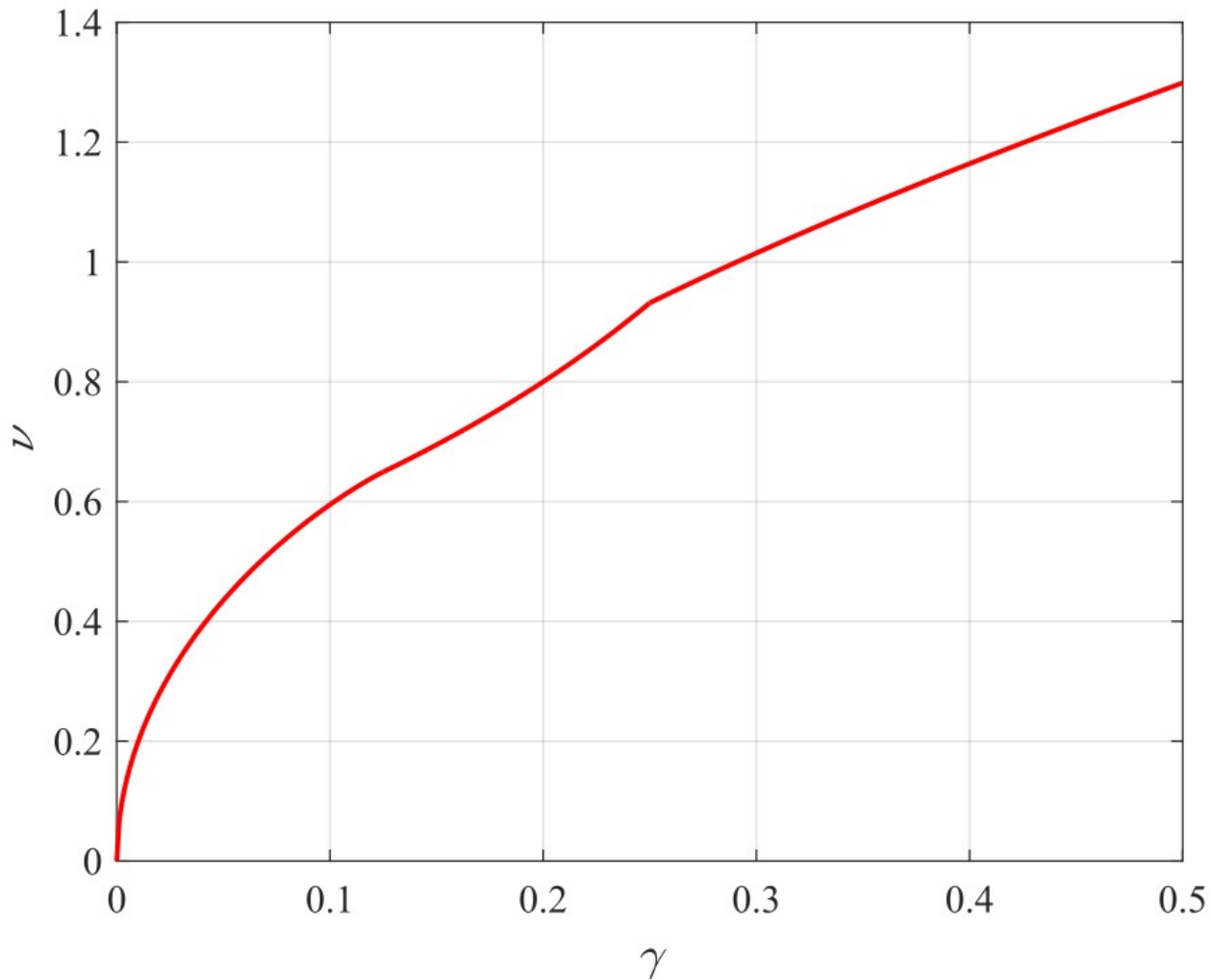


Сравнение аналитического решения с численным



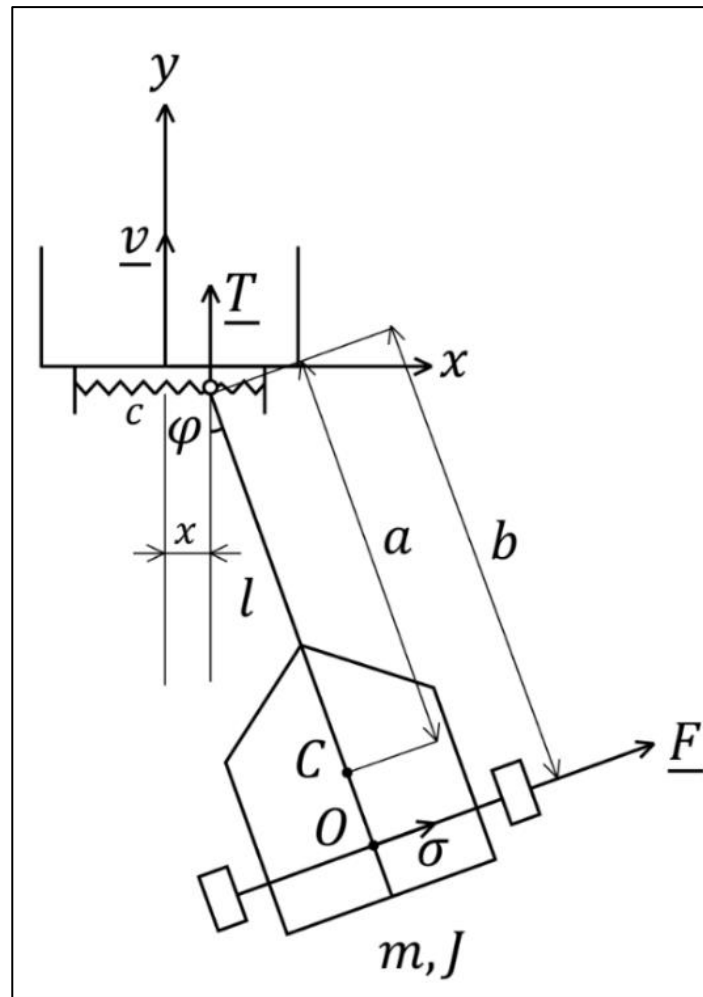


Анализ поведения оптимальной кривой



Точек экстремума нет, монотонное возрастание

Тягач с прицепом Циглера





Характеристическое уравнение

$$Q(\lambda) = [(1 - \delta)^2 + \rho^2]\lambda^3 + \gamma(1 - \delta)\lambda^2 + \lambda + \gamma = 0,$$

где

$$\delta = \frac{a}{b}; r = \frac{\rho}{b}; \gamma = \frac{v}{bk}, \text{ где } k = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Дискриминантные кривые диаграммы Вышнеградского

1) Условие кратности корня x . y . ($Q = 0; Q' = 0$)

$$\delta(\lambda) = \frac{\gamma(\lambda^2 + 3) + 2\lambda}{\gamma\lambda^2}; \rho(\lambda) = \sqrt{\frac{(\gamma^2 - 4)\lambda^2 + 2\gamma(\gamma^2 - 6)\lambda - 9\gamma^2}{\gamma^2\lambda^4}}$$

2) Условие равенства вещественной части корней x . y .

$$\delta(n) = \frac{\gamma(2n^2 + 3) - 3n}{2\gamma n^2}; \rho(n) = \sqrt{\frac{(n - \gamma)[(2\gamma^2 - 9)n + 9\gamma]}{4\gamma^2 n^4}}; \omega(n) = \sqrt{\frac{n^2(3\gamma - n)}{n - \gamma}}$$

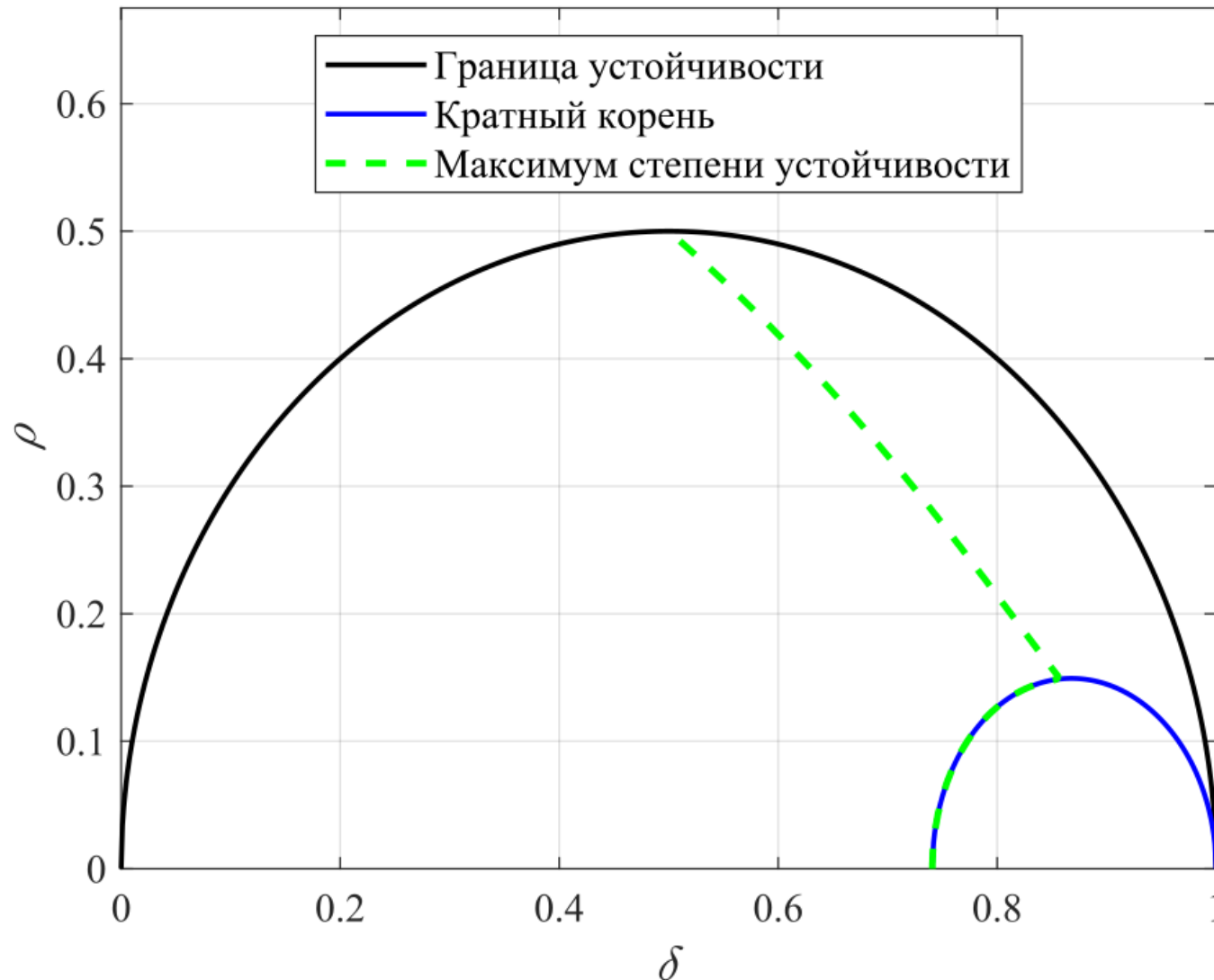
Точка, соответствующая трехкратному корню (комплексно-сопряженные корни сливаются)

$$\omega = 0 \rightarrow \delta = \frac{3\gamma^2 - 1}{3\gamma^2}; \rho = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 3}{27\gamma^4}}$$

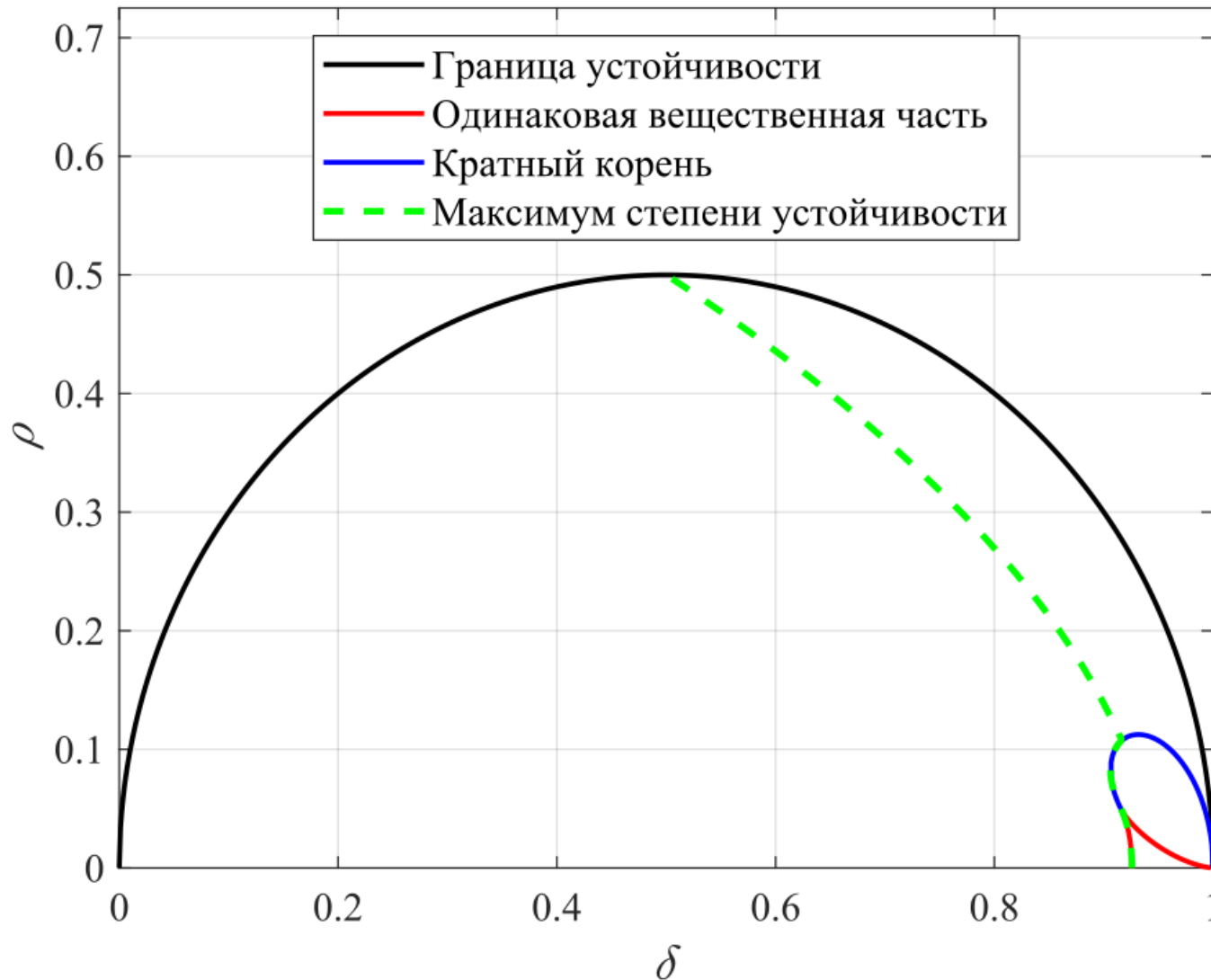
Существует при $\gamma > \sqrt{3}$



Оптимальное решение. Случай 1: $\gamma = 1 < \sqrt{3}$



Оптимальное решение. Случай 1: $\gamma = 2 > \sqrt{3}$





Заключение

Таким образом, в данной работе была решена задача оптимизации для подпружиненного маятника при наличии трения и для тягача с прицепом по критерию максимума степени устойчивости. В задаче оптимизации для подпружиненного маятника трение вводилось двумя способами: 1) в шарнире маятника; 2) с помощью демпфера, вставленного параллельно пружине.

Решение обеих задач показало, что для наиболее эффективного затухания движения по выбранному критерию, параметры системы должны принадлежать некой кривой, которая складывается из трех частей для подпружиненного маятника и двух или трех частей – в зависимости от параметра γ – для тягача с прицепом.

Результаты данной работы позволяют дать ответ на вопрос: какими должны быть параметры подпружиненного маятника и тягача с прицепом, чтобы затухание движений этих систем происходило наиболее эффективно в смысле критерия максимума степени устойчивости.

Кроме того, была сформулирована идея пошагового решения задачи оптимизации по критерию максимума степени устойчивости, которая может быть применена для всех линейных динамических систем с характеристическим уравнением третьего порядка.



СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!