



Конечно-элементное моделирование и исследование процесса роста трещин методом XFEM

Выполнил студент гр. 4053/1

А.С. Мельников

Руководитель, к.т.н., профессор

А.И. Боровков

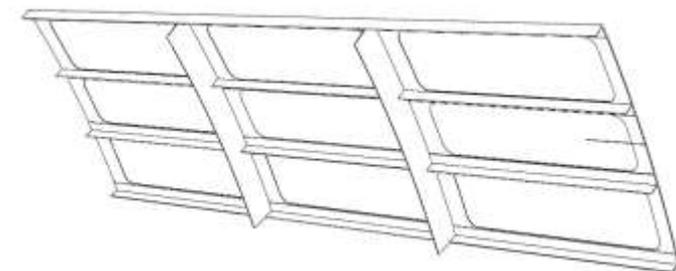
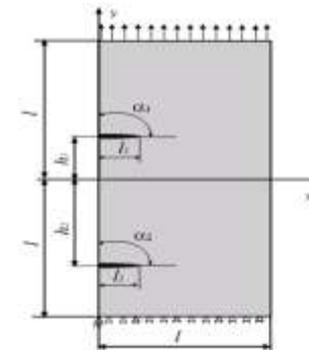
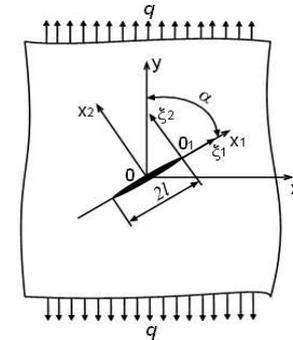
Соруководитель, асс.

И.Б. Войнов

Введение

Рассматриваются задачи:

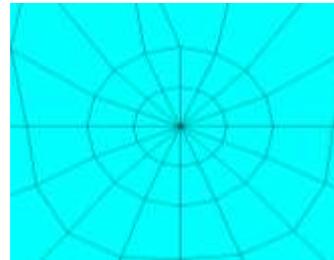
1. Статичная трещина в бесконечной пластине под действием растягивающих усилий
2. Рост трещины в пластинах из различных материалов с разной геометрией и граничными условиями
3. Рост двух трещин в одной пластине
4. Рост трещины в трехмерной конструкции с реальной геометрией



Метод конечных элементов в задаче о трещине

Основные особенности стандартного МКЭ в задаче о трещине:

- Вводятся специальные сингулярные элементы у конца трещины



- Перестраивается КЭ сетка на каждом шаге процесса роста трещины
Выполняется критерий начала разрушения – находится угол поворота направления роста трещины относительно старого направления – длина трещины увеличивается на фиксированную длину – сетка перестраивается

Недостатки:

- Большая трудоемкость процесса
- Сложности при моделировании трещин для нетривиальных моделей
- Жесткая привязка геометрии трещины к исследуемой модели и КЭ сетке

Метод XFEM

Основные особенности метода:

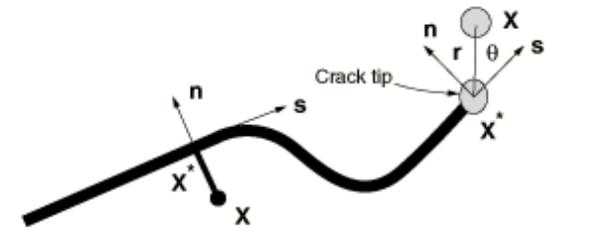
- Вводятся обогащенные функции для узлов около трещины

Аппроксимация вектора перемещений:
$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^N N_i(x) \left[\mathbf{u}_i + H(x)\mathbf{a}_i + \sum_{\alpha=1}^4 F_{\alpha}(x)\mathbf{b}_i^{\alpha} \right]$$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } (x - x^*)\mathbf{n} \geq 0 \\ -1, & \text{при } (x - x^*)\mathbf{n} < 0 \end{cases}$$
 – функция скачка

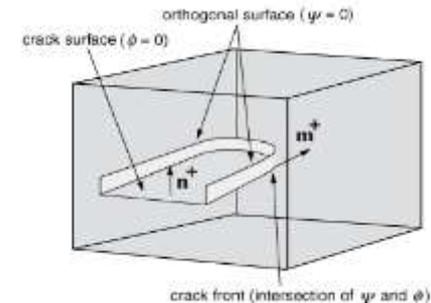
$$F_{\alpha}(x) = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} \right]$$
 –

асимптотическая функция для вершины трещины
(используется только для статичной трещины)



- Для определения геометрии трещины используется метод установленного уровня

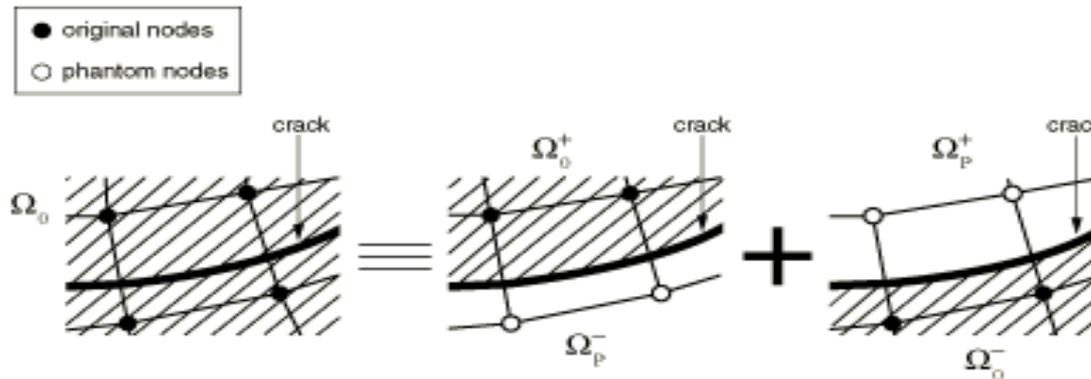
Положение трещины определяются двумя ортогональными
знаковыми функциями расстояния φ , ψ



Метод XFEM

Основные особенности метода:

- Используются узлы-фантомы для помощи в интерполяции разделенных элементов



- При росте трещины не используется асимптотическая функция для вершины трещины и трещина проходит один элемент за шаг

Задача о статичной трещине. Горизонтальная трещина

Условие задачи:

$$2l = 0.02 \text{ м}$$

$$2L = 0.2 \text{ м}$$

$$q = 10 \text{ Мпа}$$

$$E = 120 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.25$$

Коэффициенты интенсивности напряжений:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0) = C \left(\frac{l}{L} \right) q \sin^2 \alpha \sqrt{\pi l};$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0) = C \left(\frac{l}{L} \right) q \sin \alpha \cos \alpha \sqrt{\pi l}$$

Поправка для конечной пластины:

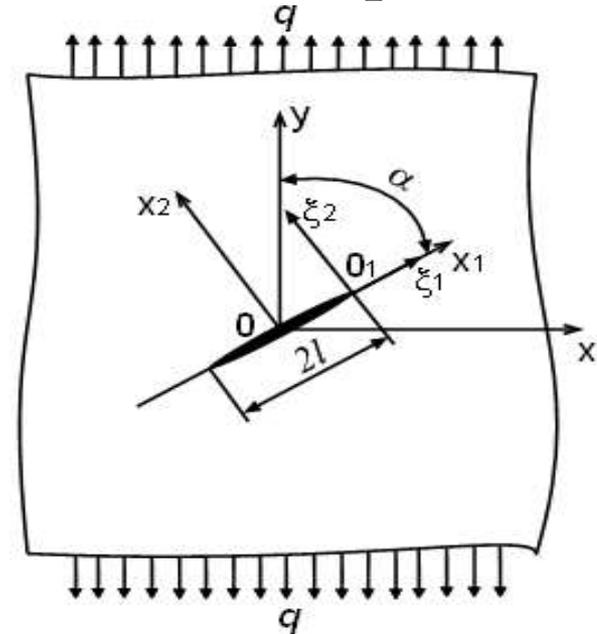
$$C \left(\frac{l}{L} \right) = 1 + 0.043 \left(\frac{l}{L} \right) + 0.491 \left(\frac{l}{L} \right)^2 + 7.125 \left(\frac{l}{L} \right)^3 - 28.403 \left(\frac{l}{L} \right)^4 + 59.583 \left(\frac{l}{L} \right)^5 - 65.278 \left(\frac{l}{L} \right)^6 + 29.762 \left(\frac{l}{L} \right)^7$$

Напряжения и перемещения:

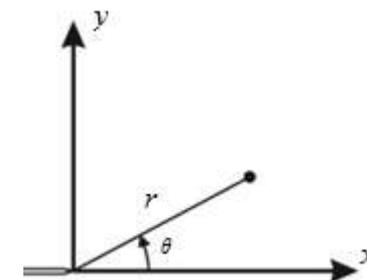
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$u_y = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left(2\nu - 1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$



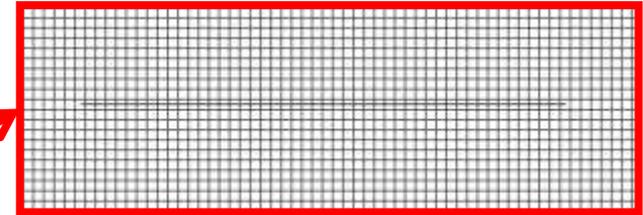
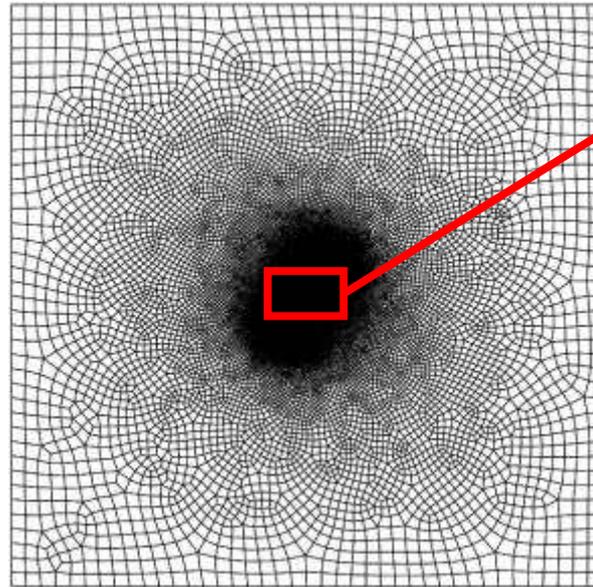
Система координат у вершины трещины:



Задача о статичной трещине. Горизонтальная трещина

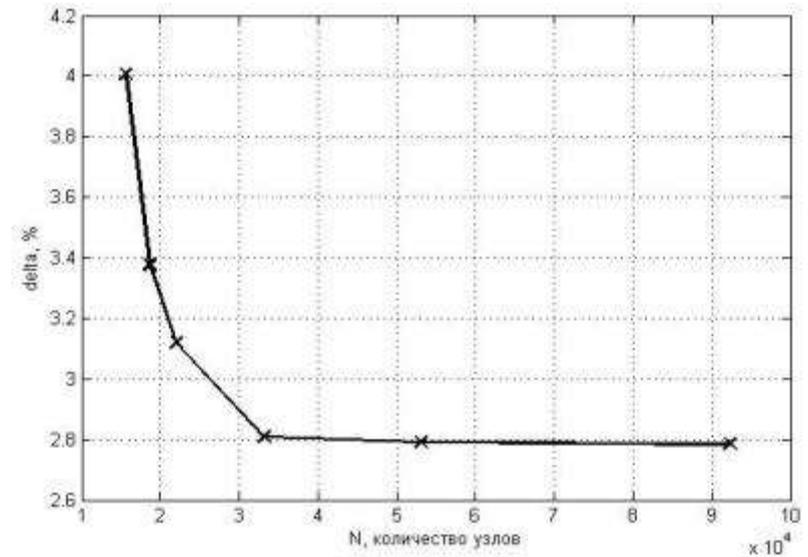
КЭ модель пластины
с трещиной:

Есть толщина $t=0.001\text{м}$



NE (число элементов)	16496
NN (число узлов)	33154

Зависимость относительной погрешности
(выраженной в процентах) между
аналитическим и численным решениями
от количества узлов КЭ модели:



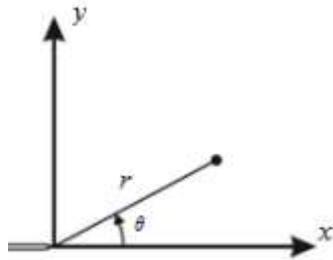
Задача о статичной трещине. Горизонтальная трещина

Распределение напряжений у вершины трещины при $\theta = 0$:

r – расстояние от вершины трещины

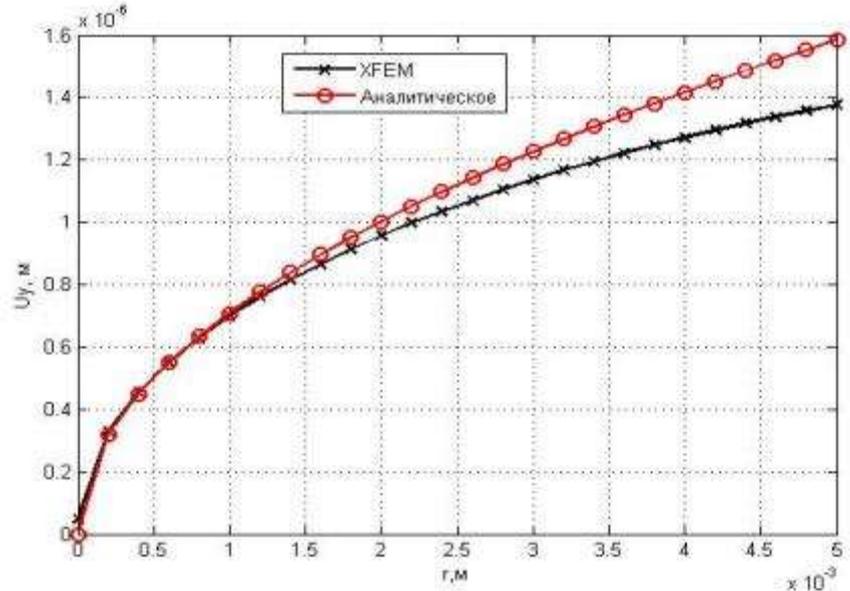
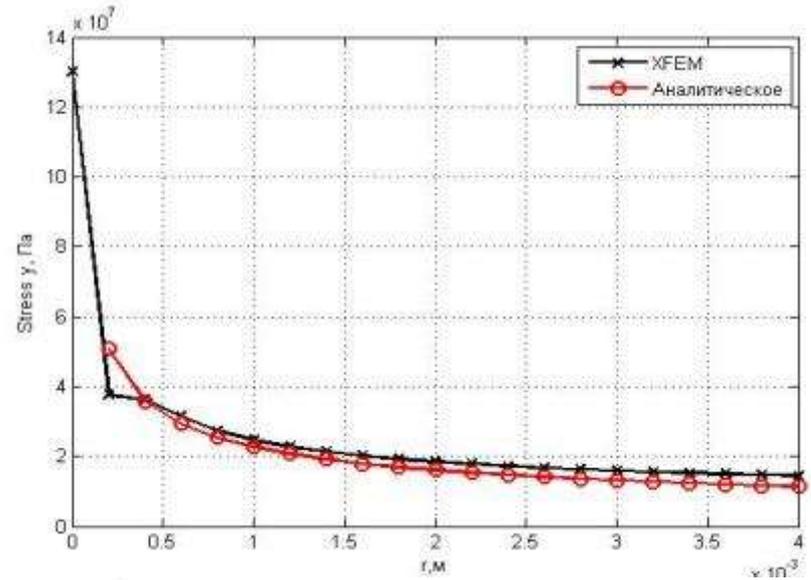
Аналитическое решение: $\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$

Система координат у вершины трещины:



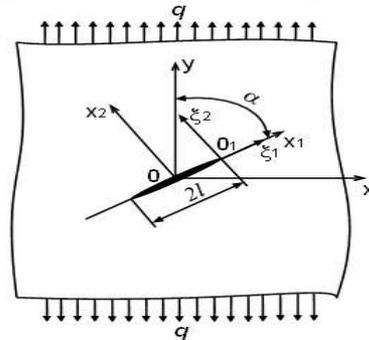
Перемещения верхней поверхности трещины при $\theta = \pi$:

Аналитическое решение: $u_y = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 2(1 - \nu)$

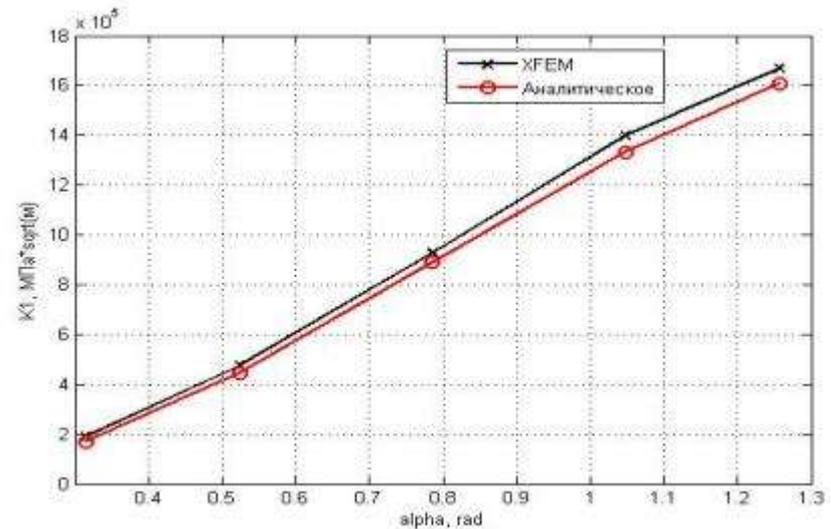


Задача о статичной трещине. Трещина под углом к направлению растягивающих усилий.

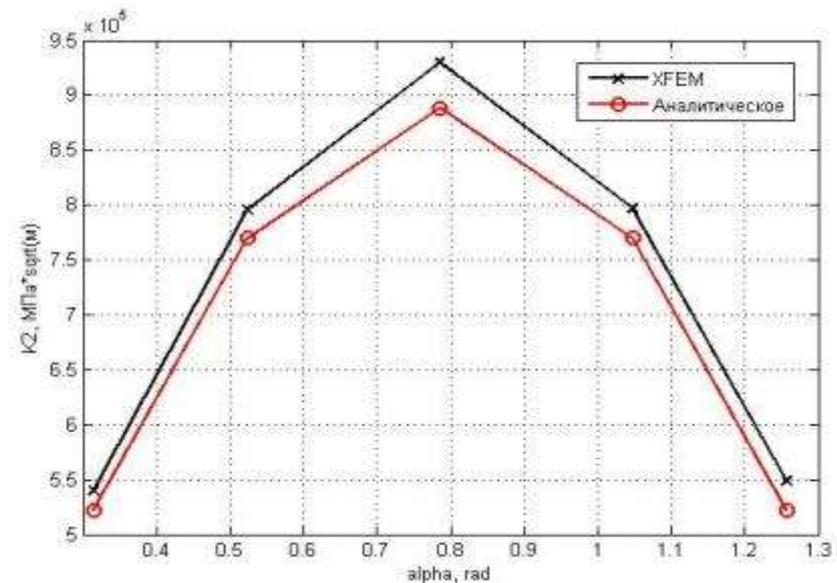
Постановка задачи
(все условия остались прежними):



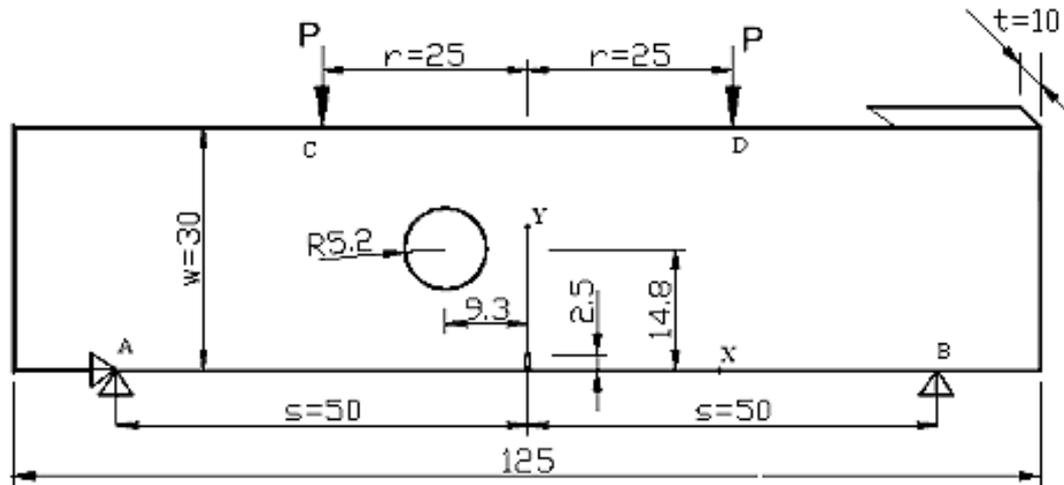
Зависимость коэффициента интенсивности K_I от угла α между трещиной и направлением растягивающих усилий:



Зависимость коэффициента интенсивности K_{II} от угла α между трещиной и направлением растягивающих усилий:



Задача о росте трещины. Пластина 1.



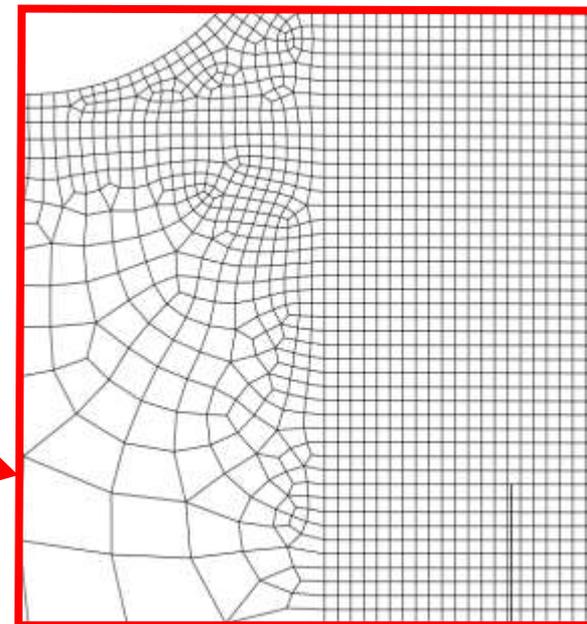
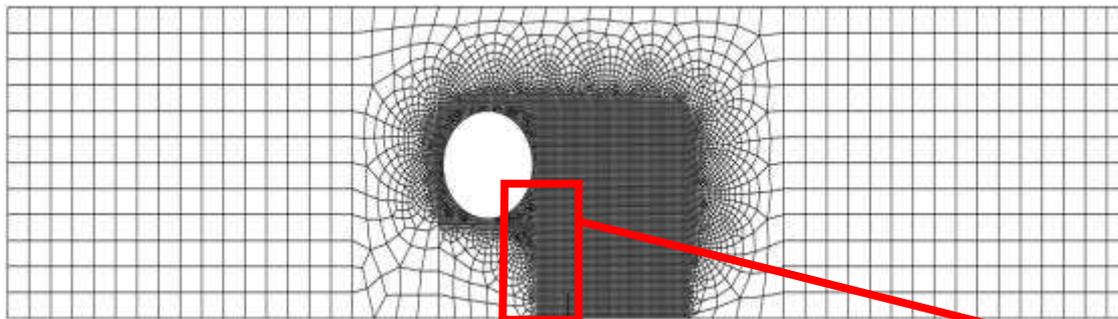
$$E = 205 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.3$$

$$P = 100 \text{ Н}$$

$$\sigma_{max} = 500 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

КЭ модель:



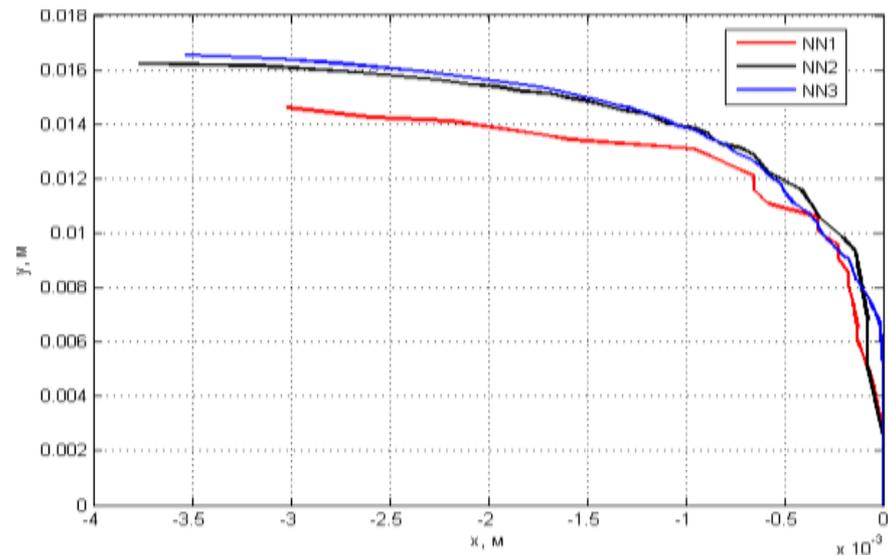
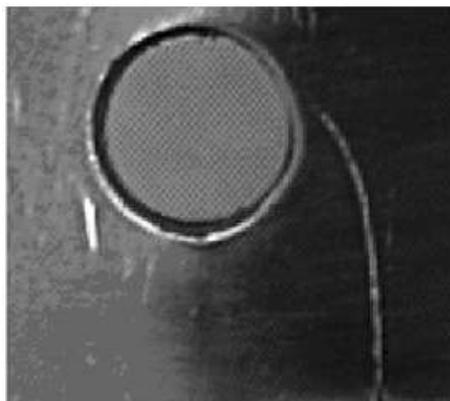
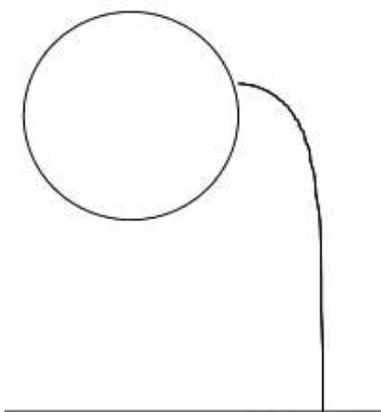
NE (число элементов)	9853
NN (число узлов)	10015

Задача о росте трещины. Пластина 1.

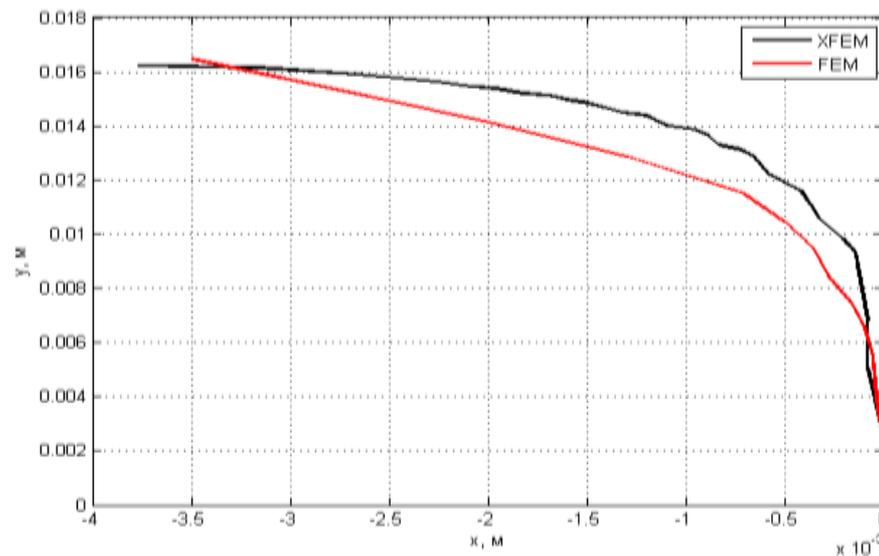
Зависимость траектории роста трещины от количества узлов в модели:

NN1	NN2	NN3
3232	10015	25446

Траектории роста трещины, полученные:
Методом XFEM: Из эксперимента*:

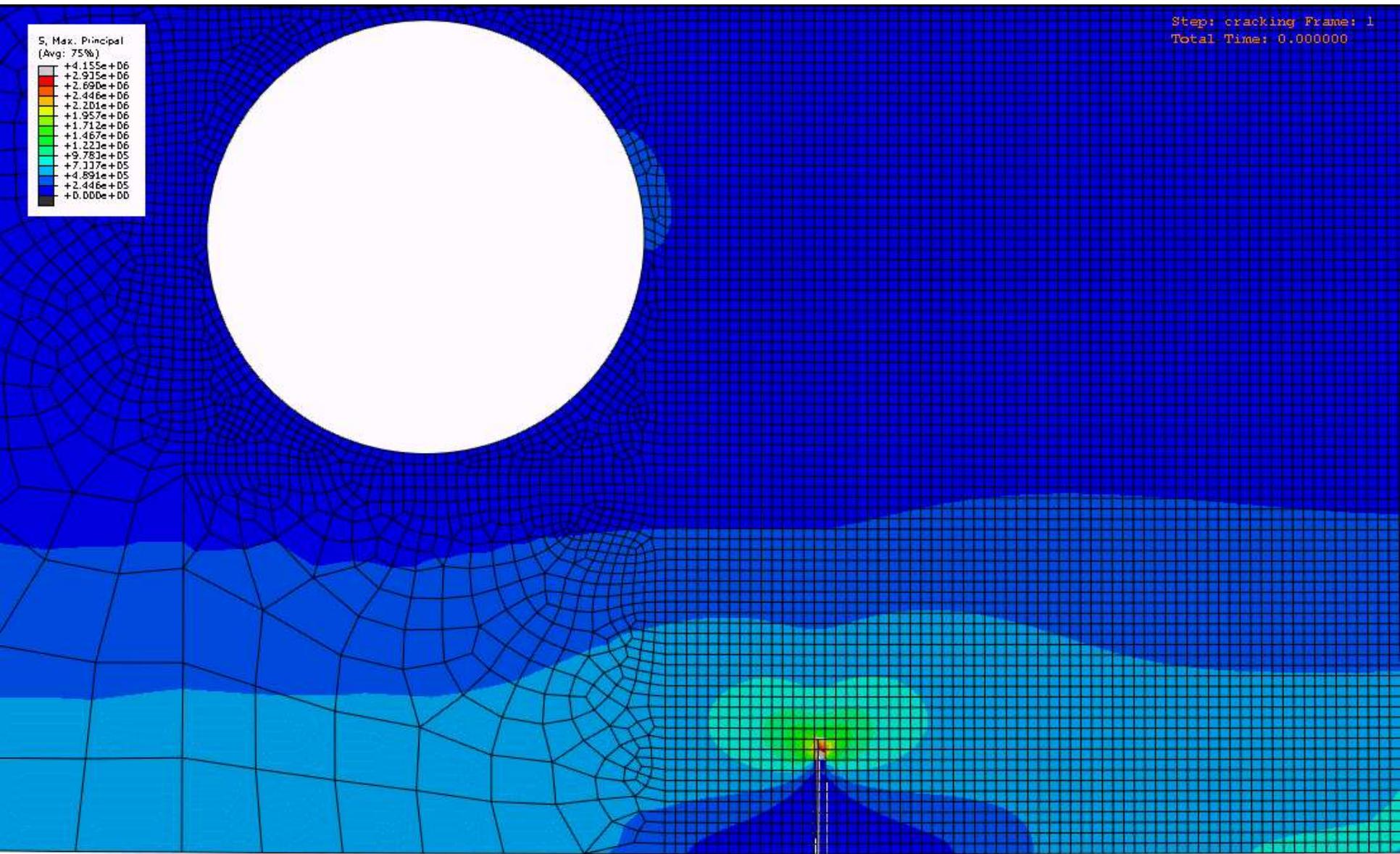


Сравнение траекторий роста трещины, полученных XFEM и МКЭ*:

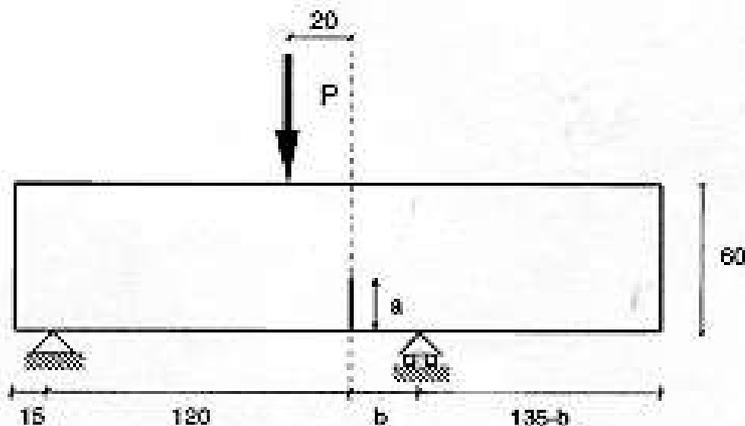


*Значения взяты из: Боровков А.И., Пальмов В.А., Михайлов А.А., Михалюк Д.С., Шевченко Д.В. Approaches to Crack Trajectories Prediction in Composite Materials. Finite Element Crack Propagation Analysis (1) – Презентация, 2004 г.

Задача о росте трещины. Пластина 1.



Задача о росте трещины. Пластина 2.



$$E = 205 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.3$$

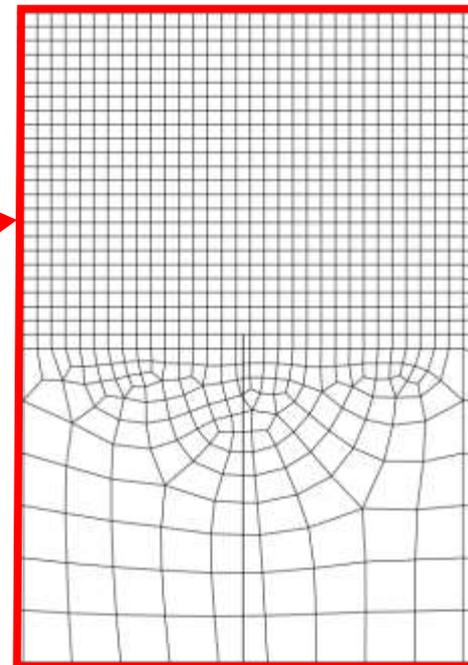
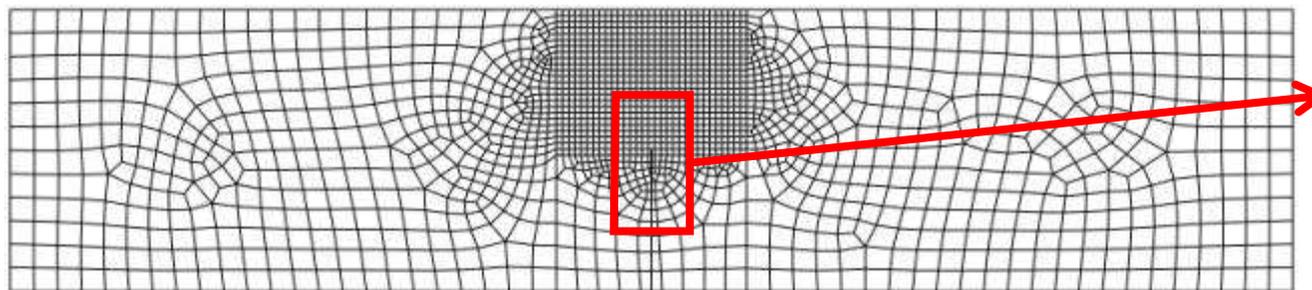
$$P = 1000 \text{ Н}$$

$$a = 30 \text{ мм}$$

$$b = 20 \text{ мм}$$

$$\sigma_{max} = 100 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

КЭ модель:

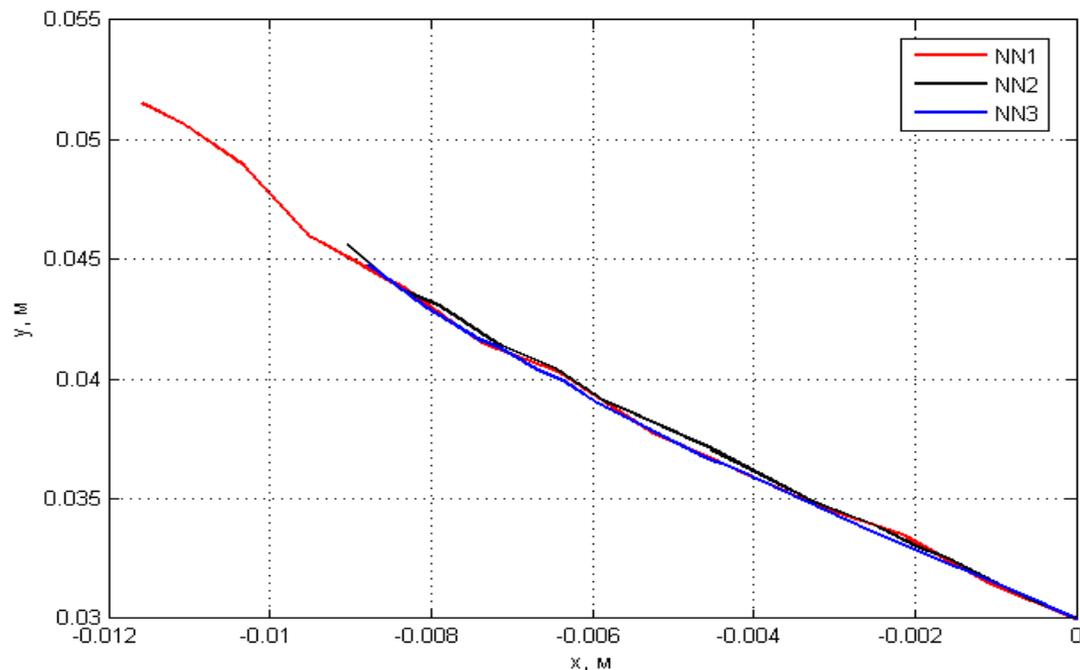


NE (число элементов)	1807
NN (число узлов)	1887

Задача о росте трещины. Пластина 2.

Зависимость траектории роста трещины от количества узлов в модели:

NN1	NN2	NN3
1315	1807	4006



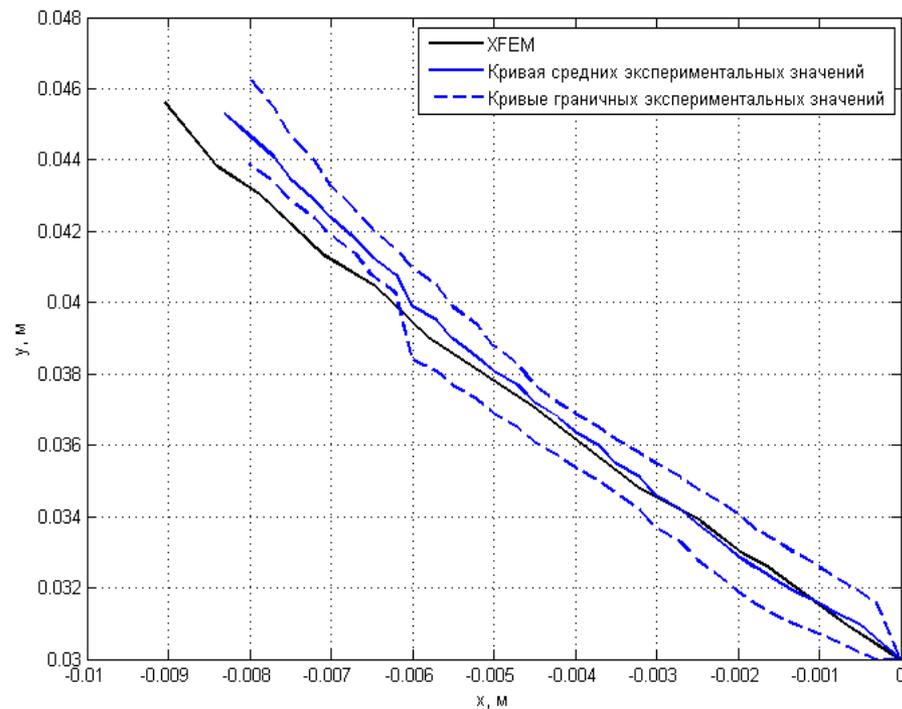
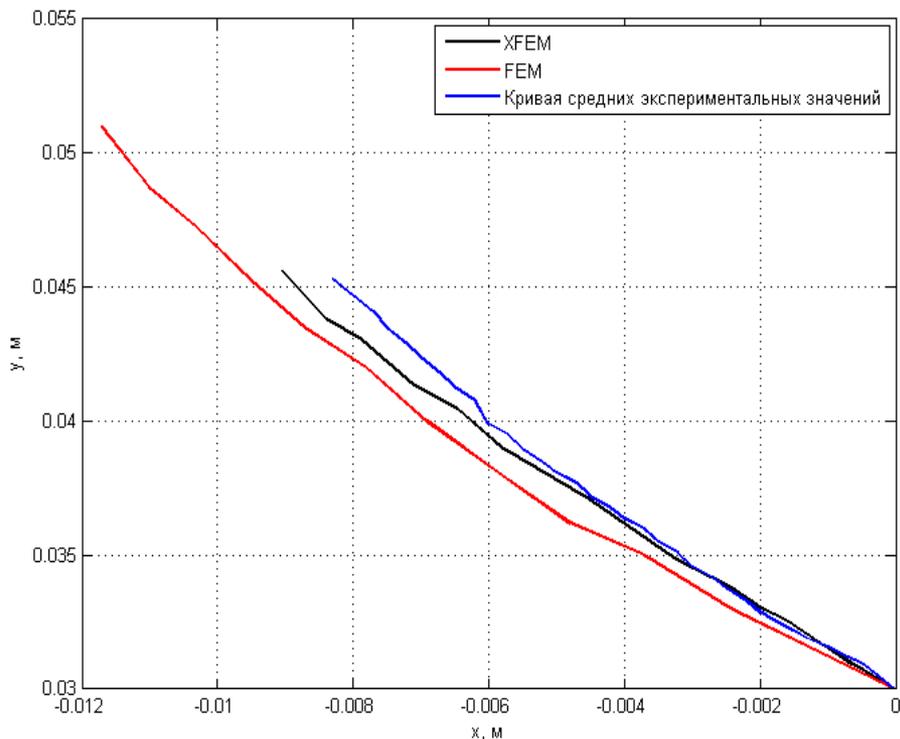
Траектория роста трещины, полученная методом XFEM:



Задача о росте трещины. Пластина 2.

Сравнение траекторий роста трещины, полученных XFEM, МКЭ* и средними экспериментальными значениями**:

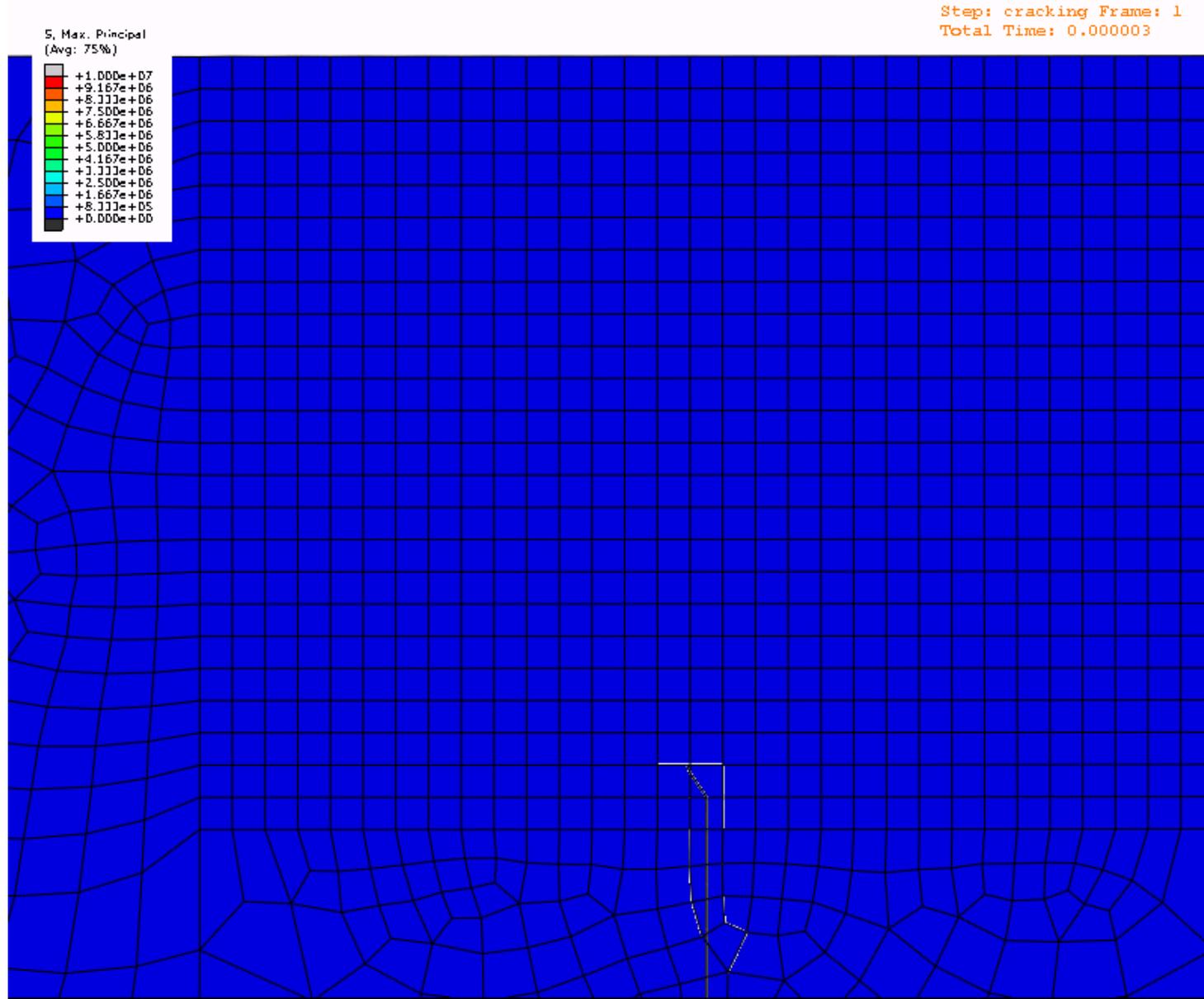
Сравнение траекторий роста трещины, полученных XFEM и экспериментальными значениями**:



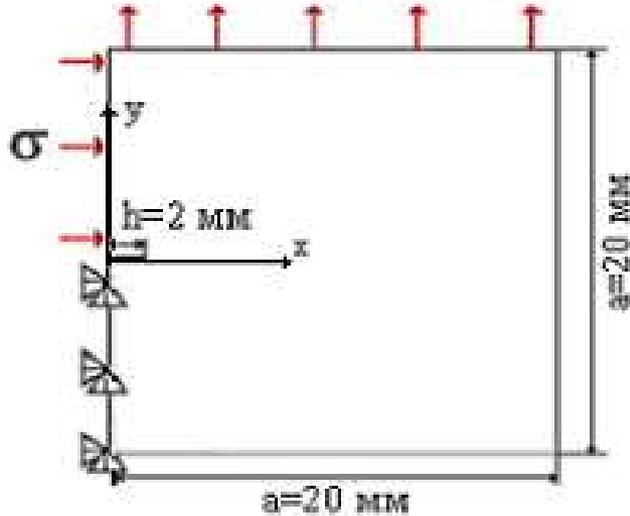
*Значения полученные МКЭ взяты из: Боровков А.И., Пальмов В.А., Михайлов А.А., Михалюк Д.С., Шевченко Д.В. Approaches to Crack Trajectories Prediction in Composite Materials. Finite Element Crack Propagation Analysis (1) – Презентация, 2004 г.

**Значения полученные экспериментально взяты из: Galvez J., Elices M., Guinea G.V., Planas J. Crack trajectories under mixed mode and non-proportional loading - Int. J. Fract. 81 (1996) 171-193

Задача о росте трещины. Пластина 2.



Задача о росте трещины. Пластина 3.



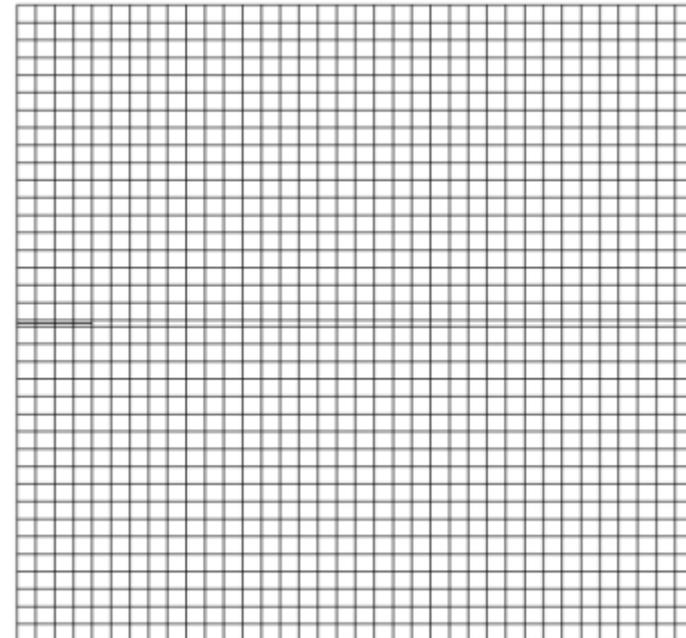
$$E = 2 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma = 1000 \text{ Па}$$

$$\sigma_{max} = 10 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

КЭ модель:



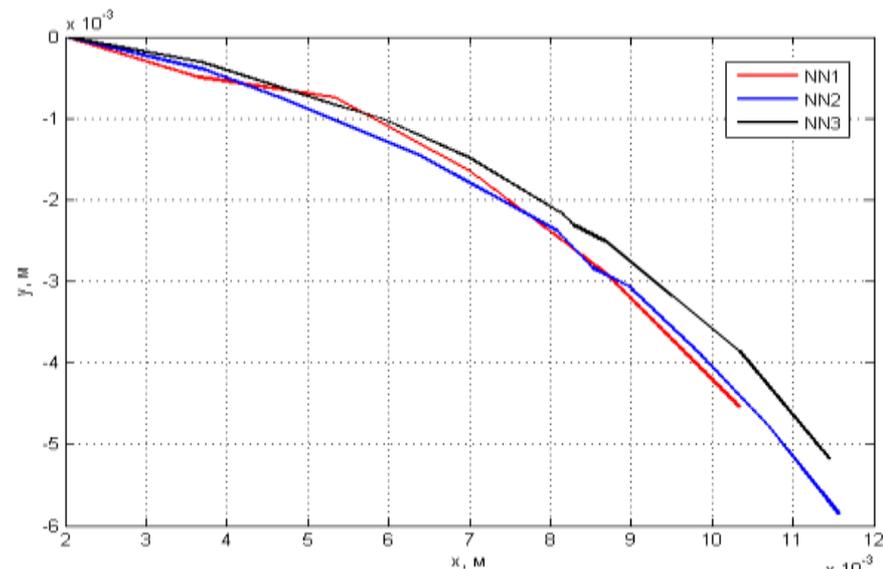
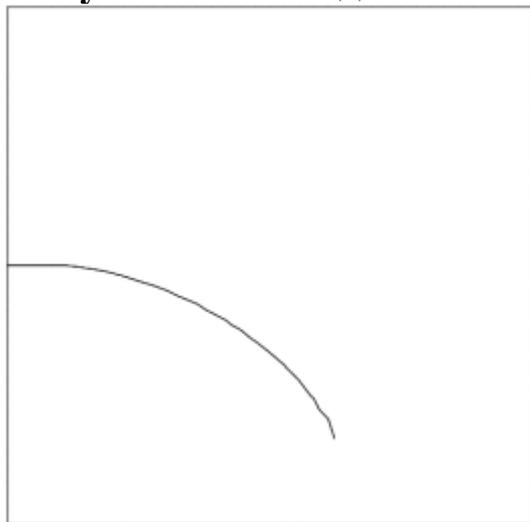
NE (число элементов)	1332
NN (число узлов)	1406

Задача о росте трещины. Пластина 3.

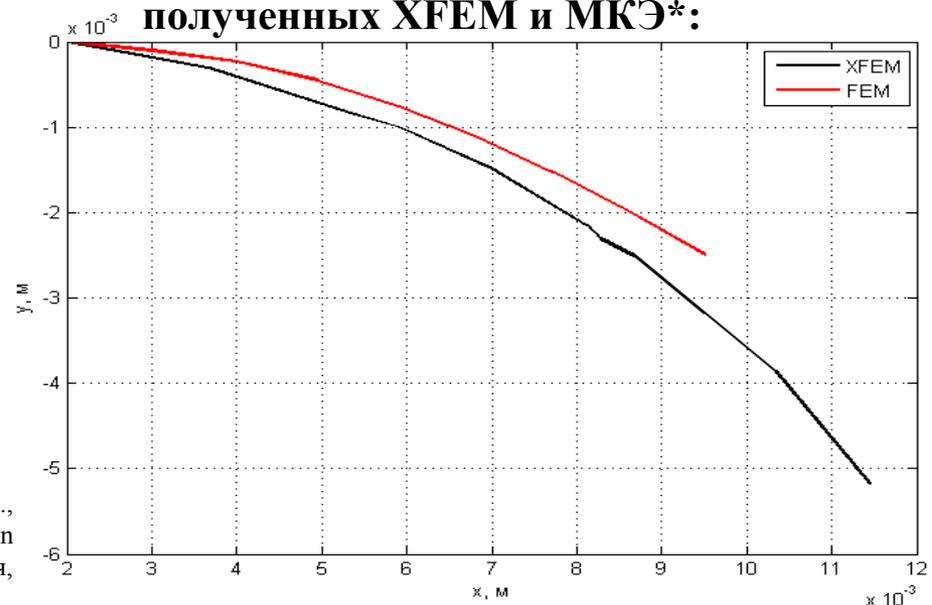
Зависимость траектории роста трещины
от количества узлов в модели:

NN1	NN2	NN3
182	576	1406

Траектория роста трещины,
полученная методом XFEM:



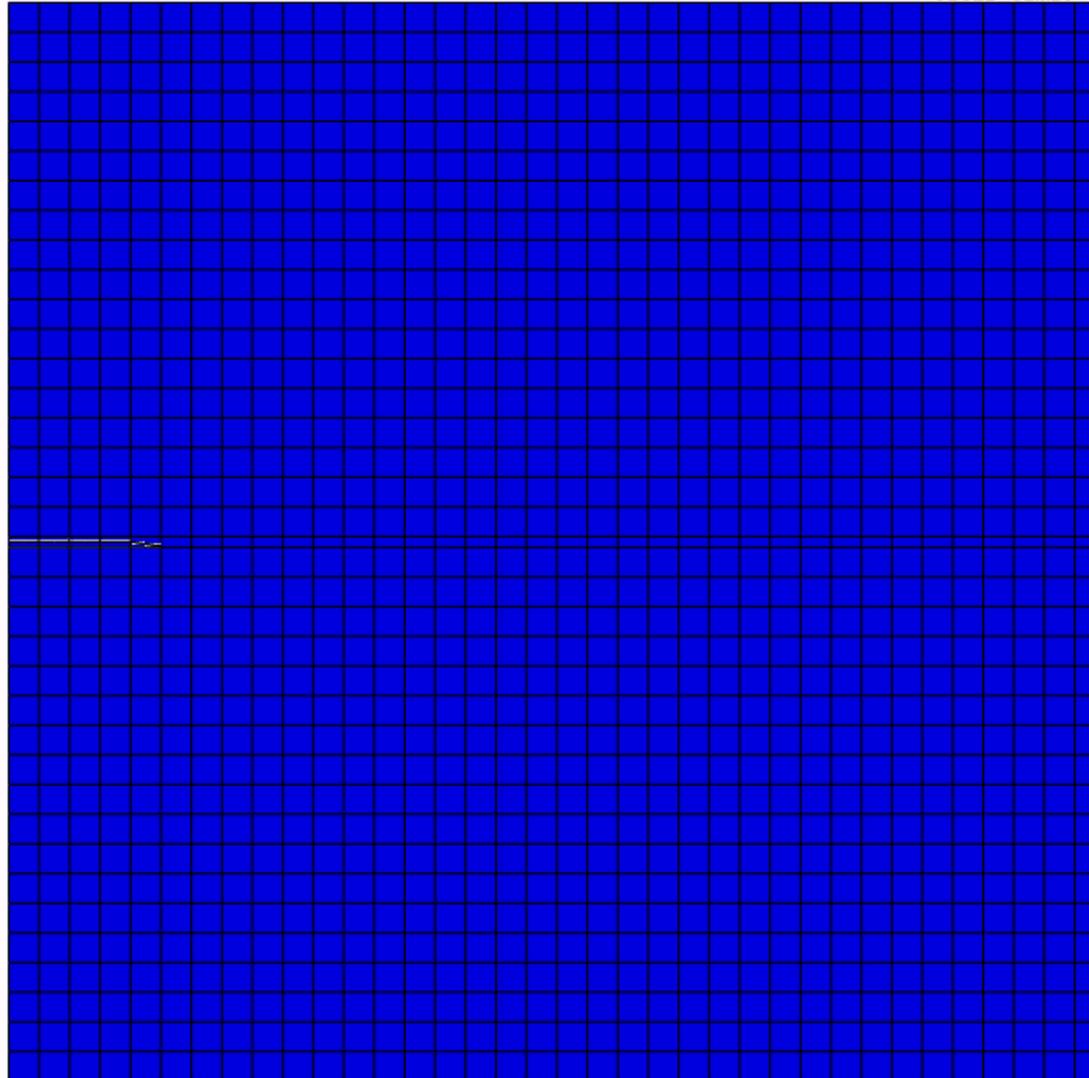
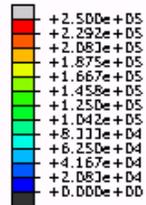
Сравнение траекторий роста трещины,
полученных XFEM и МКЭ*:



*Значения полученные МКЭ взяты из: Боровков А.И., Пальмов В.А., Михайлов А.А., Михалюк Д.С., Шевченко Д.В. Approaches to Crack Trajectories Prediction in Composite Materials. Finite Element Crack Propagation Analysis (1) – Презентация, 2004 г

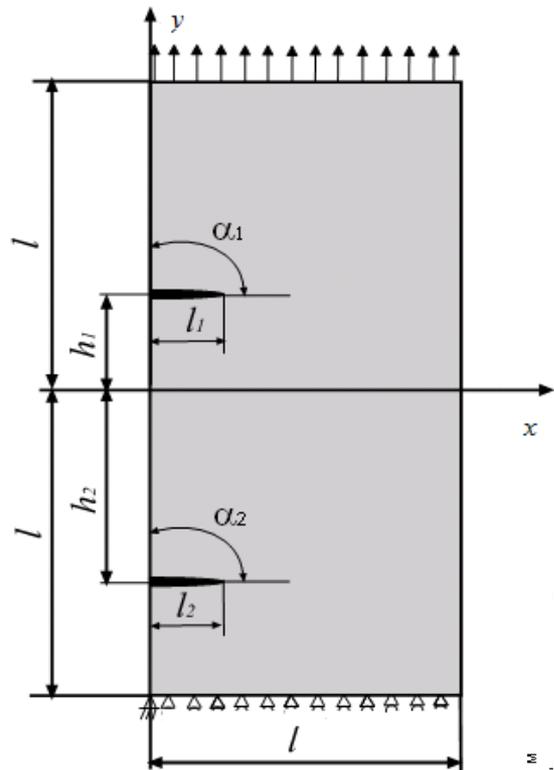
Задача о росте трещины. Пластина 3.

S, Max. Principal
(Avg: 75%)



Step: cracking Frame: 1
Total Time: 0.000016

Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на одной стороне.



$$E = 120 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

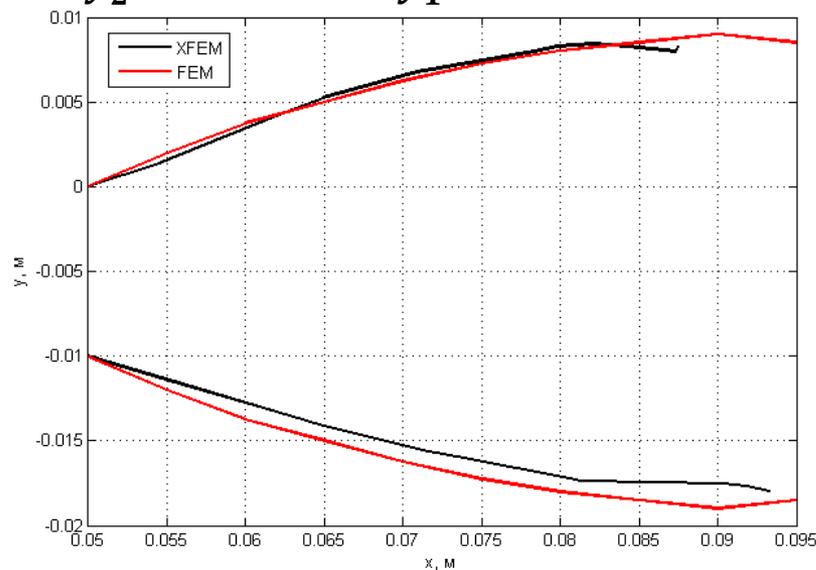
$$\nu = 0.25$$

$$q = 50 \text{ МПа} \quad \sigma_{max} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

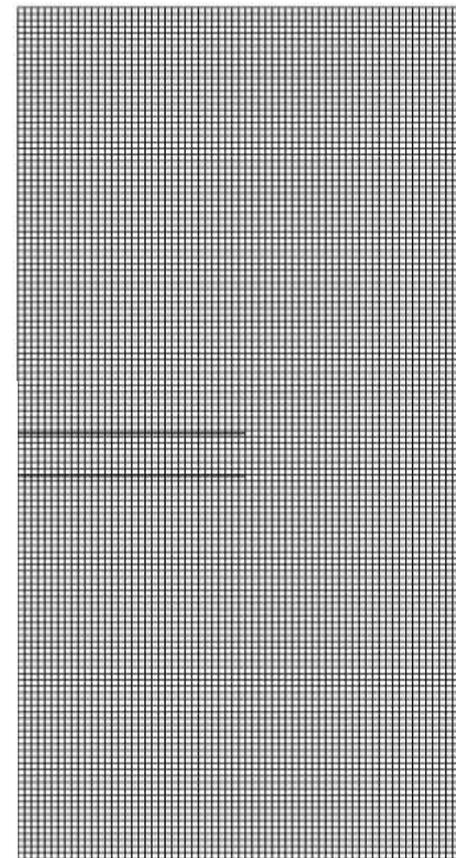
$$l_1 = l_2 = 0.05 \text{ м}$$

$$l = 0.1 \text{ м}$$

Сравним траектории роста трещин, полученные XFEM и МКЭ* при $y_2 = -0.01 \text{ м}$ и $y_1 = 0 \text{ м}$:



КЭ модель:



NE (число элементов)	8911
NN (число узлов)	9112

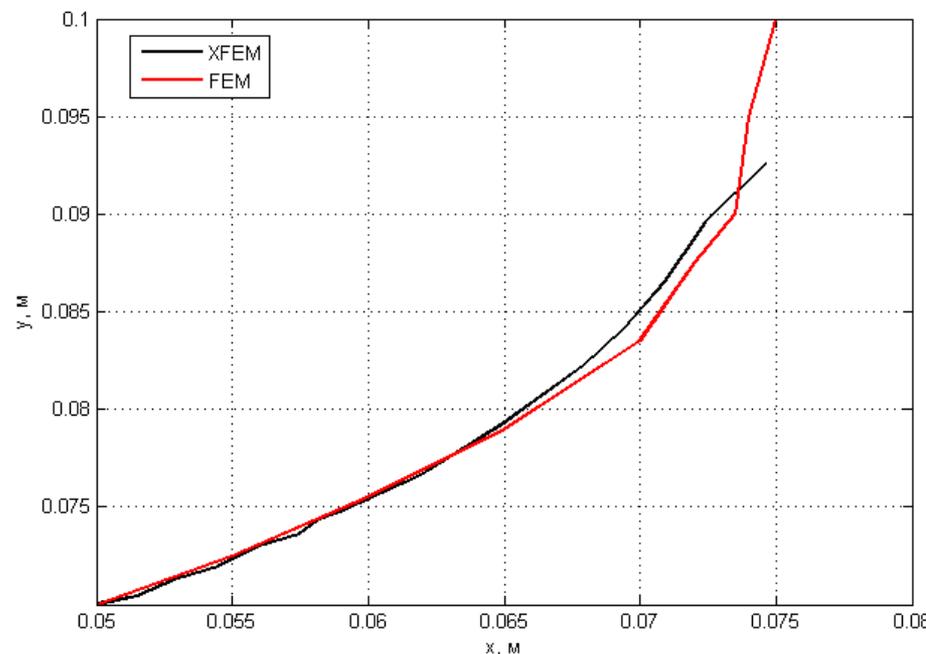
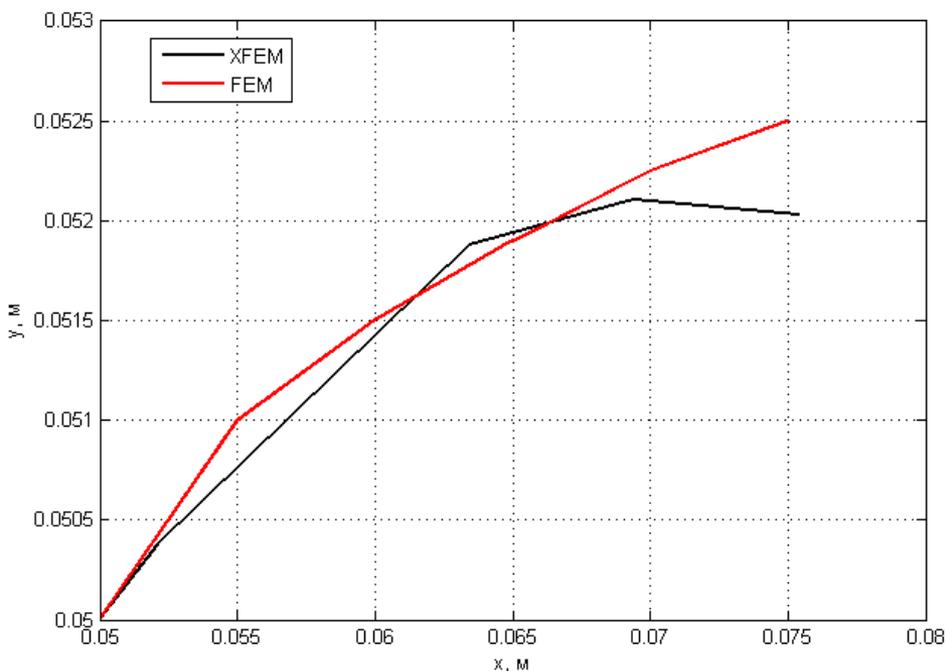
*Значения, полученные МКЭ взяты из: Сорин М.А., Боровков А.И., Шевченко Д.В. Конечно-элементное исследование задач механики хрупкого разрушения – Выпускная работа бакалавра, 2004 г.

Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на одной стороне.

Сравним траектории роста трещин, полученные XFEM и МКЭ* для первой трещины, при зафиксированной второй трещине на $y_2 = -0.01$ м:

$y_1 = 0.05$ м:

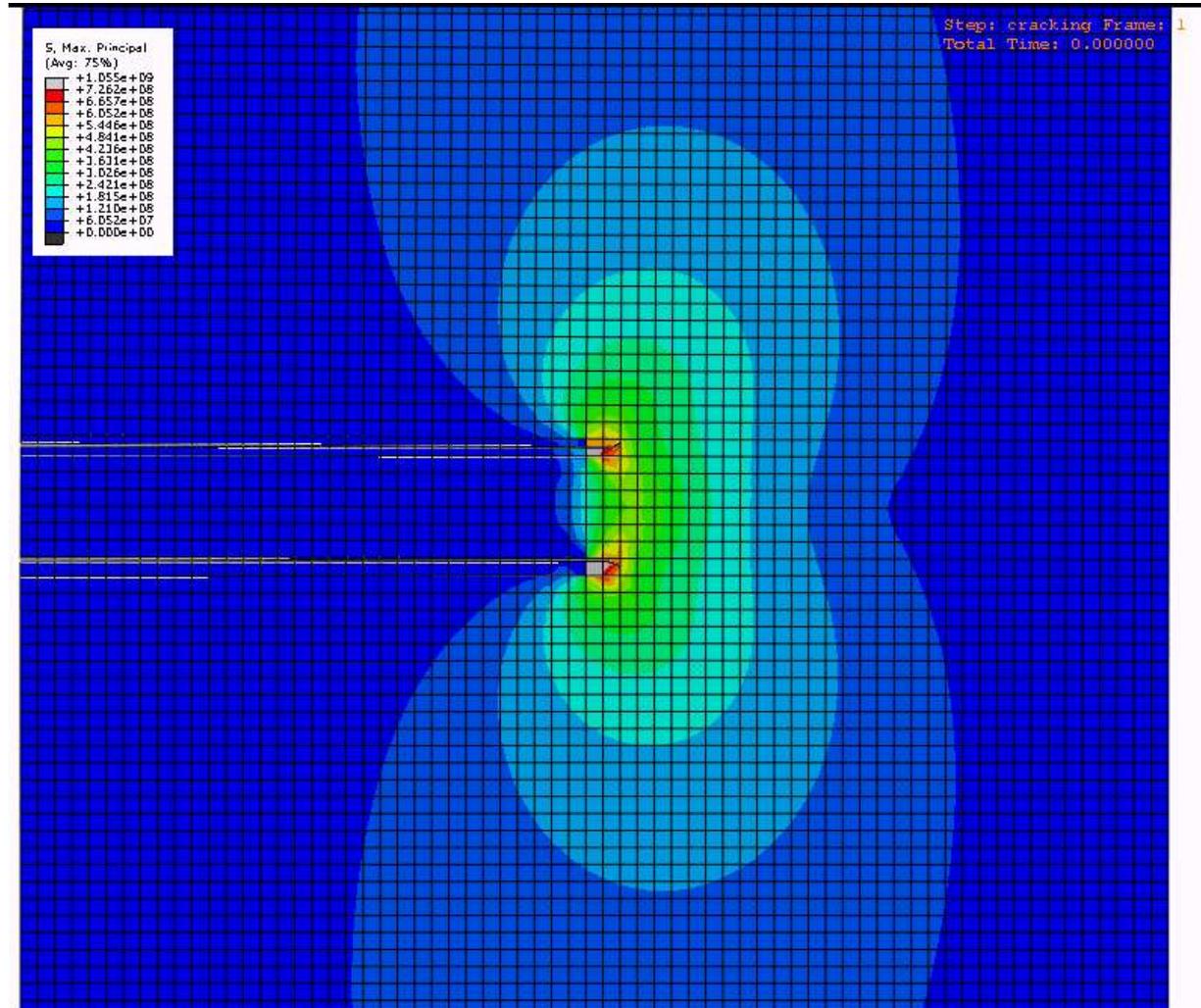
$y_1 = 0.07$ м:



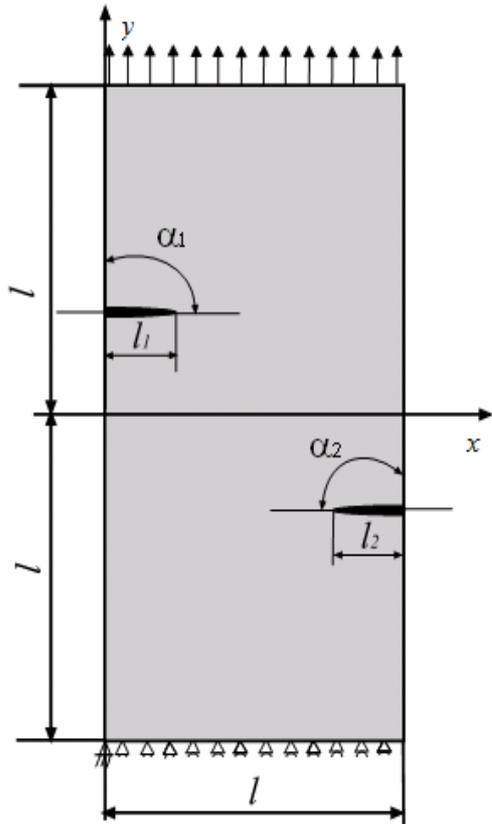
*Значения, полученные МКЭ взяты из: Сорин М.А., Боровков А.И., Шевченко Д.В. Конечно-элементное исследование задач механики хрупкого разрушения – Выпускная работа бакалавра, 2004 г.

Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на одной стороне.

При $y_2 = -0.01$ м и $y_1 = 0$ м:



Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на разных сторонах.



$$E = 120 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.25$$

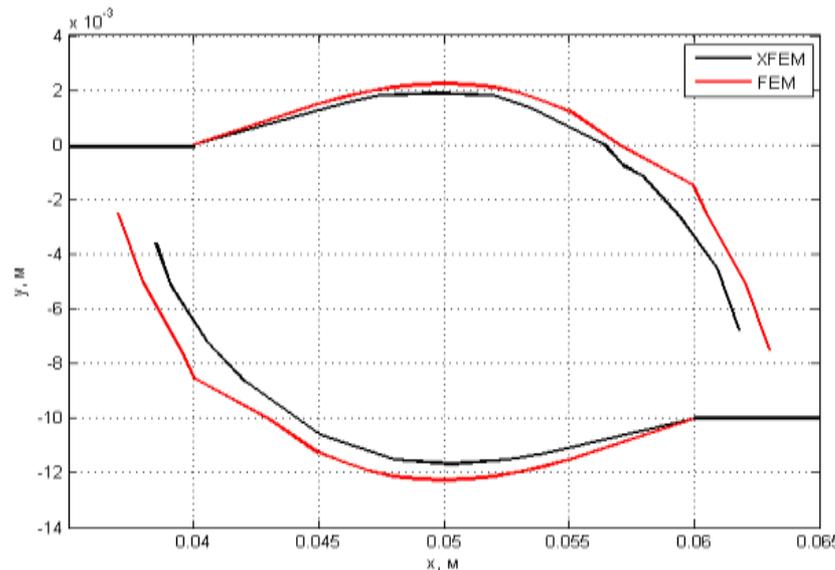
$$q = 50 \text{ МПа} \quad \sigma_{max} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$l_1 = l_2 = 0.04 \text{ м}$$

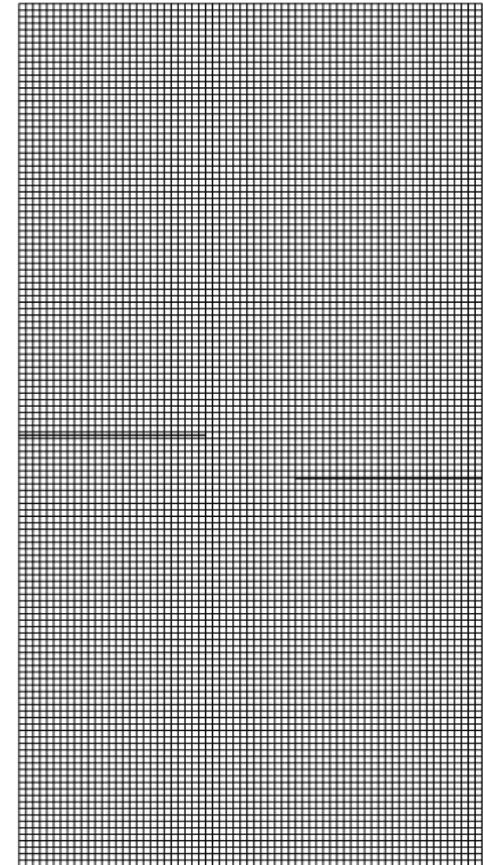
$$l = 0.1 \text{ м}$$

Сравним траектории роста трещин, полученные XFEM и МКЭ* при

$$y_1 = 0 \text{ м и } y_2 = -0.01 \text{ м} :$$



КЭ модель:



NE (число элементов)	8911
NN (число узлов)	9112

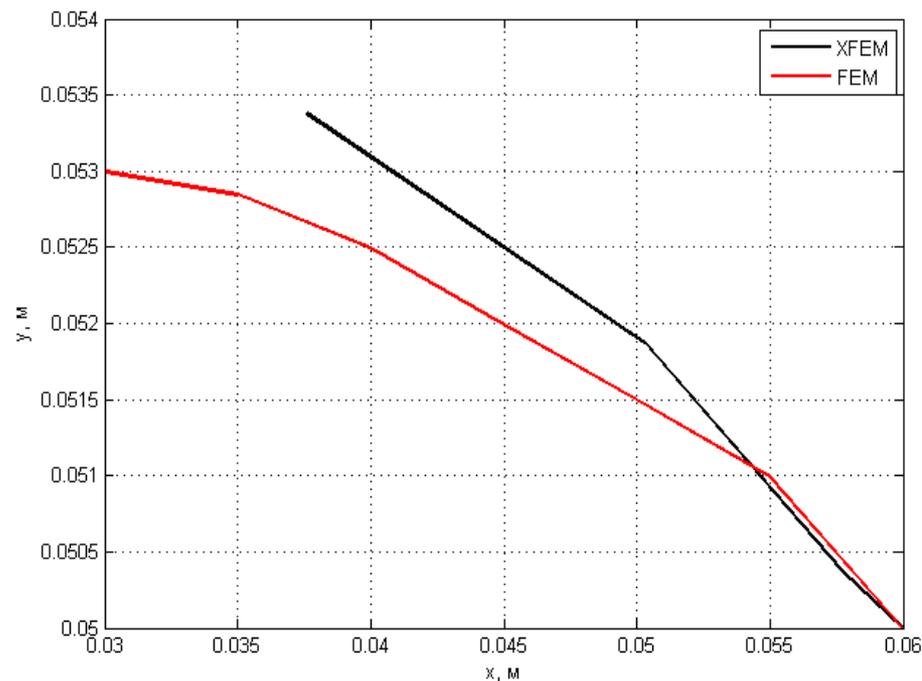
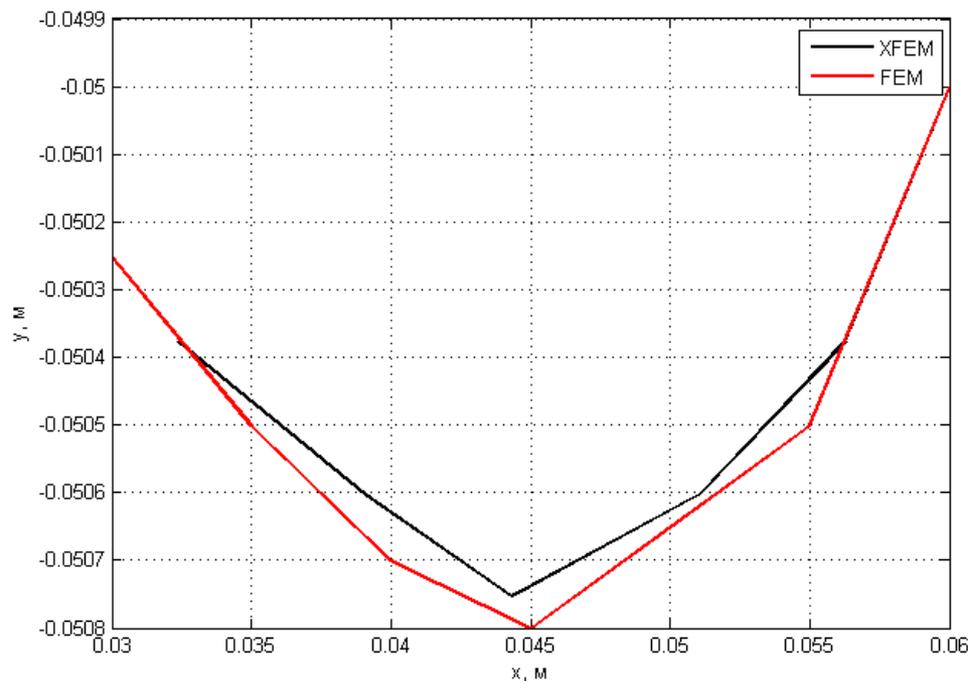
*Значения, полученные МКЭ взяты из: Сорин М.А., Боровков А.И., Шевченко Д.В. Конечно-элементное исследование задач механики хрупкого разрушения – Выпускная работа бакалавра, 2004 г.

Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на разных сторонах.

Сравним траектории роста трещин, полученные XFEM и МКЭ* для второй трещины при зафиксированной первой трещине на $y_1 = 0$ м:

$y_2 = -0.05$ м:

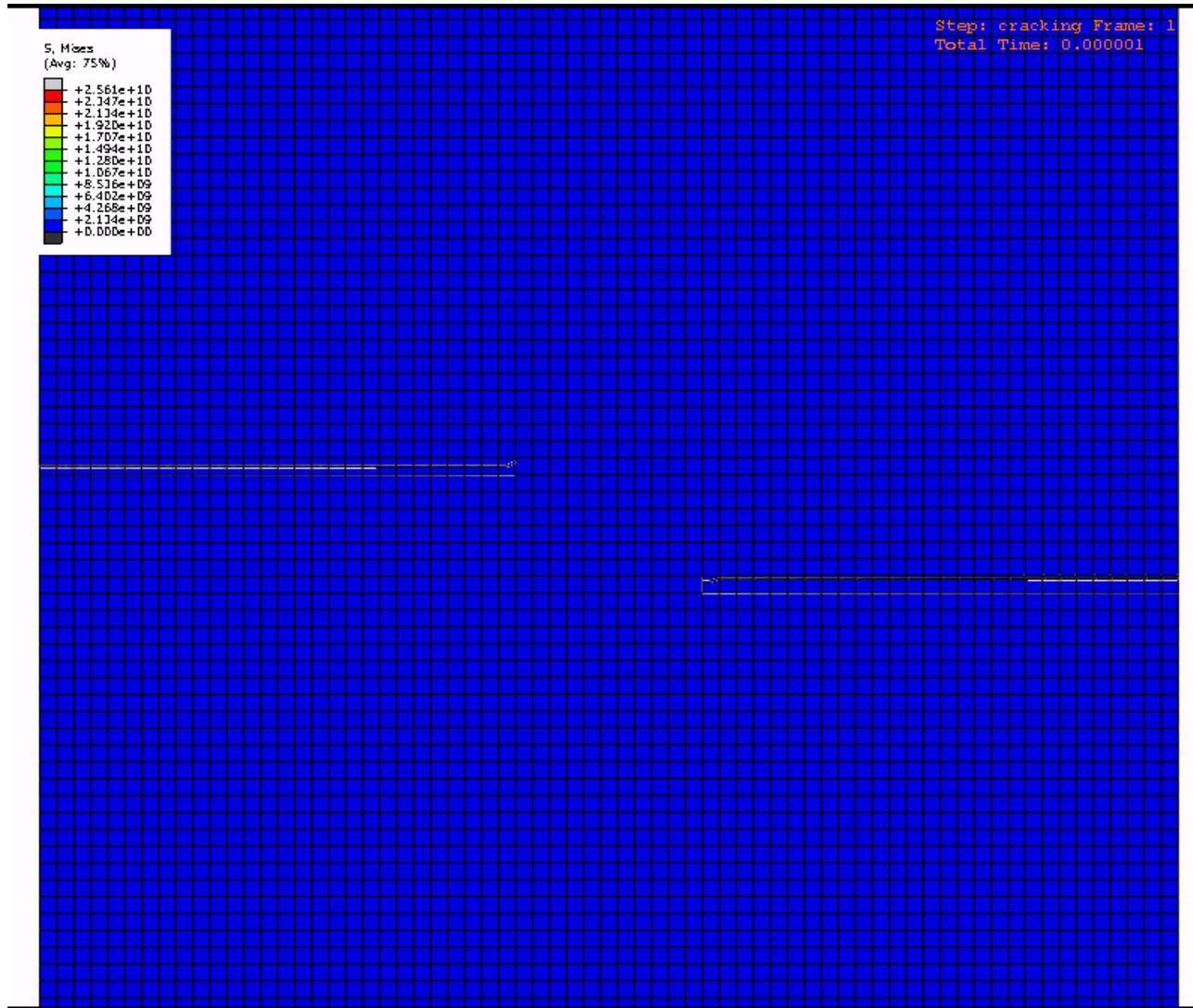
$y_2 = 0.05$ м:



*Значения, полученные МКЭ взяты из: Сорин М.А., Боровков А.И., Шевченко Д.В. Конечно-элементное исследование задач механики хрупкого разрушения – Выпускная работа бакалавра, 2004 г.

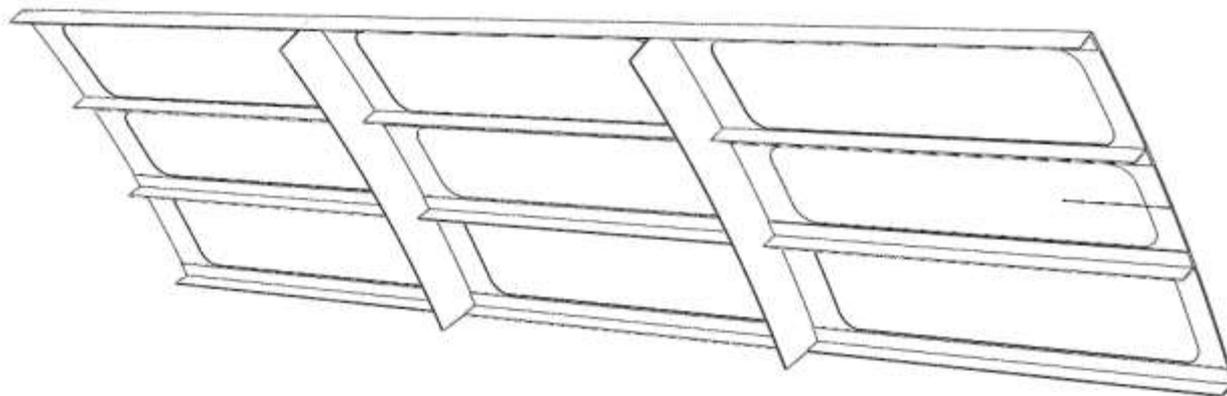
Задача о росте трещин. Две трещины в одной пластине на разных сторонах.

При $y_1 = 0$ м и $y_2 = -0.01$ м :



Задача о росте трещин. Трещина в реальной пространственной конструкции

Краевая продольная трещина в части фюзеляжа:



$$E = 73.1 \cdot 10^9 \text{ Па}$$
$$\nu = 0.33$$

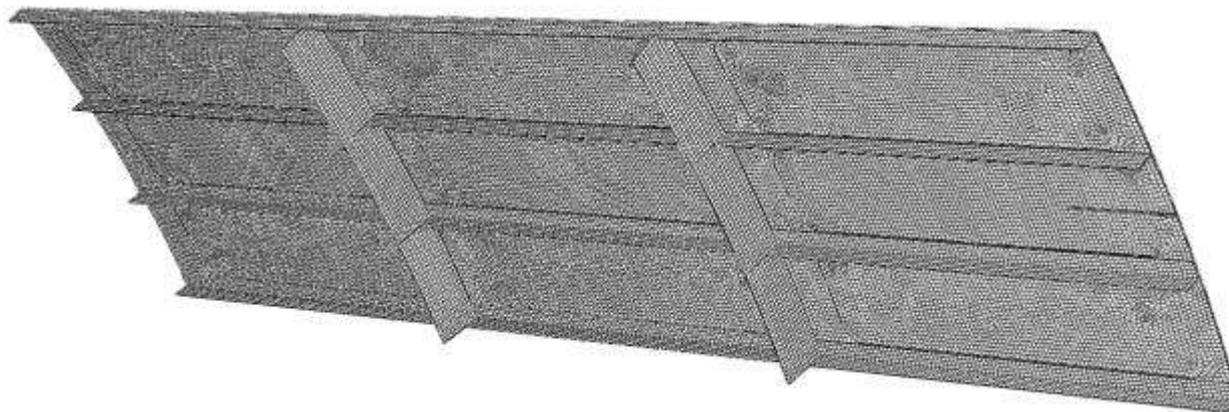
Внутреннее давление:

$$P = 30 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$\sigma_{max} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Все боковые грани, кроме той, через которую проходит трещина, зафиксированы

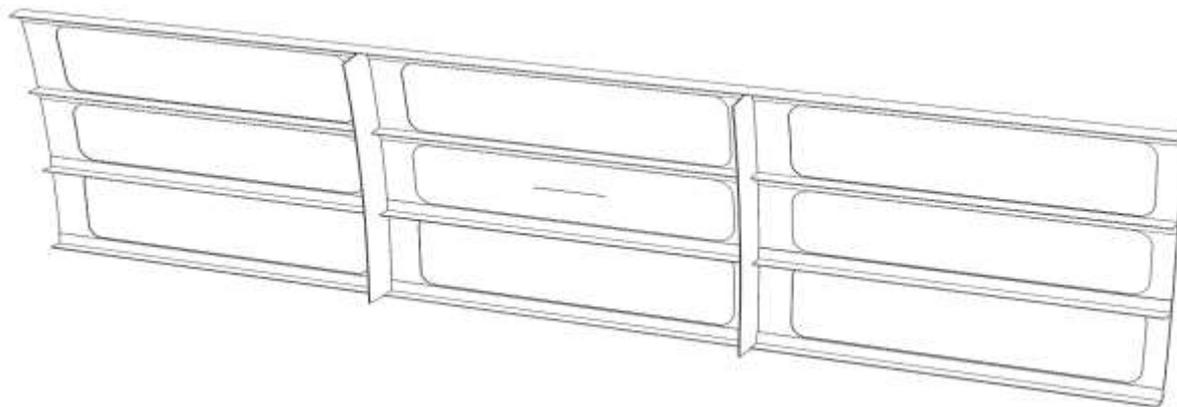
КЭ модель:



NE (число элементов)	52727
NN (число узлов)	91038

Задача о росте трещин. Трещина в реальной пространственной конструкции

Центральная продольная трещина в части фюзеляжа:



$$E = 73.1 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\nu = 0.33$$

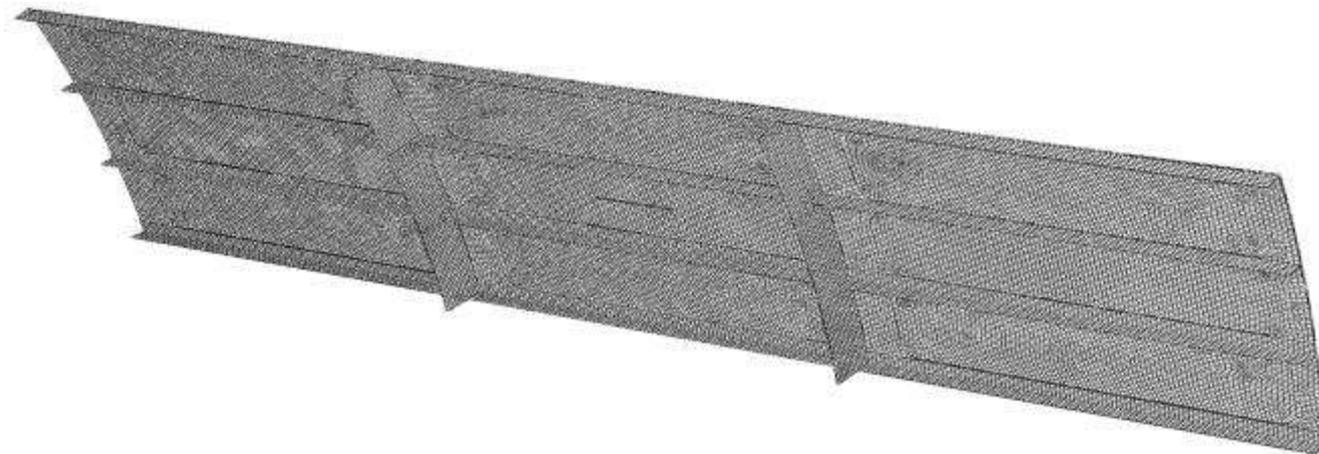
Внутреннее давление:

$$P = 40 \cdot 10^3 \text{ Па}$$

$$\sigma_{max} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

Все боковые грани зафиксированы

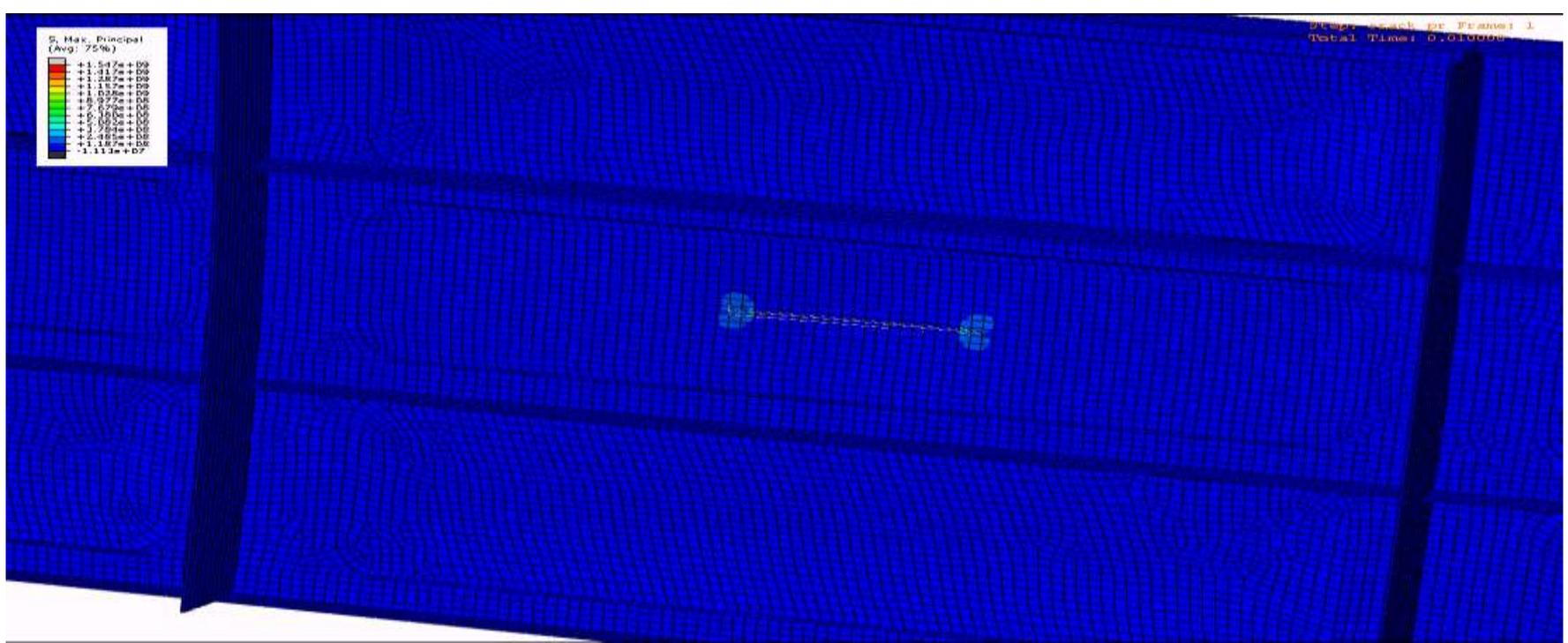
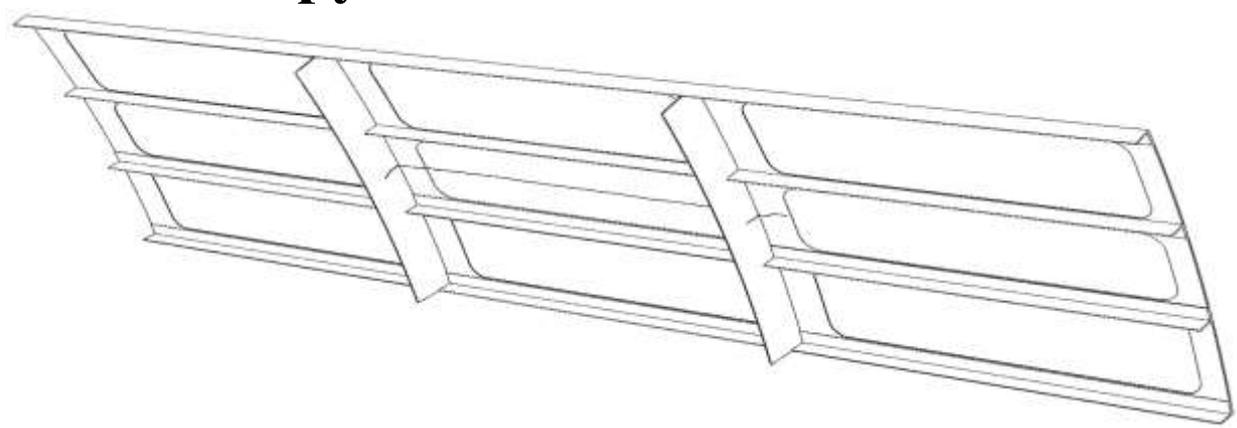
КЭ модель:



NE (число элементов)	52727
NN (число узлов)	91038

Задача о росте трещин. Трещина в реальной пространственной конструкции

Траектория роста трещины, полученная методом XFEM:





Заключение

Метод XFEM

Достоинства:

- Нет необходимости в специальных элементах и т.п.
- Независимость построения трещины от КЭ сетки
- Независимость построения геометрии трещины от тела
- Быстродействие

Недостатки:

- Решение статичных трещин
- Ограничения на использование элементов (используются только линейные элементы)

На основе проведенных исследований данный метод рекомендуется для использования при расчете траекторий распространения трещин в плоских и трехмерных телах