

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра "Механика и процессы управления"

Работа допущена к защите

Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ **Д.А.Индеев**

"\_\_" \_\_\_\_\_ 2016 г.

## **ВЫПУСКНАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА**

**Тема: *Рациональное заполнение внутреннего пространства  
детали при 3D-печати***

По направлению 15.03.03 "Прикладная механика"

Выполнил студент гр. 43602/1

\_\_\_\_\_ **Зелинский И.А.**  
(подпись)

Руководитель, к.т.н., доцент

\_\_\_\_\_ **Немов А.С.**  
(подпись)

Соруководитель, вед. инженер

\_\_\_\_\_ **Жмайло М.А.**  
(подпись)

Санкт-Петербург

2016

# СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ .....	4
ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 Общие сведения об объекте и технологии исследования .....	7
1.1 Мультикоптеры .....	7
1.1.1 Общие сведения .....	7
1.1.2 История создания .....	7
1.1.3 Внутреннее устройство и принцип работы .....	8
1.1.4 Преимущества и недостатки .....	9
1.1.5 Области применения .....	10
1.2 Аддитивные технологии .....	11
1.2.1 Общие сведения .....	11
1.2.2 История создания .....	11
1.2.3 Классификация .....	13
1.2.4 Области применения .....	15
1.2.5 Шаблоны заполнения .....	16
1.2.6 Аддитивные технологии при создании мультикоптеров .....	19
2 Теория топологической оптимизации конструкций .....	20
2.1 Виды оптимизации конструкций .....	20
2.2 Постановка задачи .....	21
2.3 Ограничения .....	22
2.4 Оптимизация топологии .....	22
2.5 SIMP подход описания материала .....	24
3 Гомогенизация .....	27
3.1 Общие сведения .....	27
3.2 Основные формулы и допущения .....	28
3.3 Граничные условия в задаче о поперечном растяжении .....	29

3.4	Алгоритм определения эффективных модулей Юнга и коэффициентов Пуассона для плоской задачи .....	29
3.5	Алгоритм определения эффективных модули Юнга и коэффициентов Пуассона для пространственной задачи .....	32
4	Сравнение шаблонов заполнения .....	35
4.1	Заполнение Rectilinear .....	35
4.2	Заполнение Honeycomb .....	36
4.3	Заполнение Line .....	36
4.4	Сравнение результатов .....	37
5	Крыло мультикоптера .....	38
5.1	Описание крыла .....	38
5.2	Постановка задачи .....	38
5.3	Сравнение работы ребрения и шаблона заполнения Honeycomb .....	40
5.4	Нахождение наилучшей ячейки заполнения для внутренней области .....	41
5.5	Топологическая оптимизация внутреннего пространства крыла .....	51
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	55
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	56
	ПРИЛОЖЕНИЯ .....	58
	Приложение А .....	58

## РЕФЕРАТ

Страниц 58, иллюстраций 61, таблиц 14, источников 17.

### **Рациональное заполнение внутреннего пространства детали при 3D-печати**

*Ключевые слова:* аддитивные технологии, 3D-печать, ABS-пластик, гомогенизация, топологическая оптимизация, мультикоптер, беспилотный летательный аппарат, крыло, метод конечных элементов.

Целью настоящей работы является моделирование и исследование шаблонов заполнения, применяемых в аддитивном производстве, а также нахождение оптимального заполнения внутреннего пространства крыла мультикоптера. Все расчеты в рамках данной работы выполнены при помощи CAE-систем ANSYS и Altair HyperWorks OptiStruct.

В ходе работы разобран процесс гомогенизации как плоских, так и объемных структур. Процесс гомогенизации плоских структур, примененный для шаблонов заполнения, позволяет упростить процесс моделирование внутреннего пространства детали, созданной при помощи аддитивных технологий. По результатам применения процесса гомогенизации к нескольким шаблонам заполнения найден шаблон с лучшими физико-механическими характеристиками.

С применением найденного шаблона заполнения промоделирована задача нагружения крыла мультикоптера и найдена оптимальная ячейка заполнения для данной задачи. Отдельно решена задача оптимизации внутреннего пространства крыла и проведено сравнение полученных результатов.

## ВВЕДЕНИЕ

Аддитивные технологии – часть нового типа производства, активно развивающиеся в последние годы. Суть технологии – в послойном процессе объединения материала с целью создания модели. Это, во-первых, отличает данную технологию от обычных «вычитающих» технологий производства, заключающихся в отрезании, отбивании, высверливании лишнего материала. А во-вторых, позволяет создавать геометрию более сложной формы, чем «вычитающими» технологиями производства. Например, при помощи аддитивных технологий стало гораздо легче воспроизвести оптимизированную геометрию. И, так как это относительно молодая технология, свойства деталей, получаемых при помощи ее использования, известны только в редких случаях.

Вместе с развитием аддитивных технологий получили широкое распространение мультикоптеры. В настоящее время они активно применяются в фото- и видеосъемке, в перевозке малогабаритных грузов. Поэтому, чем меньше весит сама конструкция мультикоптера, тем больше полезного груза мультикоптер сможет перенести и тем больше будет время его полета. Поэтому важно при их создании находить рациональное заполнение внутреннего пространства при помощи оптимизации, а также использовать аддитивные технологии.

В данной работе будет проведен анализ стандартных шаблонов заполнения, используемых в аддитивных технологиях, и поиск рационального заполнения для конкретной задачи – крыла мультикоптера. Целью данной работы ставится нахождение рационального заполнения внутреннего пространства крыла, при котором оно будет справляться с нагрузками лучше, чем при первоначальном заполнении (оребрении), и, по возможности, уменьшение общего веса крыла. Создание крыла при помощи аддитивных технологий и снижение массы крыла, а, следовательно, и всего мультикоптера, позволит:

- уменьшить стоимость;
- уменьшить время изготовления;
- увеличить время (дальность) полета;
- увеличить полезную нагрузку.

Учитывая стремительное развитие аддитивных технологий и увеличение сфер их применения, в том числе и для создания мультикоптеров, вызывает интерес

нахождение рационального заполнения внутреннего пространства при печати мультикоптера.

# 1 Общие сведения об объекте и технологии исследования

## 1.1 Мультикоптеры

### 1.1.1 Общие сведения

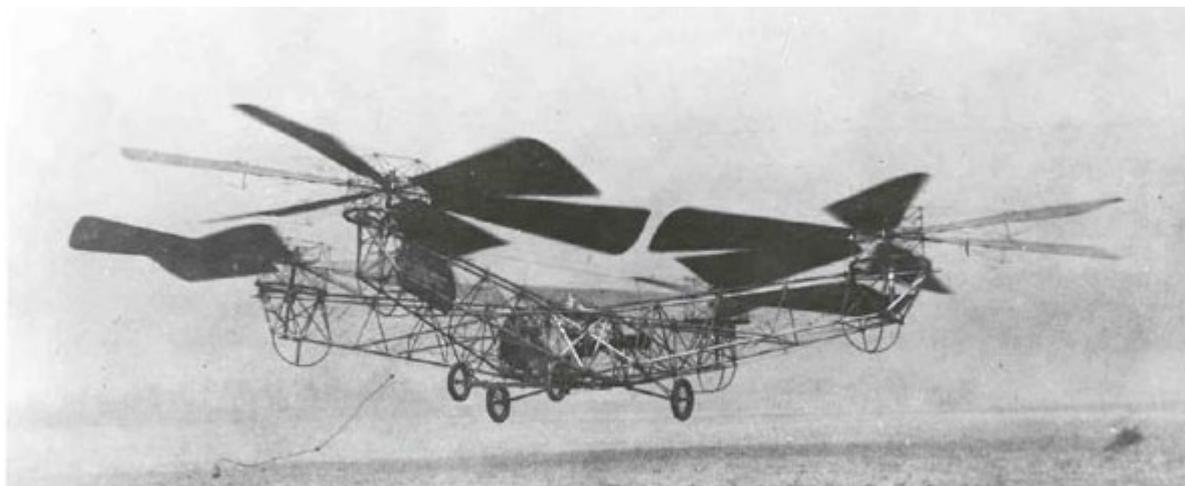
Мультикоптер (многороторный вертолёт) — это беспилотный летательный аппарат с произвольным количеством пропеллеров (несущих винтов), вращающихся диагонально в противоположных направлениях [1]. Обычно к мультикоптерам относят аппараты с числом несущих винтов больше двух.

Основные характеристики:

- собственная масса: 1-4 кг;
- полезная нагрузка: 0.5-3.0 кг;
- средняя продолжительность полета: 10-30 минут.

### 1.1.2 История создания

Многовинтовые вертолеты разрабатывались с самого начала вертолетостроения. Первый квадрокоптер (вертолет с 4 винтами) поднялся в воздух над Дейтоном (США) в 1922 году (рисунок 1-1). Его автором был Георгий Ботезат - русско-американский авиаконструктор, ученый, изобретатель и математик.



*Рисунок 1-1. Квадрокоптер Ботезата.*

Этот квадрокоптер совершил в сумме около 100 полетов, но, хотя и был признан успешным, серийное производство не было реализовано. Это произошло из-за сложной конструкции: у квадрокоптера имелся только один мотор, который при помощи сложной трансмиссии вращал все 4 несущих винта. А также из-за того, что американские военные, финансирующие данный проект, предпочли воздержаться от

дальнейшего финансирования работ по вертолетам, считая их серийное производство преждевременным. Его грузоподъемность оставалась непревзойденной до начала 40-х гг. [2].

Новые работы в направлении многовинтовых вертолетов появились только в 1950-е годы, но были созданы только прототипы, хотя уже тогда данные аппараты позиционировались как беспилотные.



*Рисунок 1-2. Квадрокоптер: 7x7 см*



*Рисунок 1-3. Квадрокоптер: 90x90 см*

В XXI веке мультикоптеры получили новое рождение, теперь уже как беспилотные аппараты небольших размеров [3]. Несмотря на то, что в большой авиации они так и не получили распространение, среди авиамodelистов и профессионалов разных профессий они снискали себе популярность. По сравнению с первым квадрокоптер, современные модели стали просты в постройке и наладке, появилась возможность серийного изготовления, появления микроконтроллеров, которые упрощают управление мультикоптером.

### **1.1.3 Внутреннее устройство и принцип работы**

Мультикоптеры имеют два или более винтов постоянного шага. Каждый винт приводится в движение собственным электродвигателем, управление которым происходит при помощи бортового компьютера.

В отличие от одно- и двухвинтовых аппаратов, в мультикоптерах отсутствует автомат перекаса. Чаще всего встречаются мультикоптеры с четным количеством несущих винтов. Для нормального функционирования, несущие винты мультикоптера, вращаются на встречу друг другу. Такая особенность требуется для компенсации реактивной тяги каждого ротора.

Основная задача бортового компьютера – поддерживать мультикоптер в полете, координируя работу электродвигателей в зависимости от показателей датчиков и команд, поступающих с пульта оператора. Так, изменяя скорость вращения винтов,

бортовой компьютер может задать определенный маневр для мультикоптера. Например:

- ускорить скорость вращения всех винтов — набор высоты;
- ускорить скорость вращения винтов с одной стороны и замедлить с другой — движение в сторону;
- ускорить скорость вращения винтов, вращающихся по часовой стрелке, и замедлить вращающиеся против — поворот.

Современные бортовые компьютеры могут быть оснащены компасом, акселерометром, датчиком высоты и другими приборами, которые в итоге позволяют мультикоптеру самостоятельно поддерживать горизонт, высоту и равновесие в полете.

Кроме мультикоптеров с четным числом несущих винтов, также существуют трёх- и пятивинтовые вертолёты (три- и пентакоптеры). Мотор, винт которого не имеет пары, располагается на оси подвижной платформы, угол поворота которой изменяется сервоприводом.

Все элементы располагаются на несущей раме. Несущая рама должна быть:

- сбалансированной – не допускается перевес в какую-то сторону;
- жесткой – рама должна выдерживать определенные нагрузки;
- упругой – рама должна гасить колебания, которые появляются при полете, и не ломаться при неудачном приземлении или ударе.

#### 1.1.4 Преимущества и недостатки

К преимуществам мультикоптеров можно отнести:

- из-за большего количества несущих винтов, мультикоптеры имеют лучшую устойчивость в воздухе и к порывам ветра;
- отдельные виды мультикоптеров (гексакоптеры и октокоптеры) не боятся поломки одного и даже двух несущих роторов. При остановке двигателя из-за поломки, такие системы компенсируют тягу другими моторами и продолжают выполнять свою функцию;
- простота и надежность конструкции мультикоптеров. Их проектируют таким образом, что они выдерживают многократные падения и удары. А простота обеспечивает возможность замены вышедших из строя деталей.

Именно из-за этих преимуществ в настоящее время мультикоптеры получили широкое распространение.

К недостаткам можно отнести:

- малое время автономной работы мультикоптера. Чем больше собственный вес мультикоптера, тем больше энергии для полета он потребляет;
- на данный момент, все модели мультикоптеров являются относительно небольшими по своим размерам. Что значит, они не могут переносить значительную полезную нагрузку;
- несмотря на то, что при потере нескольких двигателей некоторые мультикоптеры могут продолжать полет и даже осуществлять мягкую посадку, потеря большей части двигателей превращает мультикоптер в неуправляемый объект.

### 1.1.5 Области применения

Беспилотные летательные аппараты можно разделить на 2 типа: военного и гражданского назначения.

Беспилотные летательные аппараты военного назначения могут быть применены для следующих целей:

- разведка;
- транспортировка;
- уничтожение наземных, воздушных или над/подводных целей.

Беспилотные летательные аппараты гражданского назначения нашли себе применение в следующих сферах:

- сельское хозяйство – наблюдение за посевами и скотом;
- МЧС – наблюдение за ситуацией во время ЧС, поиск людей, контроль пожарной безопасности;
- полиция – наблюдение и патрулирование;
- нефтегазовая отрасль – наблюдение за объектами добычи нефти и газа, а также целостности трубопроводов;
- СМИ – ведение аэрофото- и видео съемки для освещения событий;
- геодезия – создание ортофото- и топографических планов;
- прочее.

Таким образом, можно выделить две основные функции, которые выполняют мультикоптеры на данный момент: сбор и передача данных посредством аэрофото- и видео съемки и транспортировка малогабаритных грузов.

## **1.2 Аддитивные технологии**

### **1.2.1 Общие сведения**

Аддитивные технологии (от английского Additive Fabrication) – обобщенное название технологий, предполагающих изготовление изделия по данным цифровой модели (или CAD-модели) методом послойного добавления материала [4]. Из-за этого аддитивные технологии считаются практически безотходными.

Получение изделия происходит послойно, шаг за шагом путем формирования (тем или иным способом) слоя материала, отверждения или фиксации этого слоя в соответствии с конфигурацией сечения CAD-модели и соединения каждого последующего слоя с предыдущим. В этом заключается основное отличие аддитивных технологий от обычных «вычитающих» технологий производства, которые подразумевают удаление (отсечение, высверливание) ненужного материала из заготовки.

### **1.2.2 История создания**

Родоначальником отрасли аддитивных технологий является Чарльз Халл, который в 1986 году разработал технологию стереолитографии (SLA) и запатентовал ее [5]. В этом же году он основал компанию 3D Systems, которая разработала первую в мире «установка для стереолитографии» «Stereolithography Apparatus» (понятия «3D-принтер» появилось позже). Эта установка выращивала смоделированный на компьютере трёхмерный объект из жидкой фотополимеризующейся композиции, нанося послойно на подвижную платформу, погружаемую в ванну с ФПК (фотополимеризующейся композицией). Толщина каждого слоя составляла примерно 0.1-0.2 мм.



*Рисунок 1-4. «Установка для стереолитографии» Чарльза Халла*

Первым серийным принтером также стала модель компании 3D Systems называемая SLA-250, которая увидела свет в 1988 году.

Следующим этапом развития аддитивных технологий можно считать создание технологии FDM (послойного наплавления). Она появилась на свет в 1988 году благодаря Скотту Крампу, который в дальнейшей основал компанию Stratasys.

Этап развития аддитивных технологий в том виде, в котором мы их знаем сейчас, стартовал в 1993 году с создания компании Solidscape. Это компания занималась выпуском струйных принтеров, предшествовавших трехмерным.

Первоначально аддитивные технологии носили название «быстрого прототипирования». Термин «3D-печать» появился в 1995 году, когда два студента Массачусетского технологического института: Джим Бредт и Тим Андерсон – модифицировали струйный принтер таким образом, что он смог создавать изображения не на бумаге, а в специальной емкости, причем сами изображения были объемными. Свою идею они запатентовали и создали компанию Z Corporation.

До этого момента аддитивные технологии ориентировались в основном на промышленное производство. После создания Z Corporation аддитивные технологии стали применяться и в сфере бытовой печати объемных фигур.

Свою роль в развитии аддитивных технологий сыграл проект RepRap (от англ. Replicating Rapid Prototyper — самовоспроизводящийся механизм для быстрого изготовления прототипов) [6], [7]. Суть проекта заключается в создании самокопирующегося устройства (то есть устройство способно создавать детали для другой версии себя), которое может быть использовано для быстрого

прототипирования и производства. Главная особенность проекта – открытое проектирование.

Проект RepRap, а также широкое распространение цифровых технологий в области проектирования (CAD), моделирования и расчетов (CAE) и механообработки (CAM) стимулировало взрывной характер развития аддитивных технологий.

### 1.2.3 Классификация

Можно привести следующую классификацию аддитивных технологий:

- по применяемым строительным или модельным материалам;

Модельные (строительные) материалы могут быть жидкими (фотополимерные смолы, воски и др.), сыпучими (пески, порошковые полимеры, металлопорошковые композиции), в виде тонких листов (полимерные пленки, листы бумаги и др.), а также в виде полимерной нити или металлической проволоки, расплавляемой непосредственно перед формированием слоя построения.

- по методам подвода энергии для фиксации слоя построения;

Подвод энергии можно производить следующими способами: тепловым воздействием, облучением ультрафиолетовым или видимым светом, посредством связующего состава и т.д.

- по методам формирования слоя.

ASTM International (American Society for Testing and Materials) – американская международная добровольная организация, которая разрабатывает и издает различные технические нормативы и стандарты для большого диапазона материалов, изделий, услуг и систем классифицирует аддитивные технологии следующим образом:

- Material Extrusion – выдавливание материала;
- Material Jetting – распыление материала, струйные технологии;
- Binder Jetting – распыление связующего материала;
- Sheet Lamination – объединение листовых материалов;
- Vat Photopolymerization – фотополимеризация в ванне;
- Powder Bed Fusion – расплавление материала в заранее сформированном слое;
- Direct energy deposition – прямой подвод энергии в место построения.

По технологическому принципу аддитивные технологии разделяют на 2 вида:

## 1. послойный синтез (BED DEPOSITION);

Метод заключается в предварительном формировании слоя построения в виде равномерно распределенного по всей поверхности рабочей платформы сыпучего или жидкого строительного материала, а затем селективное отверждение фрагментов сформированного слоя в соответствии с текущим сечением CAD-модели, например, путем спекания, сплавления, склеивания или полимеризации частиц модельного материала.

Можно выделить следующие самые популярные технологии послойного синтеза:

- SLA (Stereo Litography Apparatus) – послойное выращивание модели с помощью ультрафиолетового лазера;
  - SGC (Solid Ground Curing) – многоступенчатый процесс с использованием ультрафиолетового лазера и фрезерной обработки каждого слоя;
  - SLS (Selective Laser Sintering) – лазерное спекание порошковых компонентов;
  - SLM (Selective Laser Melting) – селективное лазерное сплавление.
- ## 2. непосредственное нанесение материала (DIRECT DEPOSITION).

Технология предполагает подачу строительного материала с подведением энергии непосредственно в точку в зоне построения фрагмента детали. Производители используют разные конфигурации применяемых технологий в зависимости от целей и задач. Различаются они по таким критериям, как: тип материала (пруток, паста, вдуваемый порошок), количество одновременно используемых материалов, тип подачи материала (одноканальные, многоканальные, коаксиальные), вид используемой энергии (лазер, плазма, электронный луч), количество осей и пр. В настоящее время данная технология активно используется для ремонта инструментальной оснастки, нанесения защитных покрытий, а также для изготовления литейных форм с конформной системой охлаждения, внутренними теплоотводными элементами и др.

Наиболее распространённой технологией непосредственного нанесения материала является технология FDM (Fused Deposition Manufacturing) – послойное наложение расплавленной полимерной нити.

Самыми распространенными материалами для FDM систем являются:

- ABS – ударопрочный материал, относящийся к инженерным пластикам. Отличается высокой прочностью и износостойкостью;

- PLA – биоразлагаемый, биосовместимый, термопластичный материал. Производится из кукурузы и сахарного тростника. Используется для производства изделий с коротким сроком службы;
- Nylon – обладает повышенной прочностью на разрыв и гибкостью. Также в числе его отличительных особенностей: хорошее соединение с поверхностью, высокая водонепроницаемость, хорошее сопротивление разрыву и возможность впитывать краску;
- PET – бесцветная нить с очень высоким уровнем прозрачности (по прозрачности сравнимо со стеклом). Легкий и ударопрочный материал.

#### 1.2.4 Области применения

Области применения аддитивных технологий можно разделить на несколько категорий: промышленное применение, бытовое и любительское применение, применение в медицине и т.д.

Промышленное применение аддитивных технологий заключается в:

- быстром прототипировании;
- быстром производстве;
- массовой кастомизации;
- массовом производстве.

Отрасли авиа – и автомобилестроения, так же, как и военная и космическая отрасли, сильно заинтересованы в продвижении и использовании аддитивных технологий.

Аддитивные технологии применяются для создания одежды. Так, например, подошва New Balance Zante Generate была полностью напечатана на 3D-принтере [8].

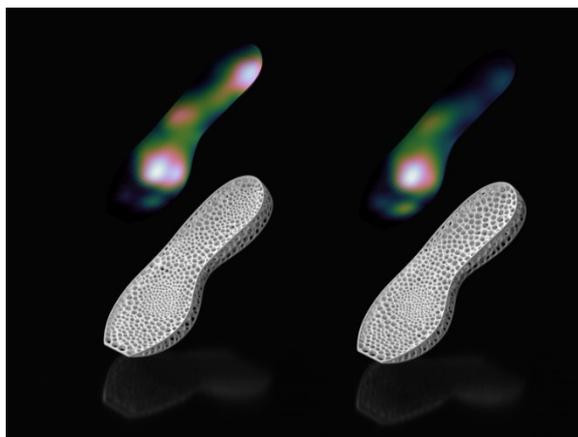


Рисунок 1-5. Напечатанная подошва

Также аддитивные технологии применяются для создания имплантатов и протезов. На сегодняшний день уже были проведены успешные операции по вживлению титановых тазовых и челюстных имплантатов [9].



Рисунок 1-6. Протез тазобедренного сустава

Кроме того, рассматривается возможность применения аддитивных технологий в биоинженерии для создания искусственных органов.

#### 1.2.5 Шаблоны заполнения

Цена детали, изготовленной при помощи аддитивных технологий, в первую очередь зависит от количества затраченного материала. Поэтому, для его экономии, а также для увеличения скорости печати, детали изготавливаются с частичным внутренним заполнением.

Шаблон заполнения – это стандартный вид заполнения внутреннего пространства. Прочность модели, созданной при помощи аддитивных технологий, во многом зависит от шаблона заполнения, выбранном при печати, а также плотности заполнения.

При выборе шаблона заполнения нужно принимать во внимание: требуемую жесткость объекта, время печати и материал. Более сложный шаблон будет требовать больше движений, которых будет необходимо совершить принтеру, и соответственно на его печать потребуется больше времени и материала.

Существует несколько шаблонов заполнения. Основные из них указаны на рисунках 1-7 – 1-13. Цифры под рисунками обозначают оценку используемого материала и время печати для кубика со сторонами 20 мм [10].

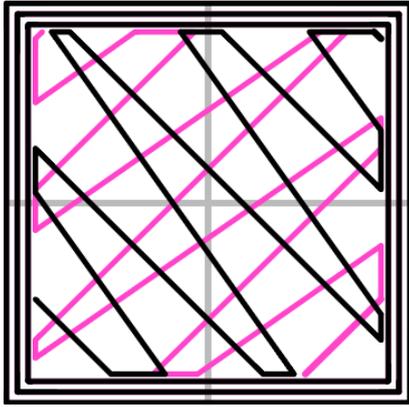


Рисунок 1-7. Заполнение Line (344.51mm / 5m:20s)

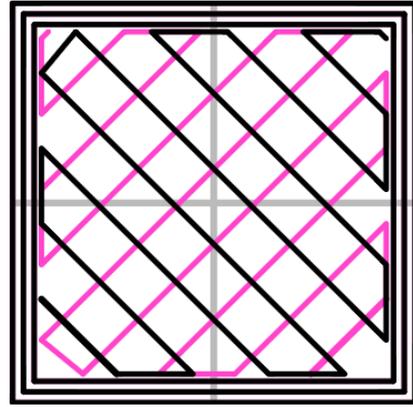


Рисунок 1-8. Заполнение Rectilinear (350.57mm / 5m:23s)

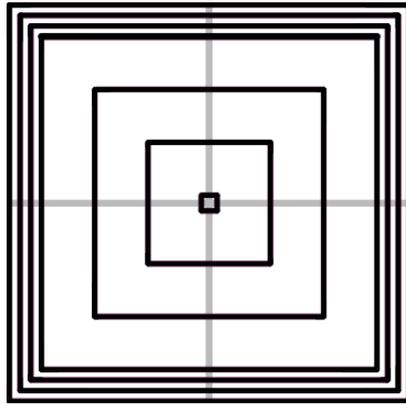


Рисунок 1-9. Заполнение Concentric (351.80mm / 5m:30s)

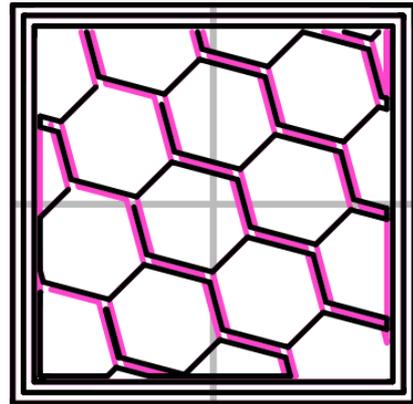


Рисунок 1-10. Заполнение Honeycomb (362.73mm / 5m:39s)

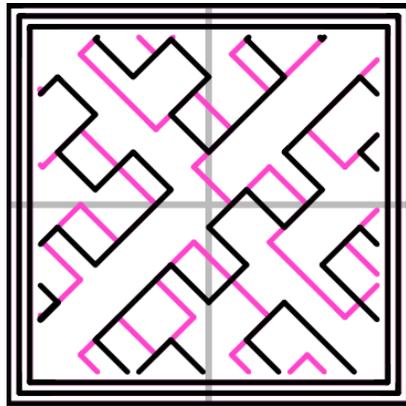


Рисунок 1-11. Заполнение Hilbert Curve (332.82mm / 5m:28s)

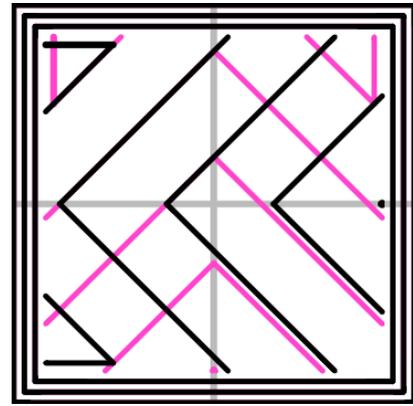
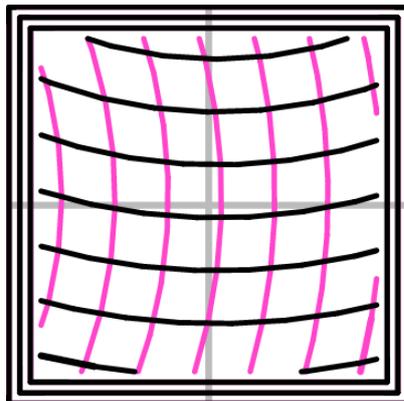


Рисунок 1-12. Заполнение Octagram Spiral (318.63mm / 5m:15s)



Большинство моделей требуют низкую плотность заполнения. Использование более 50% заполнения приведет к созданию более плотной модели, в которой будет использоваться больше материала, чем необходимо. Из-за этого процент заполнения модели чаще всего попадает в интервал 10-30%, однако конечный процент заполнения определяется исходя из конкретной модели.

В приложении А показано, как изменяются шаблоны заполнения в зависимости от плотности.

### **1.2.6 Аддитивные технологии при создании мультикоптеров**

При помощи аддитивных технологий можно создавать конструкции, которые обычными методами производства не могли быть созданы, либо процесс их создания занимал очень много времени.

Это, а также современные технологии прототипирования и оптимизации, позволяет создавать мультикоптеры с улучшенными свойствами. Например, можно снизить общую массу мультикоптера, что позволит увеличить время автономной работы, а также повысить полезную нагрузку, которую он может переносить.

Как пример применения аддитивных технологий при создании мультикоптеров, можно рассмотреть пожарный мультикоптер (рисунки 1-14, 1-15) [11]. Первоначально его рама была напечатана из пластика, который плавился при повышенных температурах. Замена пластика на титан, а также изменение геометрии рамы, позволило снизить парусность аппарата на 60 процентов, что почти вдвое увеличило время полета — максимальное время полета теперь составляет 45 минут.



*Рисунок 1-14. Противопожарный гексакоптер*



*Рисунок 1-15. Титановая рама дрона*

## 2 Теория топологической оптимизации конструкций.

### 2.1 Виды оптимизации конструкций

Существует три вида задач оптимизации конструкций:

- Оптимизация размера (Size optimization);

Это простейший из трех методов структурной оптимизации, состоящий в изменении размеров и толщин конструкции при сохранении ее формы и топологии. Следовательно, оптимизация состоит в определении значений конструктивных параметров, дающих оптимальное структурное поведение конструкции.

- Оптимизация формы (Shape optimization);

Данный вид оптимизации подразумевает сохранение неизменной топологии при изменении формы и контуров. Переменные оптимизации в этом случае задают форму конструкции.

- Топологическая оптимизация (Topology optimization).

Целью задачи топологической оптимизации является нахождение оптимального распределения материала в определённой области (пространство оптимизации), с учётом заданных нагрузок и связей. Топологическая оптимизация включает в себя нахождение числа, формы и расположения отверстий в области [12].

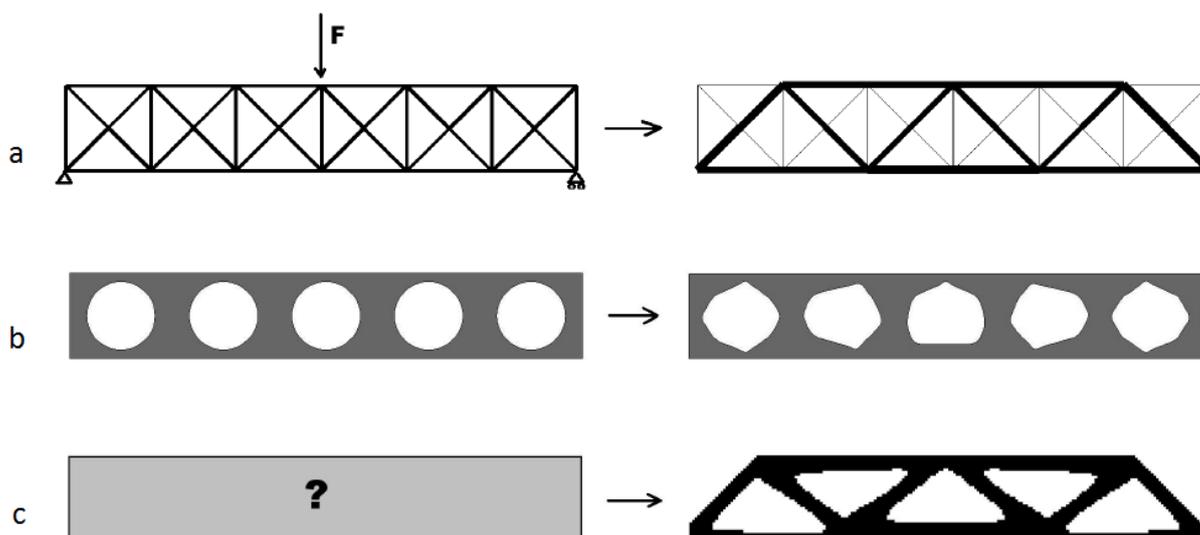


Рисунок 2-1. (a) Оптимизация размера, (b) Оптимизация формы, (c) Топологическая оптимизация

## 2.2 Постановка задачи

Процесс оптимизации любой конструкции требует ее параметризации, дающей возможность находить альтернативные конструкции с измененными параметрами. В качестве параметров могут выступать геометрические характеристики конструкции, материалы, из которых она выполнена, и прочее. Различные сочетания значений параметров будут давать различные конструкции. В зависимости от поставленной задачи некоторые параметры могут быть ограничены. Так, например, в конструкции может быть использован только один материал. Остальные же параметры конструкции остаются изменяемыми. Мерой качества найденной конструкции могут выступать нагрузки, которая она способна выдержать. Цель оптимизации – найти такое сочетание параметров, при котором показатель качества конструкции будет максимален.

Показатель качества может быть представлен как функция параметров конструкции. Оптимизируемые (изменяемые) параметры называются переменными оптимизации, а показатель качества, представленный как функция этих переменных, называется целевой функцией.

На математическом языке оптимизацию конструкций можно представить следующим образом:

$$\min/\max F(X), \quad (2-1)$$

где  $X$  –  $n$ -мерный вектор переменных оптимизации,  $F(X)$  – целевая функция.

Однако в реальных задачах конструкция редко оценивается одним показателем качества, а, следовательно, и несколькими целевыми функциями. В случае, когда целевых функций несколько, выбирается либо самый предпочтительный показатель качества, либо строится объединенный показатель с некоторыми весовыми коэффициентами – сложные целевые функции. Кроме того, некоторые показатели качества могут быть выступать в качестве ограничений. Также в реальных задачах переменные оптимизации чаще всего имеют ограниченную область определения.

На математическом языке эти ограничения примут следующий вид:

$$X_i \leq X \leq X_j; \quad (2-2)$$

$$G_l(X) \geq 0 (\leq 0), \quad l = 1, \dots, m; \quad (2-3)$$

$$H_k(X) = 0, \quad k = 1, \dots, q, \quad (2-4)$$

где  $m$  – количество ограничивающих неравенств,  $q$  – количество ограничивающих равенств,  $X_i, X_j$  – нижний и верхний пределы переменных оптимизации.

### 2.3 Ограничения

В постановке большинства задач оптимизации присутствуют ограничения. Ограничения могут быть трех видов:

- ограничения области определения переменных оптимизации. Для выполнения этого ограничения требуется, чтобы в процессе оптимизации переменные не выходили за установленные рамки;
- ограничения-равенства. Данные ограничения сокращают размерность пространства решений;
- ограничения неравенства. При данных ограничениях целевая функция меняется для учета влияния ограничений.

Изменение целевой функции происходит при помощи добавления штрафных функций. Суть штрафных функций такова: при нарушении ограничения к целевой функции добавляется бесконечно большое число, иначе (нет нарушения ограничения) целевая функция остается прежней. На математическом языке это можно записать следующим образом:

$$P(X) = \begin{cases} 0, & X \in R_f^n \\ +\infty, & X \notin R_f^n \end{cases} \quad (2-5)$$

где  $P(X)$  – штрафная функция,  $R_f^n$  – подмножество  $R^n$ , соответствующее конструкциям, удовлетворяющим всем ограничениям.

### 2.4 Оптимизация топологии

Топология (от др.-греч. τόπος — место и λόγος — слово, учение) — раздел математики, изучающий в самом общем виде явление непрерывности, в частности свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях. Термин «топология» впервые ввел Листинг в своей работе 1847 года.

Оптимизация топологии – математический подход, оптимизирующий расположение материала в пределах заданной области оптимизации при заданном наборе граничных условий и нагрузок.

Глобальная оптимизация обязательно включает и оптимизацию топологии, то есть такие изменения, которые включают создание новых границ и удаление

существующих. Переменные топологической оптимизации должны определять конкретную топологию детали. Оптимизация, следовательно, заключается в определении значений переменных, соответствующих такой топологии детали, которая делает поведение данной детали оптимальным по отношению к структуре.

С самого начала для решения задач оптимизации топологии применялся метод конечных элементов. По результатам его применения из материала удалялись элементы с низкими значениями напряжений. Такой подход оказался неудачным, так как оказалось, что получаемый результат зависит от первоначальной плотности сетки конечных элементов. Отметив неудачную постановку задачи, Кохн и Странг в 1986 году предложили вариационную задачу, в которой материал считался пористым, а оптимизация проводилась относительно степени пористости.

Бендсоу и Кикучи сделали аналогичное предположение в 1988 году – что тело, для которого решается задача топологической оптимизации, обладает пористой структурой. Область конструкции определялась ими как пространство, внутри которого должна поместиться деталь. Данная область делится на сетку ячеек, к которым прикладываются нагрузки. В качестве целевой функции выбирается средняя податливость структуры, а ограничением - максимальный вес. За первоначальную форму оптимизированной детали принимается вся область конструкции. Пористость материала моделируется при помощи структуры, ячейка которой показана на рисунке (рисунок 2-2). Предполагается, что материал состоит из бесконечного количества бесконечно малых таких ячеек.

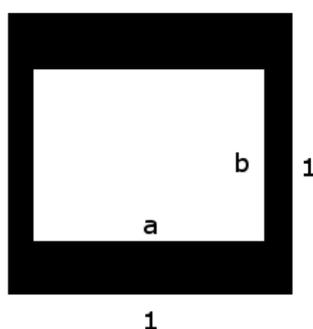


Рисунок 2-2. Структурная ячейка

В 1991 году Сузуки и Кикучи предложили полость в ячейке выражать отверстием прямоугольной формы, имеющем размеры  $a$  на  $b$ . Для каждой ячейки задается свои значения  $a_i$ ,  $b_i$  ( $i$  – номер ячейки), которые определяют размеры полости

внутри ячейки, а, следовательно, все вместе и пористость всего материала. Изменение размеров полостей приводит к изменению свойств описываемого материала.

## 2.5 SIMP подход описания материала

Для описания материала существует несколько подходов: гомогенизационный подход, SIMP (Solid Isotropic Material with Penalisation) метод, ESO (Evolutionary Structural Optimization) метод. Самым изучаемым и развитым на сегодняшний день является SIMP подход. Именно он используется в программном обеспечении Altair HyperWorks OptiStruct.

SIMP подход впервые был описан Бендсо в [13]. В данном подходе объем материала, подлежащего оптимизации, разделяется на сетку из  $N$  элементов (изотропные сплошные микроструктуры). Каждому такому элементу ставится в соответствие относительная плотность  $\rho_e$ , а в качестве целевой функции выступает энергия деформации SE (Strain Energy). Ограничения накладываются на объем материала. Таким образом, задачу оптимизации топологии при помощи SIMP подхода формулируется следующим образом:

$$\text{минимизировать : } SE(\rho_e) = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p u_e^T k_e u_e$$

$$\text{ограничения : } \frac{V(x)}{V_0} = f,$$

$$KU = F,$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1,$$

где:

- $U$  – глобальный вектор перемещений;
- $F$  – глобальный вектор сил;
- $u_e$  и  $k_e$  – вектор перемещений и матрица жёсткости элемента;
- $\rho_e$  – вектор параметров проектирования (вектор относительных плотностей элементов);
- $\rho_{min}$  – минимально возможное значение плотности (для пустых элементов), ненулевой для устойчивости конечно-элементного анализа;

- $N$  – количество элементов в модели;
- $V(\rho_e)$  – текущий объём конструкции;
- $V$  – начальный объём конструкции;
- $f$  – заданный заранее коэффициент изменения объёма, то есть коэффициент необходимого количества удаляемого материала;
- $p$  – штрафной параметр, основной параметр данного метода, его величина играет ключевую роль в поведении алгоритма. Он необходим для уменьшения вклада элементов с частичной плотностью, так называемых «серых» элементов, и, таким образом, поощрить создание «черных» ( $p = 1$ ) или «белых» ( $p = p_{\min}$ ) элементов.

Далее представлен простейший алгоритм SIMP подхода. Начальной точкой является структура, в которой относительная плотность каждого элемента  $\rho_1$  равна 1. Это начальное положение распределения относительных плотностей изменяется при каждой следующей итерации, стремясь к оптимальному значению распределения  $\rho_e$ .

1. *Старт оптимизации. Определение  $V$ ,  $p$  и начального распределения плотности;*
2. *Старт цикла (итерации)*
  - 2.1. *КЭ анализ;*
  - 2.2. *Анализ чувствительности;*
  - 2.3. *Фильтрующая техника;*
  - 2.4. *Задание нового распределения плотностей;*
  - 2.5. *Проверка на сходимость. Да – переход к пункту 3, нет – в начало цикла (новая итерация).*
3. *Найдено оптимальное решение. Конец оптимизации.*

Результаты, полученные с помощью конечно-элементного анализа на первом шаге каждой итерации, используются для вычисления чувствительности каждого элемента. Под чувствительностью понимается импульс, или воздействие, которое оказывает варьирование плотности элемента на целевую функцию. Выражение для чувствительности может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial SE}{\partial p} = -p(\rho_e)^{p-1} u_e^T k_e u_e.$$

При расчете чувствительности каждого элемента в отдельности, без учёта взаимодействий всех элементов, может произойти появление не сплошных структур

или, так называемого, «шахматного эффекта». Во избежание появления данного эффекта, была разработана специальная фильтрующая техника, накладывающая некоторые ограничения на итоговые параметры конструкции [14].

Последним шагом в каждой итерации является обновление значений относительных плотностей для каждого элемента для нахождения оптимальной структуры. Для этой цели применяется критерий оптимальности, согласно которому целевая функция модифицируется для учёта ограничений с помощью введения неопределённого множителя Лагранжа, который может быть найден алгоритмом половинного деления. Основываясь на изменённом критерии, чувствительность каждого элемента повышается или понижается на определённую величину.

## 3 Гомогенизация

### 3.1 Общие сведения

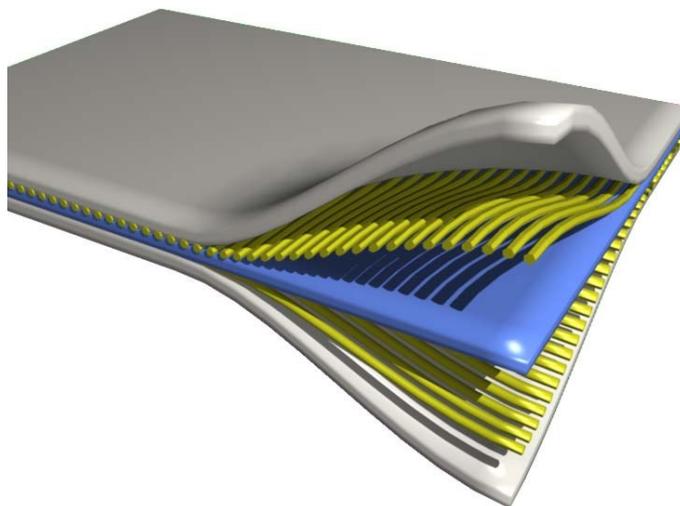
Композиционный материал (композит) - искусственно созданный неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов (фаз) с отчетливо выраженными поверхностями сопряжения и различными физико-механическими свойствами [15]. Для большей части композитов компоненты можно разделить на 2 типа:

- армирующие элементы (наполнители, включения);

Эти элементы обеспечивают необходимые характеристики материала: прочность, жесткость и прочее.

- матрица (связующее).

Обеспечивает совместную работу армирующих элементов и их защиту от различного рода повреждений.



*Рисунок 3-1. Внутреннее устройство композита*

Для нахождения характеристик композиционного материала, производят расчеты эффективных характеристик. Для их нахождения используют метод гомогенизации.

Гомогенизация – термин, используемый в механике для расчета композиционных материалов. При гомогенизации композиционного материала

получается условно однородный материал (гомогенный), физические характеристики которого совпадают с характеристиками композиционного материала.

### 3.2 Основные формулы и допущения

Далее изложение материала ведется согласно [16], [17].

При изучении поведения композиционных материалов обычно делают следующие предположения:

- компоненты композиционного материала - линейно-упругие, однородные, изотропные: связь между напряжениями и деформациями в компонентах композита описывается законом Гука;
- компоненты композиционного материала идеально связаны между собой – на поверхностях сопряжения компонентов реализуются условия непрерывности векторов перемещения и напряжений;
- волокнистый композит представляет собой линейно-упругий макроскопически однородный материал без начальных напряжений; в зависимости от укладки волокон материал принимается трансверсально-изотропным или ортотропным.

В случае, если геометрические характеристики (форма, расположение, размер) и физические свойства композиционного материала повторяются в пространстве с определенной периодичностью, то композиционный материал обладает периодической структурой.

Область пространства, которая содержит повторяющиеся геометрические характеристики и физические свойства композиционного материала, называется ячейкой периодичности или представительным элементом объема. Именно в пределах этого пространства происходит процесс гомогенизации.

Для определения средних по объему представительного элемента тензоров микродеформаций и микронапряжений, используют формулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon dV \quad (3-1)$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV \quad (3-2)$$

где  $V$  – объем представительного элемента,  $\langle \varepsilon \rangle$  – средний тензор микродеформаций,  $\langle \sigma \rangle$  – средний тензор микронапряжений.

Средние тензоры микродеформации и микронапряжений для  $i$ -го элемента объема связаны следующим образом:

$$\langle \sigma^i \rangle = C_4^i \cdot \langle \varepsilon^i \rangle \quad (3-3)$$

где  $C_4^i$  - тензор модулей упругости (тензор 4-го ранга) для  $i$ -го элемента.

### 3.3 Граничные условия в задаче о поперечном растяжении

В задаче о поперечном растяжении ячейка периодичности находится в плоском деформированном состоянии:

$$u_3 = 0, \sigma_{23} = 0, \sigma_{31} = 0 \quad (3-4)$$

При помощи обобщенного закона Гука компонент тензора напряжений  $\sigma_{33}$  выражается через  $\sigma_{11}$  и  $\sigma_{22}$ .

Кинематико-статические граничные условия для данной задачи будут выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} x_1 = \pm \frac{h_1}{2}: \quad u_1 = u_1^0 \quad \sigma_{12} = 0 \quad \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = \pm \frac{h_2}{2}: \quad u_2 = 0 \quad \sigma_{12} = 0 \quad \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = \pm \frac{h_3}{2}: \quad u_3 = 0 \quad \sigma_{23} = 0 \quad \sigma_{31} = 0 \end{aligned} \quad (3-5)$$

где  $h_i$  - размеры ячейки периодичности,  $u_1^0$  – заданные перемещения.

### 3.4 Алгоритм определения эффективных модулей Юнга и коэффициентов Пуассона для плоской задачи

Чтобы найти эффективные модули Юнга и эффективные коэффициенты Пуассона, решаются две задачи о поперечном растяжении ячейки периодичности, находящейся в плоском деформированном состоянии при кинематико-статических граничных условиях.

Задача №1:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{h_1}{2}: u_1 = u_1^0, \sigma_{12} = 0; \quad x_1 = -\frac{h_1}{2}: u_1 = 0, \sigma_{12} = 0; \\ x_2 = \frac{h_2}{2}: u_2 = 0, \sigma_{12} = 0; \quad x_2 = -\frac{h_2}{2}: u_2 = 0, \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3-6)$$

Задача №2:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{h_1}{2}: u_1 = 0, \sigma_{12} = 0; & \quad x_1 = -\frac{h_1}{2}: u_1 = 0, \sigma_{12} = 0; \\ x_2 = \frac{h_2}{2}: u_2 = u_2^0, \sigma_{12} = 0; & \quad x_2 = -\frac{h_2}{2}: u_2 = 0, \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3-7)$$

По результатам решения данных задач, определяются средние тензора микродеформаций и микронапряжений для каждой задачи:

$$\langle \varepsilon^i \rangle = \frac{u_i}{h_i} e_i e_i = \varepsilon_{ii}^0 e_i e_i \quad (3-8)$$

$$\langle \sigma^i \rangle = \sum_{k=1}^3 \langle \sigma_{kk}^i \rangle e_k e_k \quad (3-9)$$

где  $i$  – номер задачи.

Эффективный модуль Юнга в направлении волокон определяется по правилу смесей с высокой степенью точности:

$$E_3^* = \sum_{k=1}^n q_k E_k \quad (3-10)$$

где  $n$  – число компонентов в композиционном материале,  $q_k = \frac{V_k}{V}$  – объемная концентрация  $k$ -го компонента,  $E_k$  – модуль Юнга  $k$ -го компонента.

Остальные эффективные модули Юнга определяются следующим образом:

$$E_1^* = \frac{E_3^* a_{12}^2}{E_3^* \langle \sigma_{22}^2 \rangle a_{12} \varepsilon_{11}^0 + a_{23}^2} \quad (3-11)$$

$$E_2^* = \frac{E_3^* a_{12}^2}{E_3^* \langle \sigma_{11}^1 \rangle a_{12} \varepsilon_{22}^0 + a_{13}^2} \quad (3-12)$$

где  $a_{ij} = \langle \sigma_{ii}^1 \rangle \langle \sigma_{jj}^2 \rangle - \langle \sigma_{jj}^1 \rangle \langle \sigma_{ii}^2 \rangle$ .

Эффективные коэффициенты Пуассона определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \nu_{12}^* &= \frac{E_3^* \langle \sigma_{11}^2 \rangle a_{21} - E_1^* \langle \sigma_{33}^2 \rangle a_{23}}{E_3^* \langle \sigma_{22}^2 \rangle a_{21}}, \quad \nu_{23}^* = \frac{E_2^* a_{13}}{E_3^* a_{12}}, \quad \nu_{32}^* = \frac{a_{13}}{a_{12}} \\ \nu_{21}^* &= \frac{E_3^* \langle \sigma_{22}^1 \rangle a_{12} - E_2^* \langle \sigma_{33}^1 \rangle a_{13}}{E_3^* \langle \sigma_{11}^1 \rangle a_{12}}, \quad \nu_{13}^* = \frac{E_1^* a_{23}}{E_3^* a_{21}}, \quad \nu_{31}^* = \frac{a_{23}}{a_{21}} \end{aligned} \quad (3-13)$$

Для проверки найденных эффективных модулей Юнга и коэффициентов Пуассона можно использовать формулу:

$$E_1^* \nu_{21}^* = E_2^* \nu_{12}^* \quad (3-14)$$

Для определения эффективных модулей сдвига решаются дополнительные задачи: для  $G_{12}^*$  - задача о поперечном сдвиге ячейки периодичности, для  $G_{23}^*$ ,  $G_{13}^*$  - две задачи о продольном сдвиге ячейки периодичности.

При нахождении  $G_{12}^*$  предполагается, что ячейка находится в плоском деформированном состоянии.

Задача №3:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{h_1}{2}: u_2 = 0, \sigma_{12} = 0; & \quad x_1 = -\frac{h_1}{2}: u_2 = 0, \sigma_{12} = 0; \\ x_2 = \frac{h_2}{2}: u_1 = u_*, \sigma_{12} = 0; & \quad x_2 = -\frac{h_2}{2}: u_1 = 0, \sigma_{12} = 0. \end{aligned} \quad (3-15)$$

В этом случае усреднённые тензоры деформации и напряжений будут иметь вид:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \langle \gamma_{12} \rangle (e_1 e_2 + e_2 e_1) = \frac{1}{2} \frac{u_*}{h_2} (e_1 e_2 + e_2 e_1) \quad (3-16)$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{12} \rangle (e_1 e_2 + e_2 e_1) \quad (3-17)$$

Тогда выражение для определения эффективного модуля сдвига  $G_{12}^*$  будет иметь вид:

$$G_{12}^* = \frac{\langle \sigma_{12} \rangle}{\langle \gamma_{12} \rangle} \quad (3-18)$$

При нахождении  $G_{23}^*$ ,  $G_{13}^*$  предполагается, что ячейка находится в антиплоском деформированном состоянии. В этом случае вектор перемещений имеет вид:

$$u = u_3 (x_1, x_2) e_3 \quad (3-19)$$

Задача №4 (нахождение  $G_{23}^*$ ):

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{h_1}{2}: \sigma_{13} = 0; & \quad x_1 = -\frac{h_1}{2}: \sigma_{13} = 0; \\ x_2 = \frac{h_2}{2}: u_3 = u_*; & \quad x_2 = -\frac{h_2}{2}: u_3 = 0. \end{aligned} \quad (3-20)$$

В этом случае усреднённые тензоры деформации и напряжений будут иметь вид:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \langle \gamma_{23} \rangle (e_2 e_3 + e_3 e_2) = \frac{1}{2} \frac{u_*}{h_2} (e_2 e_3 + e_3 e_2) \quad (3-21)$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{23} \rangle (e_2 e_3 + e_3 e_2) \quad (3-22)$$

Тогда выражение для определения эффективного модуля сдвига  $G_{23}^*$  будет иметь вид:

$$G_{23}^* = \frac{\langle \sigma_{23} \rangle}{\langle \gamma_{23} \rangle} \quad (3-23)$$

Задача №5 (нахождение  $G_{13}^*$ ):

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{h_1}{2}: u_3 = u_*; & & x_1 = -\frac{h_1}{2}: u_3 = 0; \\ x_2 = \frac{h_2}{2}: \sigma_{23} = 0; & & x_2 = -\frac{h_2}{2}: \sigma_{23} = 0. \end{aligned} \quad (3-24)$$

В этом случае усреднённые тензоры деформации и напряжений будут иметь вид:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} \langle \gamma_{13} \rangle (e_1 e_3 + e_3 e_1) = \frac{1}{2} \frac{u_*}{h_1} (e_1 e_3 + e_3 e_1) \quad (3-25)$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{13} \rangle (e_1 e_3 + e_3 e_1) \quad (3-26)$$

Тогда выражение для определения эффективного модуля сдвига  $G_{13}^*$  будет иметь вид:

$$G_{13}^* = \frac{\langle \sigma_{13} \rangle}{\langle \gamma_{13} \rangle} \quad (3-27)$$

### 3.5 Алгоритм определения эффективных модули Юнга и коэффициентов Пуассона для пространственной задачи

Чтобы найти эффективные модули Юнга и эффективные коэффициенты Пуассона, решаются три пространственные задачи о растяжении ячейки периодичности в направлении осей с заданием кинематико-статических граничных условиях с учетом симметрии внешнего воздействия.

Задача №1: растяжение вдоль оси X

$$\begin{aligned} x_1 = 0: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 & & x_1 = h_1: u_1 = u_1^0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0: u_2 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 & & x_2 = h_2: u_2 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = 0: u_3 = 0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 & & x_3 = h_3: u_3 = 0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (3-28)$$

Задача №2: растяжение вдоль оси Y

$$\begin{aligned} x_1 = 0: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 & & x_1 = h_1: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0: u_2 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 & & x_2 = h_2: u_2 = u_2^0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \end{aligned} \quad (3-29)$$

$$x_3 = 0: u_3 = 0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \quad x_3 = h_3: u_3 = 0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$$

Задача №3: растяжение вдоль оси Z

$$\begin{aligned} x_1 = 0: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 & \quad x_1 = h_1: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0: u_2 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 & \quad x_2 = h_2: u_2 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 \\ x_3 = 0: u_3 = 0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 & \quad x_3 = h_3: u_3 = u_3^0, \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (3-30)$$

После получения результатов решения данных задач, эффективные модули Юнга и коэффициенты Пуассона ищутся по формулам:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \langle \sigma_{ii}^1 \rangle \langle \sigma_{jj}^2 \rangle - \langle \sigma_{jj}^1 \rangle \langle \sigma_{ii}^2 \rangle \\ b_{ij} &= \langle \sigma_{ii}^2 \rangle \langle \sigma_{jj}^3 \rangle - \langle \sigma_{jj}^2 \rangle \langle \sigma_{ii}^3 \rangle \\ c_{ij} &= \langle \sigma_{ii}^3 \rangle \langle \sigma_{jj}^1 \rangle - \langle \sigma_{jj}^3 \rangle \langle \sigma_{ii}^1 \rangle \\ E_1^* &= \frac{\langle \sigma_{11}^1 \rangle b_{23} + \langle \sigma_{22}^1 \rangle b_{31} + \langle \sigma_{33}^1 \rangle b_{12}}{\varepsilon_{11}^0 b_{23}} \\ E_2^* &= \frac{\langle \sigma_{11}^2 \rangle c_{23} + \langle \sigma_{22}^2 \rangle c_{31} + \langle \sigma_{33}^2 \rangle c_{12}}{\varepsilon_{22}^0 c_{13}} \\ E_3^* &= \frac{\langle \sigma_{11}^3 \rangle a_{23} + \langle \sigma_{22}^3 \rangle a_{31} + \langle \sigma_{33}^3 \rangle a_{12}}{\varepsilon_{33}^0 a_{12}} \\ \nu_{12}^* &= -\frac{b_{31}}{b_{23}} \quad \nu_{23}^* = -\frac{c_{12}}{c_{31}} \quad \nu_{31}^* = -\frac{a_{23}}{a_{12}} \\ \nu_{13}^* &= -\frac{b_{12}}{b_{23}} \quad \nu_{21}^* = -\frac{c_{23}}{c_{31}} \quad \nu_{32}^* = -\frac{a_{31}}{a_{12}} \end{aligned} \quad (3-31)$$

Для определения эффективных модулей сдвига решаются еще три дополнительные задачи:

Задача №1: сдвиг вдоль оси X

$$\begin{aligned} x_1 = 0: u_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_{13} = 0 & \quad x_1 = h_1: u_1 = u_1^0, \sigma_1 = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0: u_1 = \pm u_1^0, & \quad x_2 = h_2: u_1 = \pm u_1^0, \\ \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0 & \quad \sigma_3 = \sigma_{13} = 0 \end{aligned} \quad (3-32)$$

$$x_3 = 0: u_3 = 0, \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0 \quad x_3 = h_3: u_3 = 0, \sigma_{31} = \sigma_{32} = 0$$

Задача №2: сдвиг вдоль оси Y

$$\begin{aligned} x_1 = 0: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 & \quad x_1 = h_1: u_1 = 0, \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0 \\ x_2 = 0: u_3 = 0, \sigma_{12} = \sigma_2 = 0 & \quad x_2 = h_2: u_3 = 0, \sigma_{12} = \sigma_2 = 0 \end{aligned} \quad (3-33)$$

$$x_3 = 0: u_2 = \pm u_2^0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_{13} = 0$$

$$x_3 = h_3: u_2 = \pm u_2^0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_{13} = 0$$

Задача №3: сдвиг вдоль оси Z

$$x_1 = 0: u_3 = \pm u_3^0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_{13} = 0$$

$$x_1 = h_1: u_3 = \pm u_3^0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_{13} = 0$$

(3-34)

$$x_2 = 0: u_2 = 0, \sigma_{32} = \sigma_2 = 0 \quad x_2 = h_2: u_2 = 0, \sigma_{32} = \sigma_2 = 0$$

$$x_3 = 0: u_1 = 0, \sigma_3 = \sigma_{12} = 0 \quad x_3 = h_3: u_1 = 0, \sigma_3 = \sigma_{12} = 0$$

После получения результатов решения данных задач, эффективные модули сдвига ищутся по формулам:

$$G_{12}^* = \frac{\langle \sigma_{12} \rangle}{\langle \gamma_{12} \rangle}, \quad G_{23}^* = \frac{\langle \sigma_{23} \rangle}{\langle \gamma_{23} \rangle}, \quad G_{31}^* = \frac{\langle \sigma_{31} \rangle}{\langle \gamma_{31} \rangle} \quad (3-35)$$

## 4 Сравнение шаблонов заполнения

В данном параграфе будет проведено сравнение физических свойств трех шаблонов заполнения при помощи метода гомогенизации. Из полученных результатов будет выбран шаблон с наилучшими физическими свойствами.

Во всех задачах будут использоваться два материала, указанные в таблице (таблица 4-1).

Таблица 4-1. Используемые материалы

Материал	Модуль Юнга E, Па	Коэффициент Пуассона
Пластик ABS	$2 \cdot 10^3$	0.35
Фиктивный	100	0.01

### 4.1 Заполнение Rectilinear

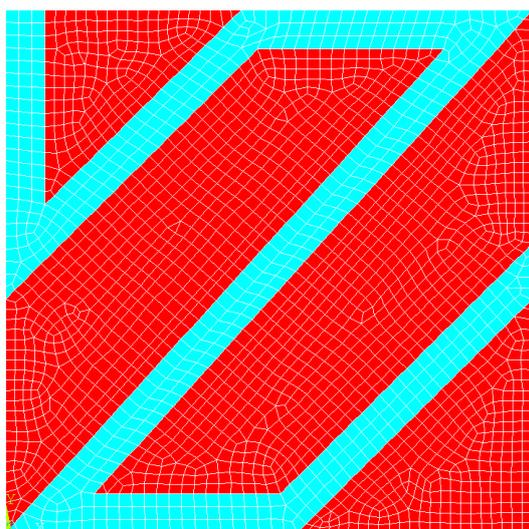


Рисунок 4-1. Периодическая ячейка шаблона заполнения Rectilinear

Рассмотрим задачу гомогенизации для шаблона заполнения Rectilinear на примере периодической ячейки шириной и длиной 1 см.

На рисунке (рисунок 4.1) можно видеть конечно-элементное разбиение периодической ячейки, где голубым цветом отображен материал – пластик ABS, а красным – фиктивный. Процент заполнения в данной ячейке – 30%.

Используем 8-и узловые элементы PLANE 183. Модель содержит 7998 элементов (23720 узлов, 47440 степеней свободы).

В результате решения задачи гомогенизации для данной плоской задачи, были найдены эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона:

$$E_1^* = 76.7 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 43.9 \text{ МПа}$$

$$E_3^* = 580.2 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 2667.9 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 6038.0 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 10150.3 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.67$$

$$\nu_{23}^* = 0.03$$

$$\nu_{13}^* = 0.05$$

$$\nu_{21}^* = 0.38$$

$$\nu_{32}^* = 0.35$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

## 4.2 Заполнение Honeycomb

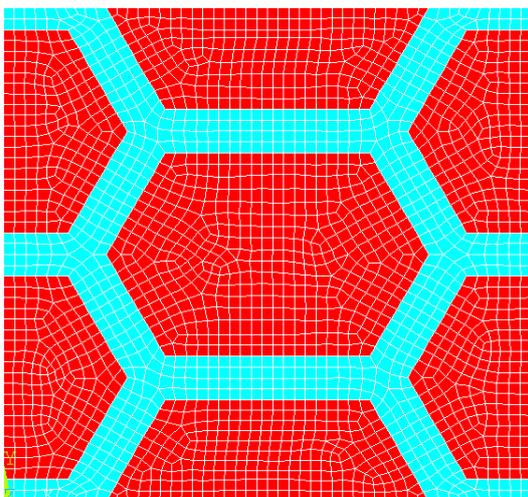


Рисунок 4-2. Периодическая ячейка шаблона заполнения Honeycomb

Рассмотрим задачу гомогенизации для шаблона заполнения Honeycomb на примере периодической ячейки длиной 1.2 см и шириной 1.13 см.

На рисунке (рисунок 4.2) можно видеть конечно-элементное разбиение периодической ячейки, где голубым цветом отображен материал – пластик ABS, а красным – фиктивный. Процент заполнения в данной ячейке – 32%.

Используем 8-и узловые элементы PLANE 183. Модель содержит 2171 элементов (6698 узлов, 13396 степеней свободы).

В результате решения задачи гомогенизации для данной плоской задачи, были найдены эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона:

$$E_1^* = 141.5 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 101.8 \text{ МПа}$$

$$E_3^* = 590.2 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 2628.8 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 17630.7 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 22282.6 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.78$$

$$\nu_{23}^* = 0.06$$

$$\nu_{13}^* = 0.08$$

$$\nu_{21}^* = 0.56$$

$$\nu_{32}^* = 0.35$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

## 4.3 Заполнение Line

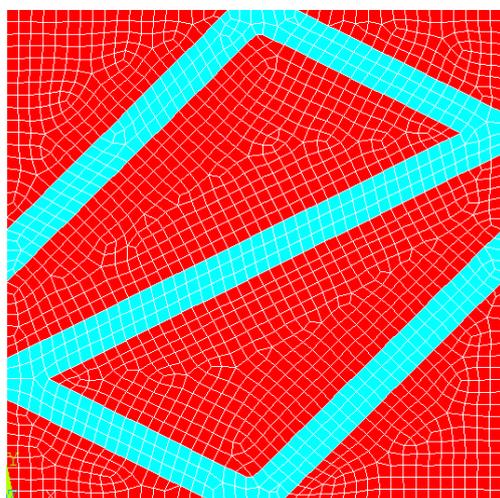


Рисунок 4-3. Периодическая ячейка шаблона заполнения Line

Рассмотрим задачу гомогенизации для шаблона заполнения Line на примере периодической ячейки шириной и длиной 1 см.

На рисунке (рисунок 4.3) можно видеть конечно-элементное разбиение периодической ячейки, где голубым цветом отображен материал – пластик ABS, а красным – фиктивный. Процент заполнения в данной ячейке – 27%.

Используем 8-и узловые элементы PLANE 183. Модель содержит 1741 элементов (5374 узлов, 10748 степеней свободы).

В результате решения задачи гомогенизации для данной плоской задачи, были найдены эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона:

$$\begin{array}{lll}
 E_1^* = 15.2 \text{ МПа} & E_2^* = 1.8 \text{ МПа} & E_3^* = 521.2 \text{ МПа} \\
 G_{12}^* = 1008 \text{ Па} & G_{23}^* = 5667.2 \text{ Па} & G_{13}^* = 15987.8 \text{ Па} \\
 \nu_{12}^* = 2.29 & \nu_{23}^* = 0.00 & \nu_{13}^* = 0.01 \\
 \nu_{21}^* = 0.28 & \nu_{32}^* = 0.35 & \nu_{31}^* = 0.35
 \end{array}$$

#### 4.4 Сравнение результатов

Для выбора наилучшего шаблона заполнения сравним результаты, полученные при процессе их гомогенизации. Сравнение приведено в таблице (таблица 4-2).

Таблица 4-2. Сравнение свойств исследуемых шаблонов

	Rectilinear	Honeycomb	Line
$E_1^*$ , МПа	76.7	141.5	15.2
$E_2^*$ , МПа	43.9	101.8	1.8
$E_3^*$ , МПа	580	590.2	521.2
$G_{12}^*$ , Па	2667.9	2628.8	1008.0
$G_{23}^*$ , Па	6038.0	17630.7	5667.2
$G_{13}^*$ , Па	10150.3	22282.6	15987.8
$\nu_{12}^*$	0.67	0.78	2.29
$\nu_{23}^*$	0.03	0.06	0.00
$\nu_{13}^*$	0.06	0.08	0.01

Из полученных результатов, а также из практического опыта видно, что наилучшими физическими свойствами обладает шаблон заполнения Honeycomb.

Таким образом, для решения задачи, на примере которой будет оцениваться работа шаблона заполнения, будем использовать именно шаблон заполнения Honeycomb.

## 5 Крыло мультикоптера

### 5.1 Описание крыла

На рисунке (рисунок 5-1) представлена модель крыла. Крыло обладает следующими геометрическими характеристиками: длина – 25.5 см, высота – 2 см, ширина (у корпуса) – 12 см, ширина (у двигателя) – 3.5 см.

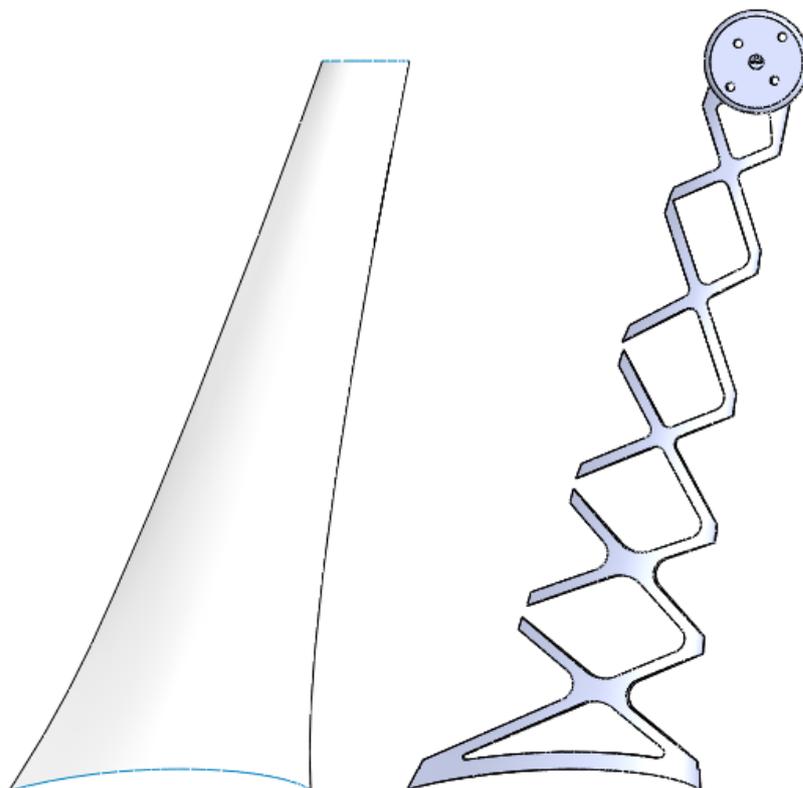


Рисунок 5-1. Внешняя оболочка и внутреннее оребрение крыла исходной конструкции

Элементы крыла выполнены из пластика ABS со следующими свойствами:

$$E = 2 \text{ ГПа}$$

$$\nu = 0.35$$

$$\rho = 1060 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

$$\sigma_{\text{п}} = 45 \text{ МПа}$$

### 5.2 Постановка задачи

Для упрощения решения задачи двигатель мультикоптера заменяется на результирующие силы, с которыми он действует на крыло:

- горизонтальное усилие к концу крыла по направлению полета в 1.2 Н;
- вертикальное усилие к концу крыла в 45 Н;
- крутящий момент к концу крыла в 1 Н\*м.

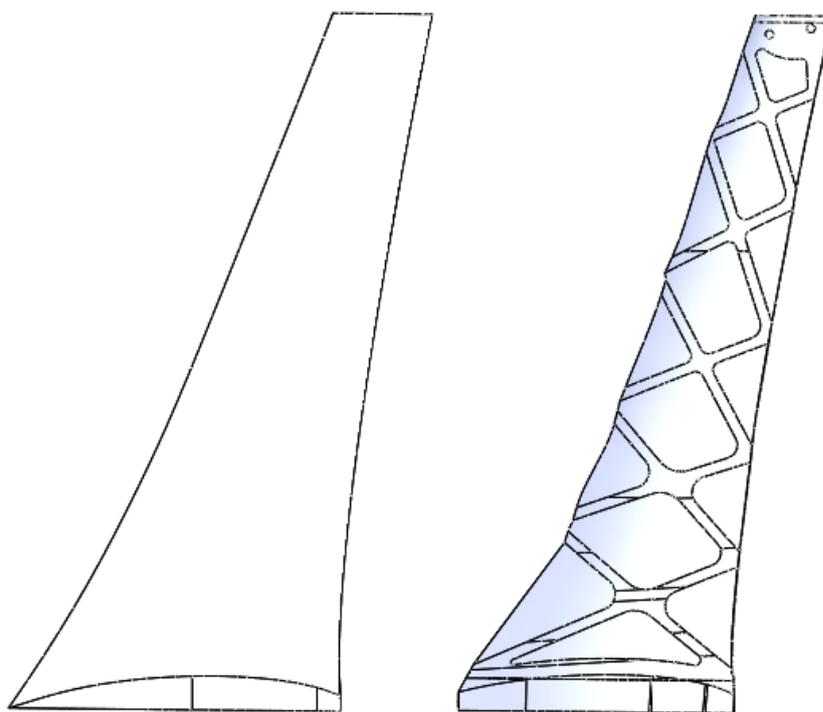
На поверхности соприкосновения крыла с корпусом ставится запрет нормальных перемещений. Также запрет нормальных перемещений ставится на

поверхностях полостей, предназначенных для трубок фиксации, ограничивающих поворот крыла.

Так как между оребрением крыла и внешней оболочкой исходной конструкции существует зазор (примерно 1-1.5 мм), то в данной постановке задачи этот зазор заполняется материалом путем утолщения внешней оболочки до оребрения.

Внутреннее пространство разделяется на три части: на две не оптимизируемые части по краям внутреннего пространства, к которым прикладываются крепления и нагрузки, и на пространство оптимизации.

На рисунке (рисунок 5-2) представлен конечный вид модели задачи.



*Рисунок 5-2. Внешняя оболочка и внутренне заполнение крыла*

На рисунках ниже (рисунки 5-3, 5-4) показаны нагрузки, действующие на крыло: зеленым цветом – ограничение нормальных перемещений, красным – момент, черным – силы.

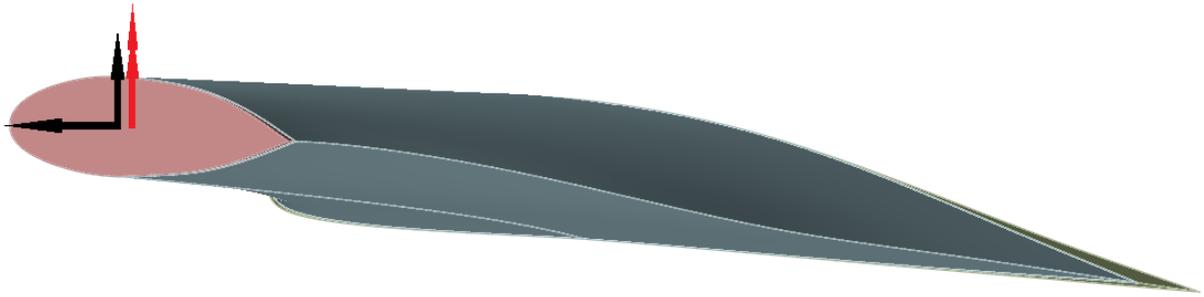


Рисунок 5-3. Вид со стороны двигателя

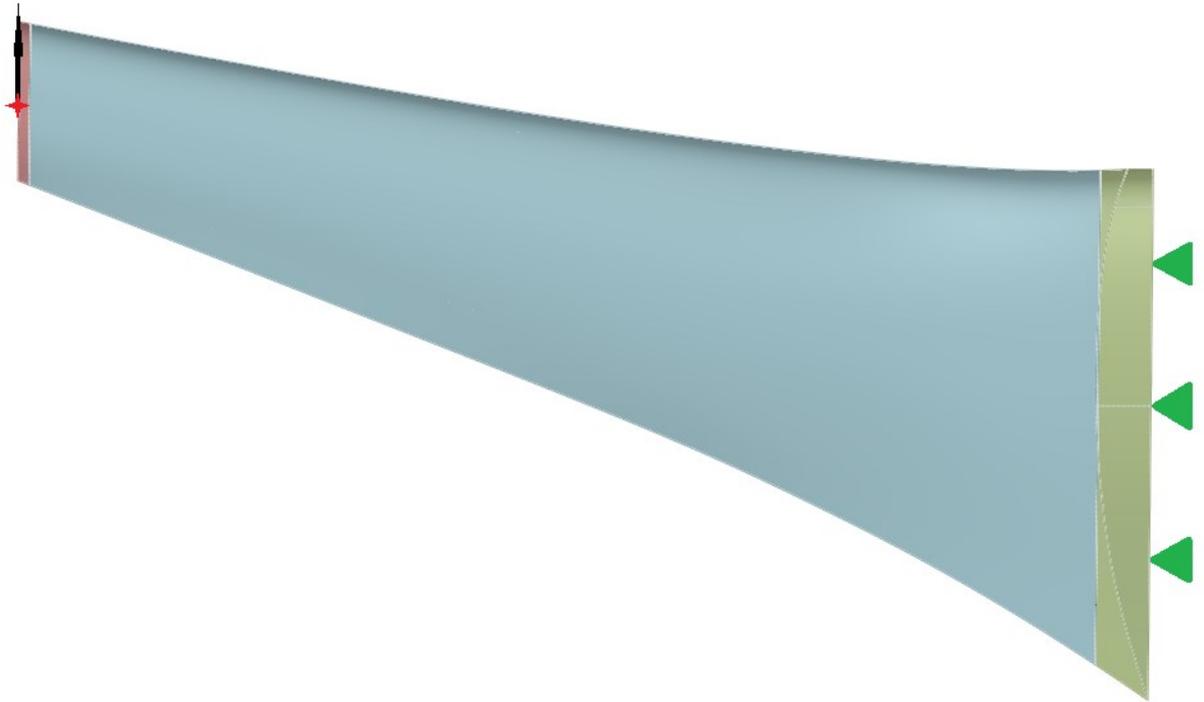


Рисунок 5-4. Вид сверху

В ходе решения задачи необходимо оценить работу шаблона заполнения Honeycomb, как шаблона, обладающего наилучшими свойствами, при заполнении им внутреннего пространства крыла, найти оптимальную ячейку заполнения внутреннего пространства для данной задачи, решить задачу оптимизации внутреннего пространства и сравнить полученные результаты.

Конечно-элементная модель содержит 209439 элементов, сетка состоит из 383659 узлов.

### 5.3 Сравнение работы оребрения и шаблона заполнения Honeycomb

На рисунках (рисунки 5.5 – 5.8) представлены распределения интенсивностей напряжений и перемещений в крыле в двух случаях: в случае оребрения и в случае заполнения внутреннего пространства шаблоном заполнения.

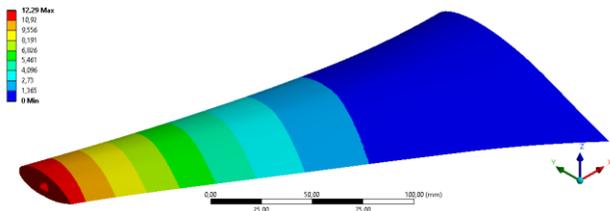


Рисунок 5-5. Поле перемещений для оребрения

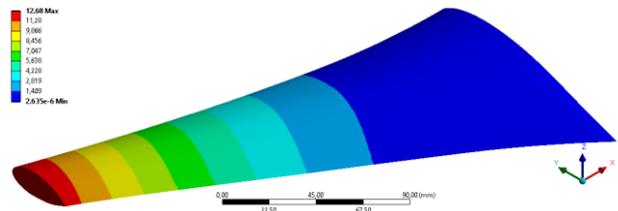


Рисунок 5-6. Поле перемещений для шаблона Honeycomb

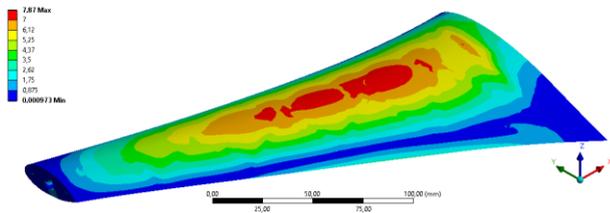


Рисунок 5-7. Поле напряжений для оребрения

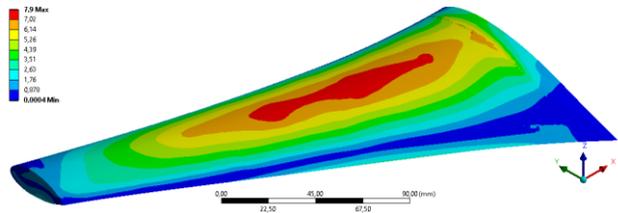


Рисунок 5-8. Поле напряжений для шаблона Honeycomb

В таблице 5-1 приведено сравнения полученных результатов.

Таблица 5-1. Сравнение полученных результатов

Внутреннее заполнение	Перемещения	Напряжения
Оребрение	12.3 мм	7.87 МПа
Шаблон Honeycomb	12.7 мм	7.89 МПа

Как видно, шаблон заполнения Honeycomb дает аналогичные оребрению результаты (разница – 3%). Полученные напряжения не превосходят критического напряжения в 45 МПа, а значит являются допустимыми.

#### 5.4 Нахождение наилучшей ячейки заполнения для внутренней области

Теперь найдем ячейку периодичности, которая не будет являться стандартным шаблоном заполнения, но подойдет именно для этой задачи. Для этого разделим внутреннее пространство на две составляющие: на тело (далее оптимизируемое пространство), получаемое при пересечении внутреннего пространства и прямоугольного параллелепипеда (1 см\*1см\*3 см) в место наибольшей концентрации напряжений (на рисунке 5-9 выделено зеленым цветом), и на оставшееся внутреннее пространство. Для улучшения результатов, сетка для оптимизированного пространства делается мельче, чем в остальной модели.

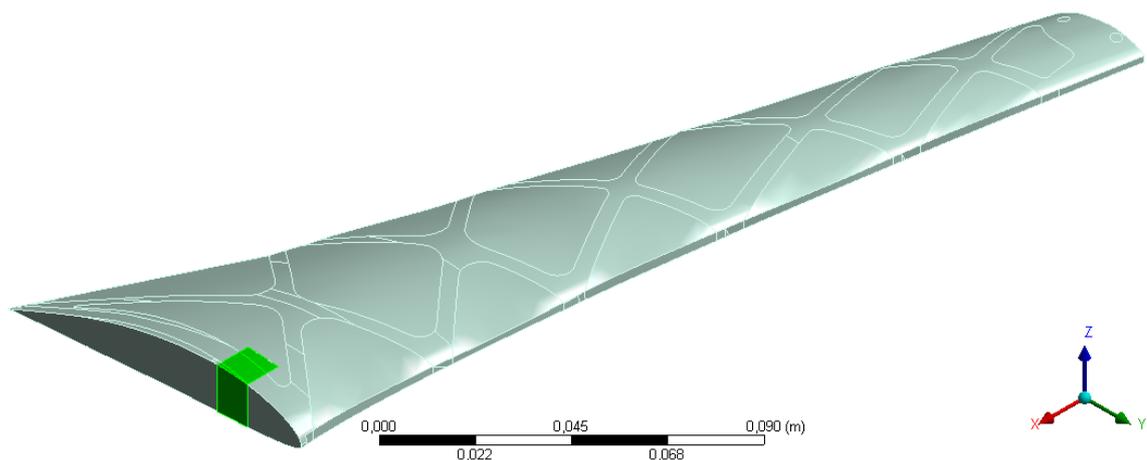


Рисунок 5-9. Внутреннее пространство, состоящее из двух тел

Далее решается задача оптимизации для данного оптимизируемого пространства при нагрузках, получаемых из модели крыла. Процесс нахождения наилучшей ячейки заполнения происходит в несколько итераций. Далее представлен порядок действий, выполняемый в первой итерации:

1. при заполнении внутреннего пространства шаблоном Honeycomb, ищутся нагрузки, действующее на оптимизируемое пространство;
2. с учетом найденных нагрузок находится оптимальная ячейка заполнения;
3. производится гомогенизация полученной ячейки;
4. крыло анализируется на нагрузки при заполнении всего внутреннего пространства полученной ячейкой.

На следующих итерациях в первом действии внутреннее пространство заполняется ячейкой, найденной на прошлой итерации. Итерации продолжаются до тех пор, пока не сойдутся перемещения всего крыла.

Далее представлены сами итерации: ячейки, полученные при оптимизации, их свойства, а также результаты анализа крыла при заполнении внутреннего пространства данной ячейкой.

- итерация 1:

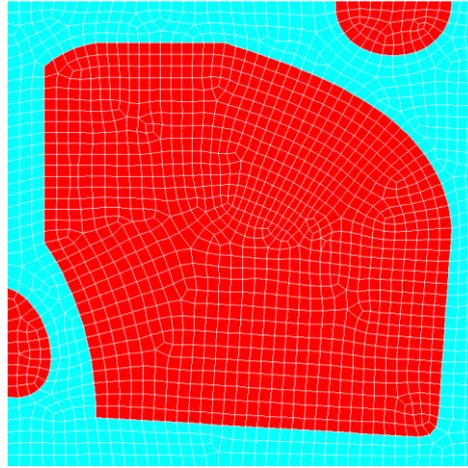


Рисунок 5-10. Ячейка заполнения на итерации 1

Процент заполнения у данной ячейки – 33%. В результате решения задачи гомогенизации для ячейки заполнения были найдены эффективных модули Юнга, сдвига и коэффициентов Пуассона:

$$E_1^* = 390.1 \text{ Па}$$

$$E_2^* = 333 \text{ Па}$$

$$E_3^* = 670 \text{ Па}$$

$$G_{12}^* = 1398 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 14107.1 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 15872.6 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.09$$

$$\nu_{23}^* = 0.17$$

$$\nu_{13}^* = 0.20$$

$$\nu_{21}^* = 0.07$$

$$\nu_{32}^* = 0.35$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

В результате заполнения внутреннего пространства крыла данной ячейкой, были получены следующие результаты:

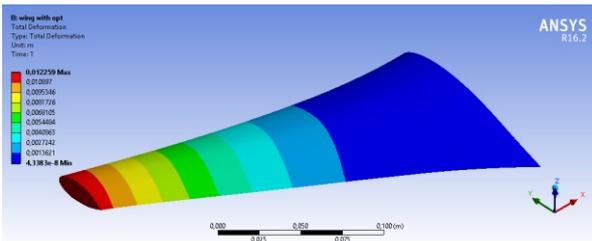


Рисунок 5-11. Поле перемещений на итерации 1

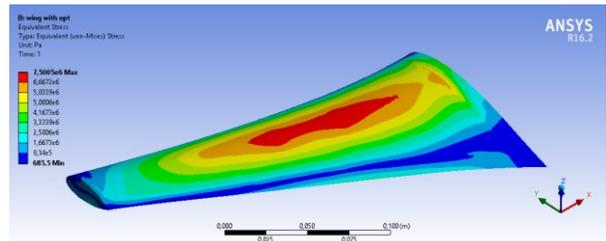


Рисунок 5-12. Поле напряжений на итерации 1

Перемещения	Напряжения
12.26 мм	7.5 МПа

- итерация 2:

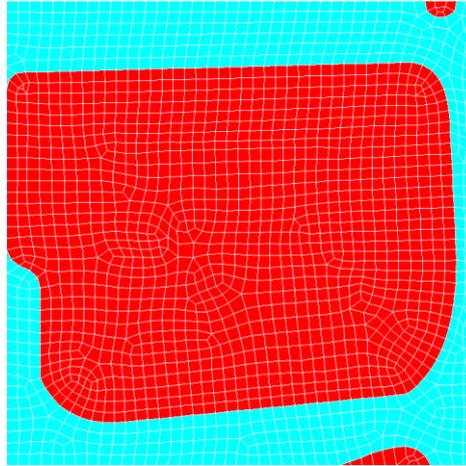


Рисунок 5-13. Ячейка заполнения на итерации 2

Процент заполнения у данной ячейки – 32.5%. Эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона для данной ячейки:

$$E_1^* = 523.6 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 132.7 \text{ МПа}$$

$$E_3^* = 649.4 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 342.6 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 5131.6 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 19778.4 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.09$$

$$\nu_{23}^* = 0.07$$

$$\nu_{13}^* = 0.28$$

$$\nu_{21}^* = 0.02$$

$$\nu_{32}^* = 0.35$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

Полученные результаты в случае заполнения внутреннего пространства данной ячейкой:

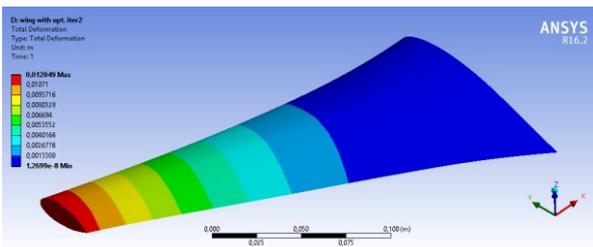


Рисунок 5-14. Поле перемещений на итерации 2

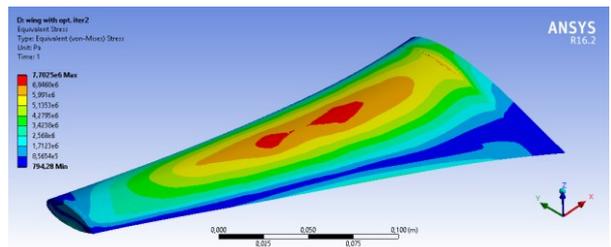


Рисунок 5-15. Поле напряжений на итерации 2

Перемещения	Напряжения
12.05 мм	7.7 МПа

- итерация 3:

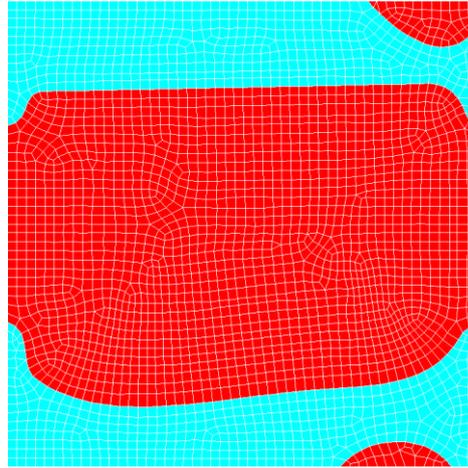


Рисунок 5-16. Ячейка заполнения на итерации 3

Процент заполнения у данной ячейки – 33%. Эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона для данной ячейки:

$$E_1^* = 580.7 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 16765 \text{ Па}$$

$$E_3^* = 670 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 0.8 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 4.8 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 22920.5 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.23$$

$$\nu_{23}^* = 0$$

$$\nu_{13}^* = 0.30$$

$$\nu_{21}^* = 0$$

$$\nu_{32}^* = 0.18$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

Полученные результаты в случае заполнения внутреннего пространства данной ячейкой:

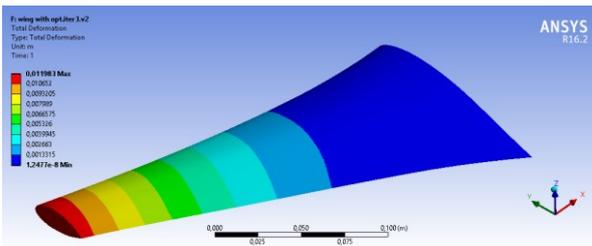


Рисунок 5-17. Поле перемещений на итерации 3

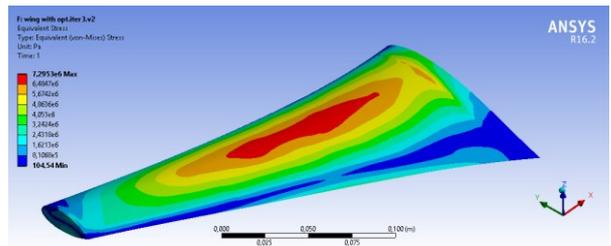


Рисунок 5-18. Поле напряжений на итерации 3

Перемещения	Напряжения
11.98 мм	7.3 МПа

- итерация 4:

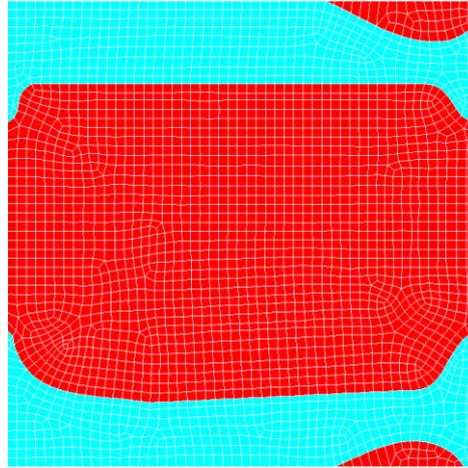


Рисунок 5-19. Ячейка заполнения на итерации 4

Процент заполнения у данной ячейки – 32%. Эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона для данной ячейки:

$$E_1^* = 566.4 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 16299 \text{ Па}$$

$$E_3^* = 644 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 0.8 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 4.8 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 22287.5 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.27$$

$$\nu_{23}^* = 0$$

$$\nu_{13}^* = 0.31$$

$$\nu_{21}^* = 0$$

$$\nu_{32}^* = 0.18$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

Полученные результаты в случае заполнения внутреннего пространства данной ячейкой:

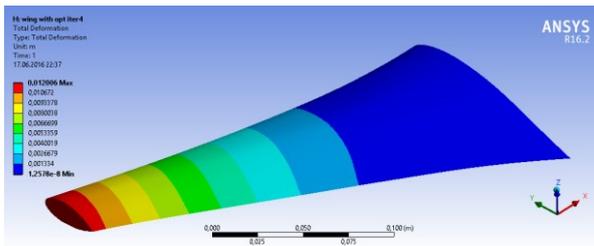


Рисунок 5-20. Поле перемещений на итерации 4

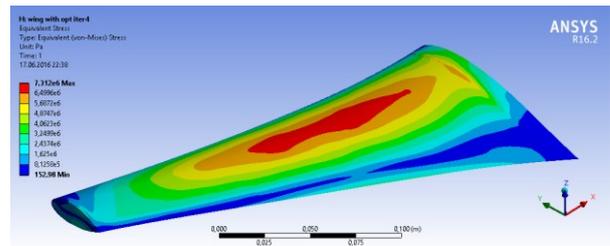
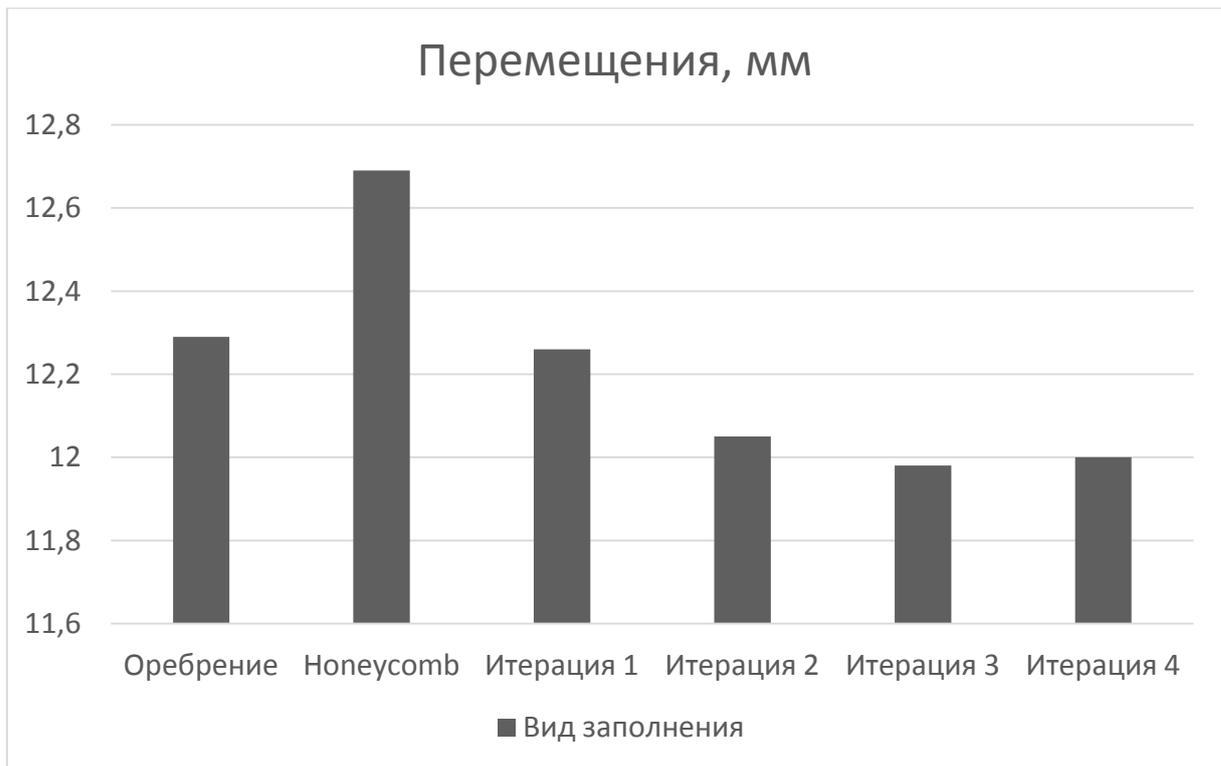


Рисунок 5-21. Поле напряжений на итерации 4

Перемещения	Напряжения
12 мм	7.3 МПа

Сравним результаты, полученные в результате поиска оптимальной ячейки заполнения, с результатами работы шаблона Noneusomb и первоначального оребрения. Сравнение приведено на гистограмме (гистограмма 5-1).



*Гистограмма 5-1. Сравнение перемещений*

Из гистограммы, а также из вида самих ячеек, видно, что на итерации 4 оптимизацию в данной постановке можно закончить. Если анализировать вид получившейся ячейки, то можно сделать вывод, что внутреннее пространство, заполненное данной ячейкой, представляет собой ребра, вытянутые от корпуса мультикоптера к концу крыла.

Также можно заметить, что полученная ячейка была найдена для самого напряженного места внутреннего пространства, в то время, как на менее напряженных участках можно было бы обойтись ячейкой со свойствами хуже, чем у полученной ячейки, но зато с меньшим процентом заполнения. Найдем такую ячейку для менее нагруженного участка внутреннего пространства.

Для этого разделим внутреннее пространство пополам. В области, ближней к корпусу, в которой находятся большие напряжения, оставляем найденную оптимальную ячейку заполнения. Во второй области будем искать новую оптимальную ячейку также, как это было сделано для всего крыла. Область для оптимизации вырезается также в области максимальных напряжений. Тогда внутреннее пространство будет выглядеть, как показано на рисунке (рисунок 5-20).

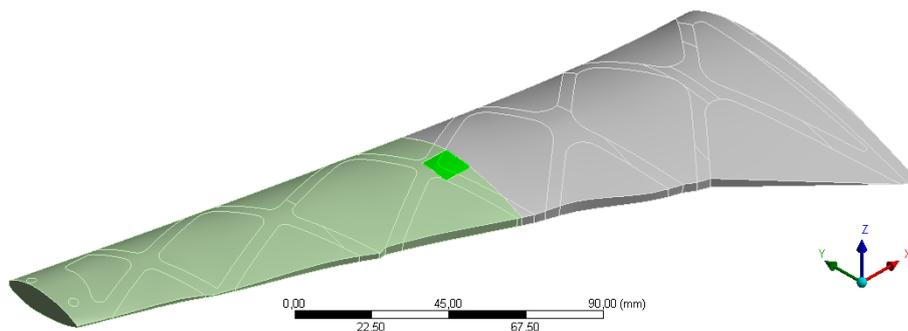


Рисунок 5-22. Внутреннее пространство

Далее представлены сами итерации: ячейки, полученные при оптимизации, их свойства, а также результаты анализа крыла при заполнении внутреннего пространства данной ячейкой.

- итерация 4.1:

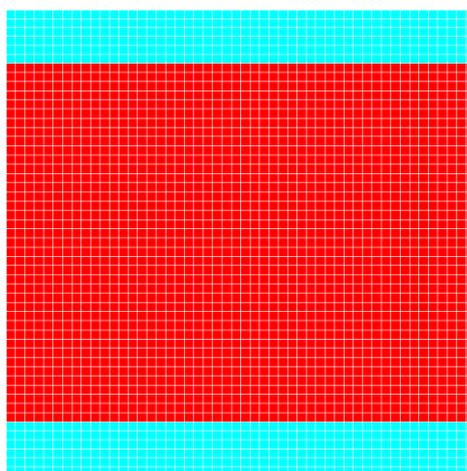


Рисунок 5-23. Ячейка заполнения на итерации 4.1

Процент заполнения у данной ячейки – 23%. Эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона для данной ячейки:

$$E_1^* = 460 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 13283 \text{ Па}$$

$$E_3^* = 460 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 0.6 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 3.5 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 17026.2 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.14$$

$$\nu_{23}^* = 0$$

$$\nu_{13}^* = 0.35$$

$$\nu_{21}^* = 0$$

$$\nu_{32}^* = 0.14$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

Полученные результаты в случае заполнения внутреннего пространства данной ячейкой:

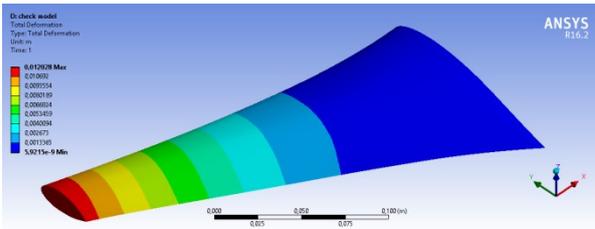


Рисунок 5-24. Поле перемещений на итерации 4.1

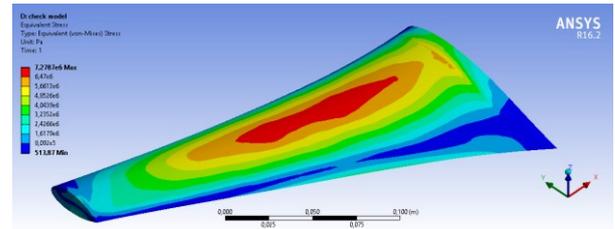


Рисунок 5-25. Поле напряжений на итерации 4.1

Перемещения	Напряжения
12 мм	7.28 МПа

- итерация 4.2:

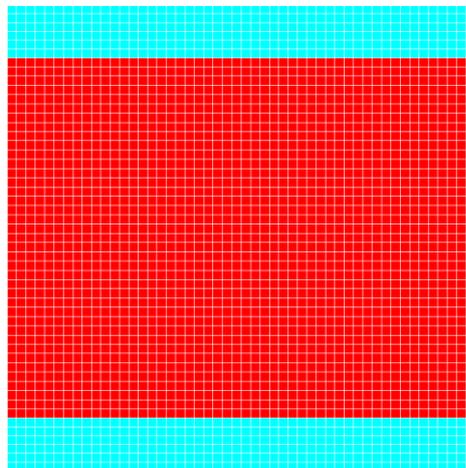


Рисунок 5-26. Ячейка заполнения на итерации 4.2

Процент заполнения у данной ячейки – 22.5%. Эффективные модули Юнга, сдвига и коэффициенты Пуассона для данной ячейки:

$$E_1^* = 450 \text{ МПа}$$

$$E_2^* = 13196 \text{ Па}$$

$$E_3^* = 450 \text{ МПа}$$

$$G_{12}^* = 0.6 \text{ Па}$$

$$G_{23}^* = 3.5 \text{ Па}$$

$$G_{13}^* = 16652.1 \text{ Па}$$

$$\nu_{12}^* = 0.13$$

$$\nu_{23}^* = 0$$

$$\nu_{13}^* = 0.35$$

$$\nu_{21}^* = 0$$

$$\nu_{32}^* = 0.13$$

$$\nu_{31}^* = 0.35$$

Полученные результаты в случае заполнения внутреннего пространства данной ячейкой:

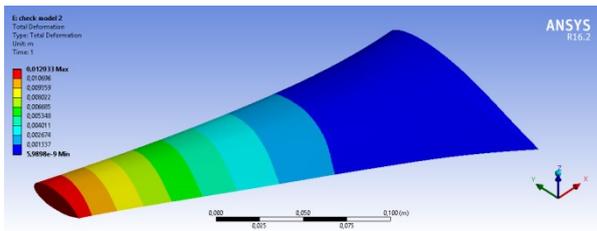


Рисунок 5-27. Поле перемещений на итерации 4.2

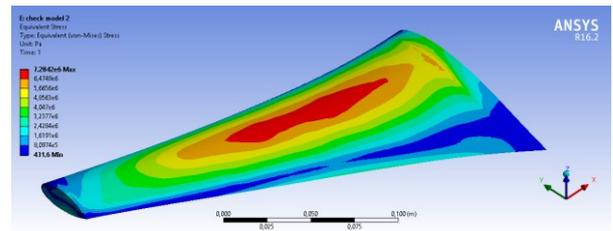
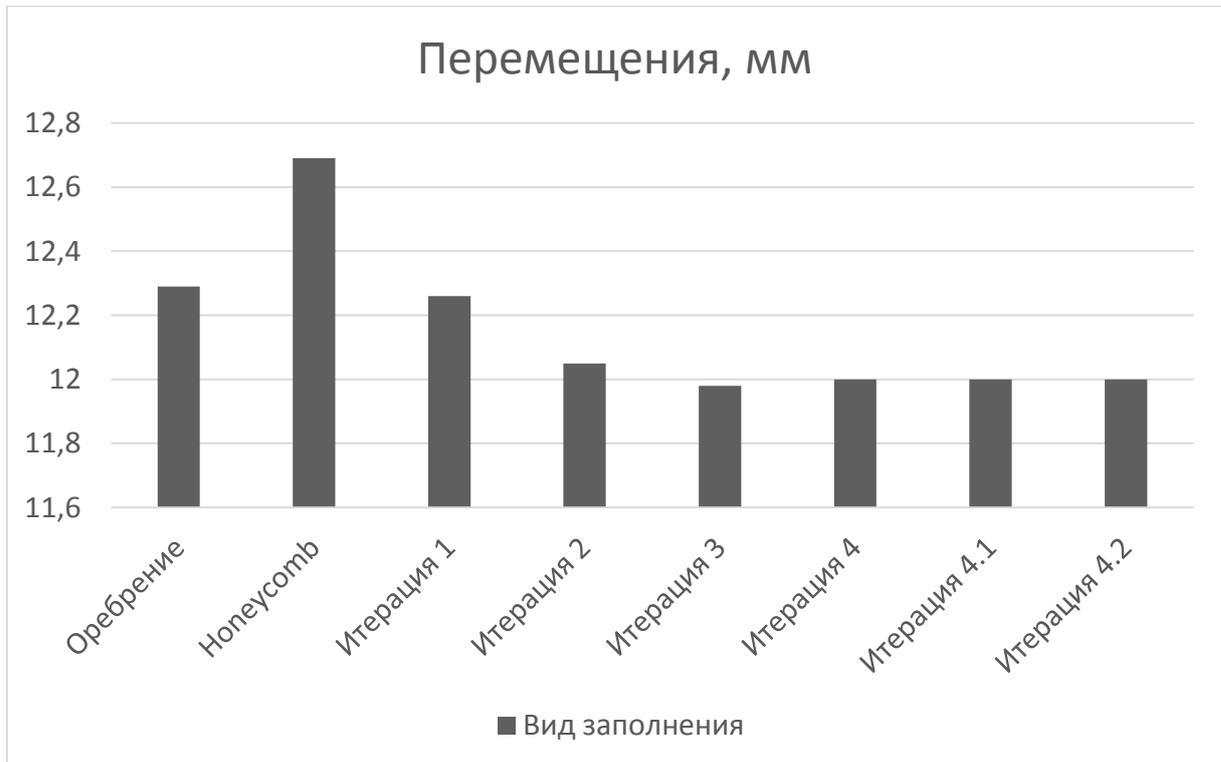


Рисунок 5-28. Поле напряжений на итерации 4.2

Перемещения	Напряжения
12 мм	7.28 МПа

Сравним результаты, полученные в результате поиска оптимальной ячейки заполнения для области внутреннего пространства с меньшими напряжениями, с результатами, полученными ранее. Сравнение приведено на гистограмме (гистограмма 5-2).



Гистограмма 5-2. Сравнение перемещений

Из графика, а также из вида самих ячеек, видно, что оптимизацию можно закончить. В результате данной оптимизации при сохранении деформации на уровне 12 мм получилась ячейка, обладающая меньшим весом, по сравнению с полученной на в прошлой оптимизации.

## 5.5 Топологическая оптимизация внутреннего пространства крыла

В прошлой главе была найдена оптимальная ячейка периодичности для поставленной задачи. Заполнение внутреннего пространства крыла данной ячейкой позволило уменьшить перемещения и напряжения.

Ячейка была найдена для самого напряженного участка внутреннего заполнения. Но, так как в других частях внутреннее пространство нагружено меньше, составляет интерес задача нахождения оптимального заполнения внутреннего пространства крыла.

Рассмотрим оптимизацию внутреннего пространства в случае заполнения ячейкой периодичности, полученной на итерации 4. Оптимизация проводится при помощи Altair HyperWorks OptiStruct. Максимальное количество итераций устанавливается равным 50. В качестве пространства оптимизации выбирается внутреннее пространство крыла. В качестве ограничений устанавливается процент заполнения в 30% от первоначального объема. В качестве целевой функции ставится минимизация податливости. Также для внутреннего пространства было задано условие экструсии в вертикальном направлении.

На следующем рисунке (рисунок 5-29) представлено распределение плотностей во внутреннем пространстве после оптимизации. Данный результат был получен за 7 итераций.

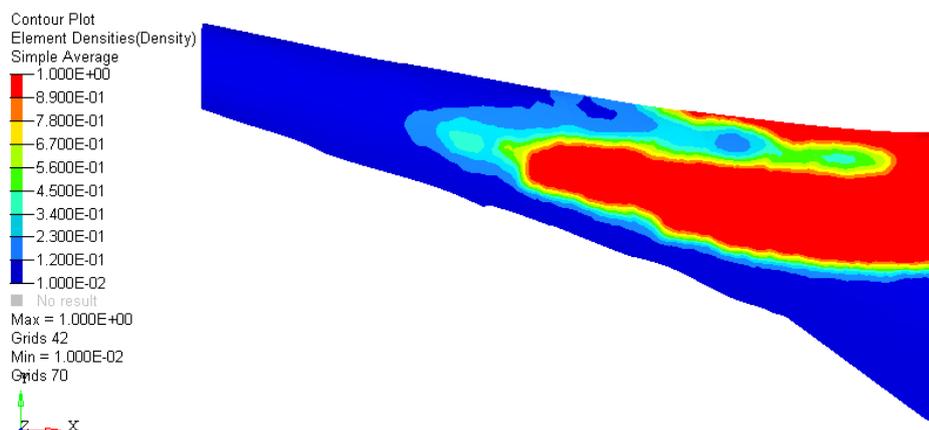


Рисунок 5-29. Распределение плотностей в случае заполнения ячейкой периодичности

Но, так как в этом случае для расчетов был использован гомогенизированный материал ячейки периодичности, теперь необходимо перестроить полученный результат оптимизации. Тогда внутреннее пространство примет вид, показанный на рисунке (рисунок 5-30):

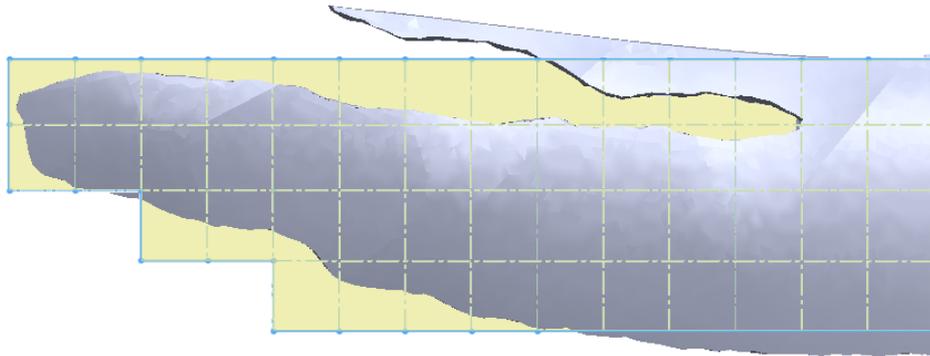


Рисунок 5-30. Перестроенное внутреннее пространство

Анализ крыла с данным заполнением внутреннего пространства дает следующие результаты:

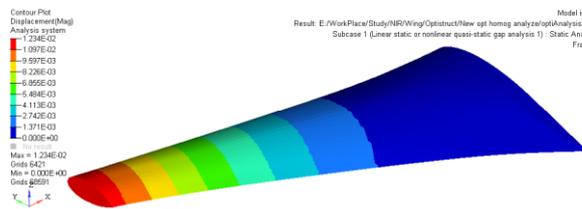


Рисунок 5-31. Поле перемещений в случае заполнения ячейкой периодичности

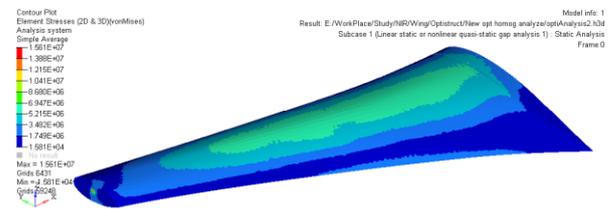


Рисунок 5-32. Поле напряжений в случае заполнения ячейкой периодичности

Теперь отойдем от предположения, что внутреннее пространство заполнено периодической структурой, и решим задачу оптимизации в случае, когда внутреннее пространство полностью заполнено пластиком ABS. На следующем рисунке (рисунок 5-34) представлено распределение плотностей во внутреннем пространстве после оптимизации. Данный результат был получен за 12 итераций.

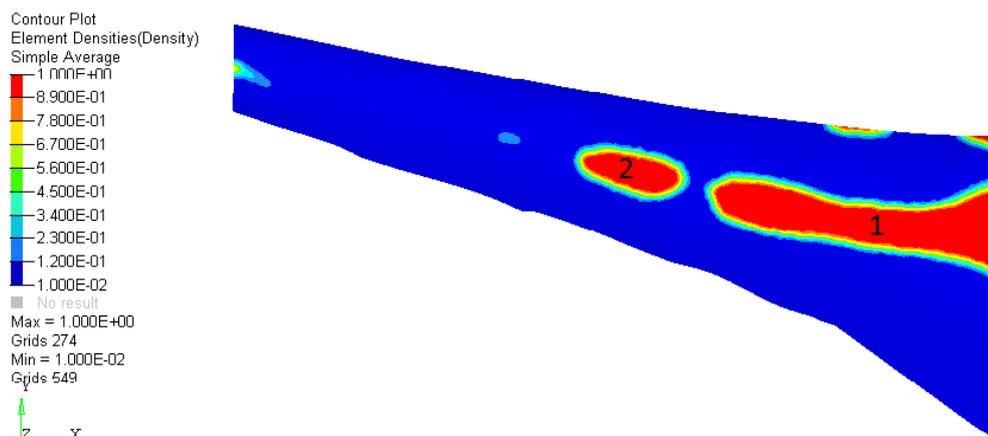


Рисунок 5-33. Распределение плотностей в случае заполнения пластиком ABS

Анализ крыла с данным заполнением внутреннего пространства дает следующее результаты:

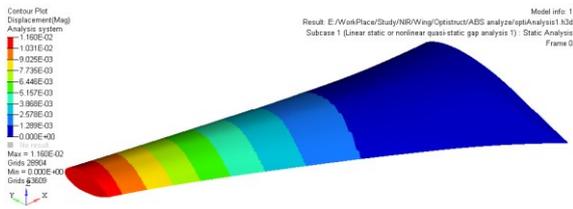


Рисунок 5-34. Распределение перемещений в случае заполнения пластиком ABS

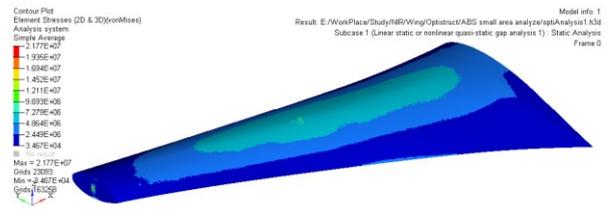


Рисунок 5-35. Распределение напряжений в случае заполнения пластиком ABS

На рисунке 5-33 можно видеть, что полученный результат разделен на несколько независимым частей. Так как внутреннее пространство и поверхность крыла изготавливаются отдельно, возникает вопрос позиционирования этих частей. Их необходимо либо отбросить, либо соединить вместе. И если маленькие части можно спокойно отбросить, то часть, располагающуюся посередине крыла, необходимо проверить (на рисунке – номер 2). Внутреннее пространство теперь будет состоять из части под номером 1.

Анализ крыла с данным заполнением внутреннего пространства дает следующие результаты:

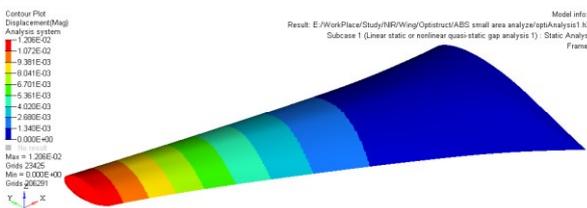


Рисунок 5-36. Поле перемещений в случае заполнения ячейкой периодичности

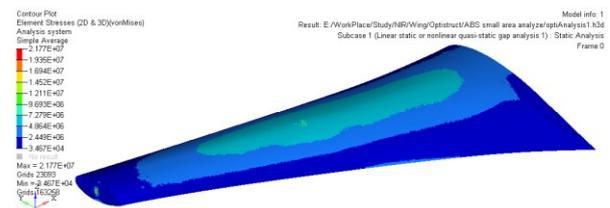


Рисунок 5-37. Поле напряжений в случае заполнения ячейкой периодичности

Видно, что при данном заполнении перемещение увеличилось на 5% при снижении массы на 6%. Таким образом необходимо рассмотреть случай, когда части 1 и 2, изображённые на рисунке 5-33, соединены вместе.

Анализ крыла с данным заполнением внутреннего пространства дает следующие результаты:

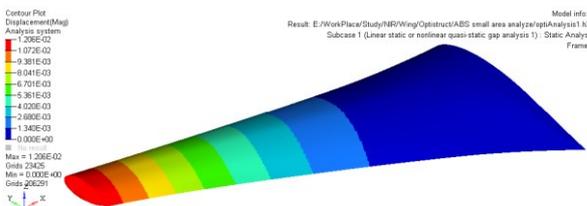


Рисунок 5-38. Поле перемещений в случае заполнения ячейкой периодичности

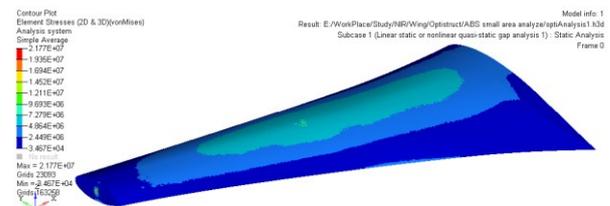


Рисунок 5-39. Поле напряжений в случае заполнения ячейкой периодичности

В таблице 5-2 представлено сравнение трех приведенных выше заполнений. Из нее видно, что оптимальным будет являться заполнение, представленное в случае 2.

Таблица 5-2. Сравнение результатов

Заполнение	Масса, кг	Перемещения, мм	Напряжения, МПа
Раздельно часть 1 и часть 2	0.016	11.6	7.6
Часть 1	0.015	12.1	7.8
Соединенные части 1 и 2	0.018	11.8	7.3

Сравним результаты, полученные по итогам решения задач оптимизации внутреннего заполнения, с результатами работы первоначального оребрения. Сравнение приводится в таблице (таблица 5-3).

Таблица 5-3. Сравнение результатов

Заполнение	Масса, кг	Деформация, мм	Напряжения, МПа
Оребрение	0.022	12.3	7.9
Полное заполнение оптимальной ячейкой	0.024	12.0	7.3
Частичное заполнение оптимальной ячейкой	0.016	12.3	7.4
Частичное заполнение пластиком	0.015	12.1	7.8

По результатам, приведенным в таблице, видно, что в обоих случаях частичного заполнения масса меньше, чем у оребрения. Но, если у частичного заполнения оптимальной ячейкой, деформации сохранились на уровне деформаций оребрения, то в случае частичного заполнения пластиком деформация уменьшилась на 1.5%.

Отсюда можно сделать вывод, что рациональным заполнением для данной задачи будет являться геометрия, полученная при оптимизации внутреннего пространства, заполненного пластиком.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы были смоделированы и исследованы шаблоны заполнения, используемый в аддитивном производстве. В качестве задачи нахождения рационального заполнения внутреннего пространства была выбрана задача нагружения крыла мультикоптера.

Работа разделена на пять разделов. В первом разделе даются общие сведения об аддитивных технологиях и мультикоптерах. Во втором разделе рассмотрена теория топологической оптимизации: постановка задачи, накладываемые ограничения и SIMP метод описание материала. В третьем разделе рассмотрена теория гомогенизации композиционных материалов, приведены алгоритмы определения эффективных модулей Юнга, сдвига и коэффициентов Пуассона.

Четвертый раздел посвящен сравнению шаблонов заполнения с целью выявления лучшего из них. В пятой разделе проведен поиск рационального заполнения внутреннего пространства крыла мультикоптера:

- проведен поиск оптимальной ячейки периодичности;
- найдено оптимальное распределение материала в случаях заполнения внутреннего пространства пластиком ABS и оптимальной ячейкой;
- на основе найденного оптимального распределения материала для оптимальной ячейки построена новая геометрия внутреннего пространства;
- проведено сравнение результатов анализа работы крыла при разных заполнениях внутреннего пространства.

В результате выполненной работы массу внутреннего пространства крыла удалось снизить на 32% процентов при сохранении уровня деформаций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Quadrocoptery – Словарь терминов [Электронный ресурс], - <http://quadrocoptery.ru/slovar-terminov/>
2. ИИЕТ РАН - БОТЕЗАТ ГЕОРГИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ [Электронный ресурс], - <http://www.ihst.ru/projects/emigrants/botezat.htm>
3. Wikipedia - Мультикоптер [Электронный ресурс], - <https://ru.wikipedia.org/wiki/Мультикоптер>
4. БГУ - Аддитивные технологии: современное состояние и перспективы [Электронный ресурс], - <http://research.bsu.by/wp-content/uploads/2015/06/Филатов-СА-Аддитивные-технологии.pdf>
5. Лысыч М. Н., Шабанов М. Л., Романов В. В. Области применения технологий 3D печати // Современные наукоемкие технологии. 2014. №12-2 С.165-169.
6. RepRap [Электронный ресурс], - <http://reprap.org>
7. Wikipedia – Проект RepRap [Электронный ресурс], - [https://ru.wikipedia.org/wiki/Проект\\_RepRap](https://ru.wikipedia.org/wiki/Проект_RepRap)
8. PIT - New Balance запускает в продажу первую в мире пару 3D-печатных кроссовок [Электронный ресурс], - <http://www.pit.kiev.ua/new-balance>
9. СПбПУ - Сотрудники СПбПУ вырастили на 3D-принтере титановый протез тазобедренного сустава [Электронный ресурс], - [http://www.spbstu.ru/media/news/nauka\\_i\\_innovatsii/spbpu-3d-printer-titanium-hip-prosthesis](http://www.spbstu.ru/media/news/nauka_i_innovatsii/spbpu-3d-printer-titanium-hip-prosthesis)
10. PrintBox3D - Настройки слайсера для Repetier-Host [Электронный ресурс], - [http://www.printbox3d.ru/data/files/manual\\_printbox3d\\_one\\_app1.pdf](http://www.printbox3d.ru/data/files/manual_printbox3d_one_app1.pdf)
11. NNN - Пожарный мультикоптер напечатали из титана [Электронный ресурс], - <http://www.nanonewsnet.ru/news/2015/pozharnyi-multikopter-napechatali-iz-titana>
12. Bendsoe M. P., Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer Verlag, Berlin, 2003
13. M.P. Bendsoe, Optimal shape design as a material distribution problem, Structural optimization, vol. 1, no. 4, pp. 193-202, 1989
14. M. Zhou, Y.K. Shyy, H.L. Thomas, "Checkerboard and minimum member size control in topology optimization", Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 21, no. 2, pp. 152-158, 2001
15. Wikipedia – Композиционный материал [Электронный ресурс], - [https://ru.wikipedia.org/wiki/Композиционный\\_материал](https://ru.wikipedia.org/wiki/Композиционный_материал)

16. Боровков А.И., Эффективные физико-механические свойства волокнистых композитов Текст.: монография –М: Изд-во ВИНТИ, 1985. - 113с.
17. Боровков А.И., Гомогенизация однонаправленных волокнистых и гранулированных упругих композитов. Научно-технические ведомости СПбГПУ. – СПб., 2009. - №3(84): Наука и образование. – С. 135-153: ил. – (Динамика и прочность машин). – ISSN 1994-2354. – библиогр.: с. 153.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение А

Изменение шаблонов заполнения с в зависимости от плотности

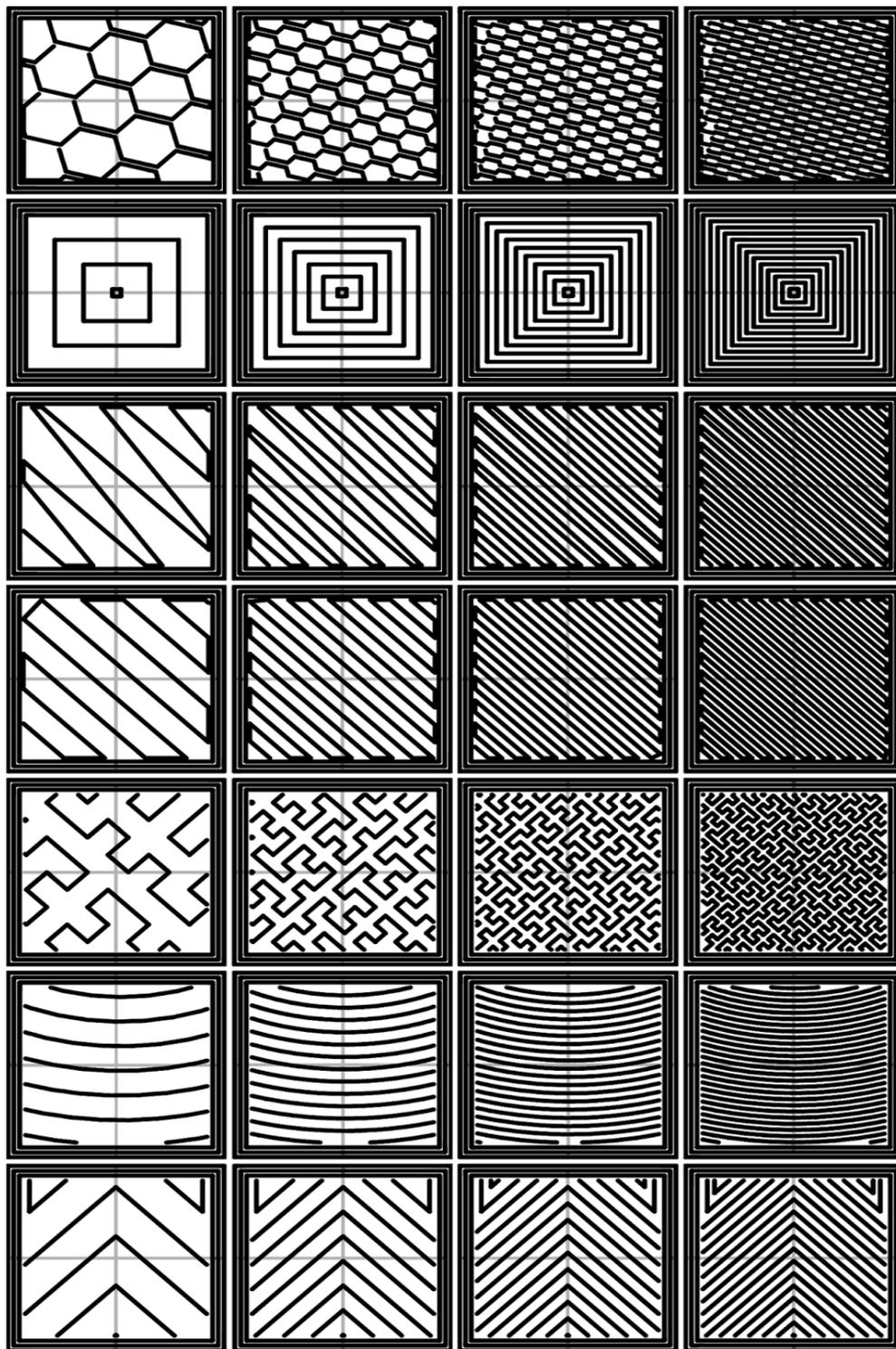


Рисунок А-0-1. Столбец 1 – 20% заполнения, столбец 2 – 40% заполнения, столбец 3 – 60% заполнения, столбец 4 – 80% заполнения