



ВЫПУСКНАЯ РАБОТА МАГИСТРА

Оптимизация укладки волокон в панелях переменной жесткости и конструкциях из композиционных материалов

Направление: 15.04.03 «Прикладная механика»

Выполнил студент гр. 63602/1

Д.В.Мамчиц

Руководитель, к.т.н., проф.

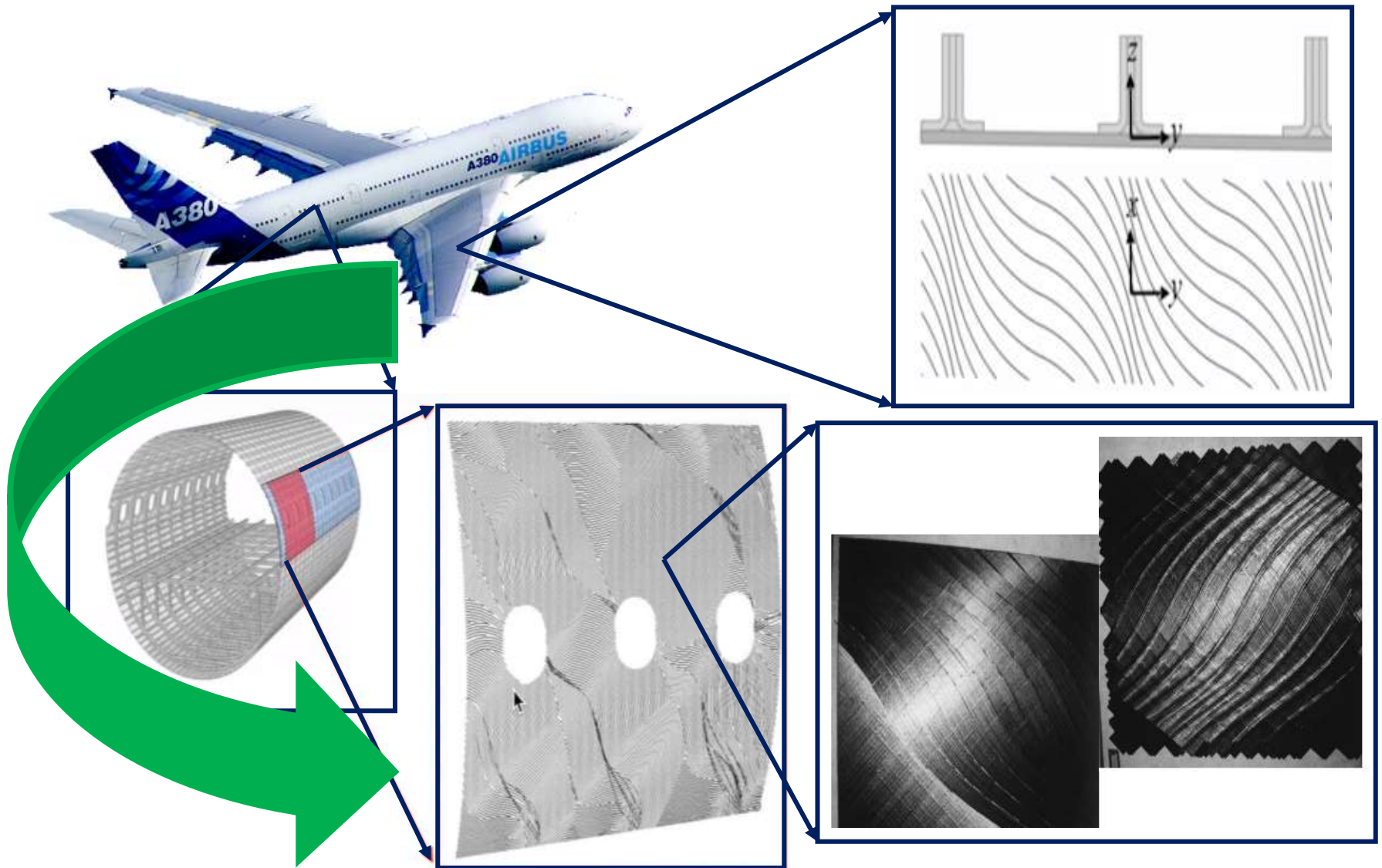
А.И.Боровков

Соруководитель, к.т.н.

А.С.Немов

Санкт-Петербург
2016

Введение



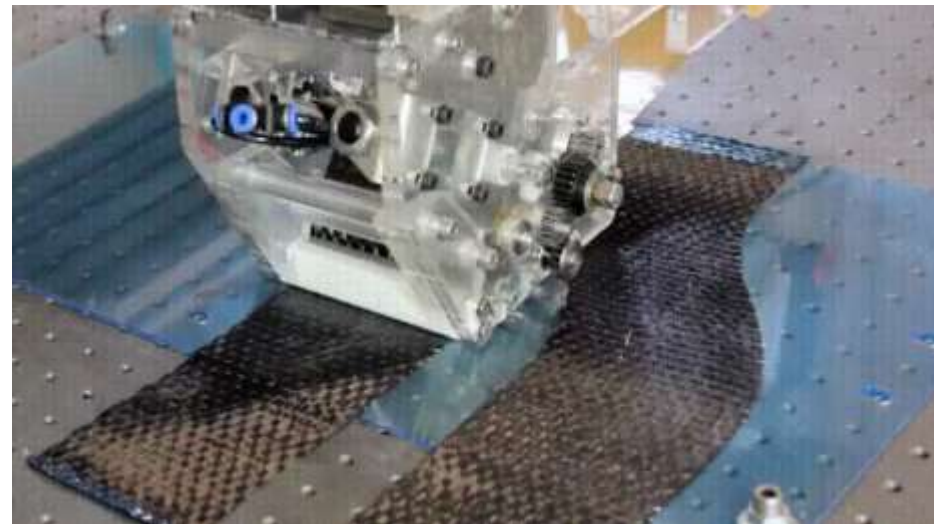
Технологии производства

Automated fiber placement
(AFP)

3D-printing



Continuous tow shearing
(CTS)



Определение эффективных физико-механических характеристик композиционного материала

| | | | | | |
|-----------------------------|-------------|---------|------------------|-----------------------|-------------|
| E-glass 21xK43 Gevetex | E_f , ГПа | ν_f | K_f , Вт/(м*К) | A_f , 10^{-6} 1/К | R_f , мкм |
| | 80 | 0.2 | 1.2 | 4.9 | 10 |
| LY556/HT907/ DY063 эпоху | E_m , ГПа | ν_m | K_m , Вт/(м*К) | A_m , 10^{-6} 1/К | |
| | 3.35 | 0.35 | 0.36 | 58 | |

Определение механических упругих характеристик:

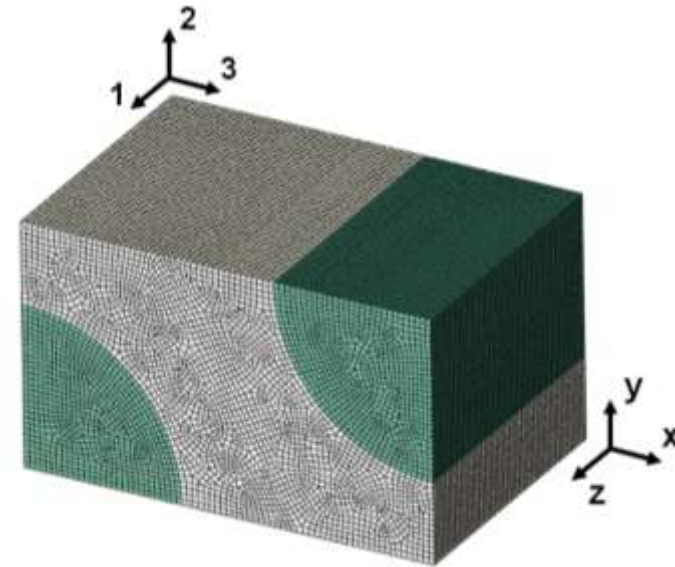
$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{S}}^* \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle \quad \langle A \rangle = \frac{1}{V} \int_V A dv$$

Определение КЛТР. Задача термоупругости:

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \underline{\underline{S}}^* \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle + \underline{\underline{\alpha}}^* \langle \Delta T \rangle$$

Определение коэффициентов теплопроводности:

$$\underline{\underline{K}}^* \cdot \langle \nabla T \rangle = \frac{1}{V} \int_V \underline{\underline{K}} \cdot \nabla T dV$$



Halpin-Tsai:

$$E_1^* = E_{f1}V_f + E_m(1-V_f)$$

$$\nu_{12}^* = \nu_{f12}V_f + \nu_m(1-V_f)$$

$$k_1^* = k_{f1}V_f + k_m(1-V_f)$$

$$M^* = \left[\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right] M_m$$

$$\eta = \frac{M_f / M_m - 1}{M_f / M_m + \xi}$$

где $M = [E_2, G_{12}, G_{23}, k_2]$,
 $\xi = [2, 1, 1, 1]$

Прямое и обратное правила смесей:

$$E_1^* = E_{f1}V_f + E_m(1-V_f)$$

$$\nu_{12}^* = \nu_{f12}V_f + \nu_m(1-V_f)$$

$$k_1^* = k_{f1}V_f + k_m(1-V_f)$$

$$\frac{1}{E_2^*} = \frac{1-V_f}{E_m} + \frac{V_f}{E_{f2}}$$

$$\frac{1}{G_{12}^*} = \frac{1-V_f}{G_m} + \frac{V_f}{G_{f12}}$$

$$\frac{1}{k_2^*} = \frac{1-V_f}{k_m} + \frac{V_f}{k_{f2}}$$

Chamis:

$$E_1^* = E_{f1}V_f + E_m(1-V_f)$$

$$E_2^* = \frac{E_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - E_m/E_{f2})}$$

$$G_{12}^* = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f12})}$$

$$G_{23}^* = \frac{G_m}{1 - \sqrt{V_f}(1 - G_m/G_{f23})}$$

$$\nu_{12}^* = \nu_{f12}V_f + \nu_m(1-V_f)$$

$$\nu_{23}^* = \frac{E_2^*}{2G_{23}^*} - 1$$

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha_m E_m(1-V_f) + \alpha_f E_f V_f}{E_m(1-V_f) + E_f V_f}$$

$$\alpha_2^* = \alpha_{f2} \sqrt{V_f} + (1 - \sqrt{V_f})(1 + V_f \nu_m \frac{E_{f1}}{E_c}) \alpha_m$$

$$k_1^* = k_{f1}V_f + k_m(1-V_f)$$

$$k_2^* = (1 - \sqrt{V_f})k_m + \frac{k_m \sqrt{V_f}}{1 - \sqrt{V_f}(1 - k_m/k_{f2})}$$

Mori-Tanaka:

$$\underline{\underline{S}}^* = \underline{\underline{S}}_m + V_f(\underline{\underline{S}}_f - \underline{\underline{S}}_m) : \underline{\underline{C}}_f : \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}}_m : (V_m \underline{\underline{I}} + V_f \underline{\underline{C}}_f : \underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}}_m)^{-1}$$

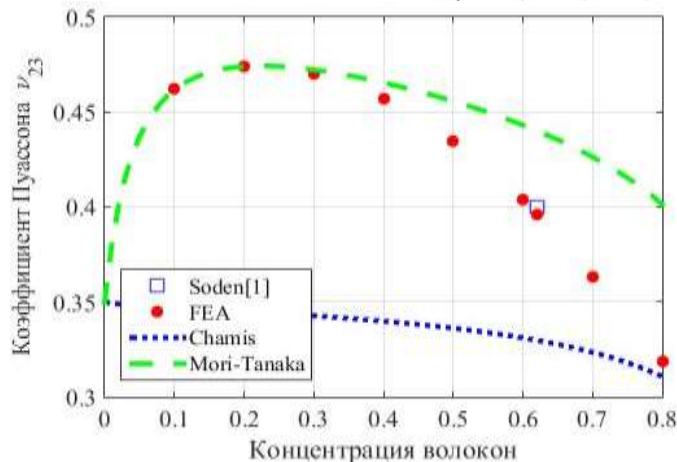
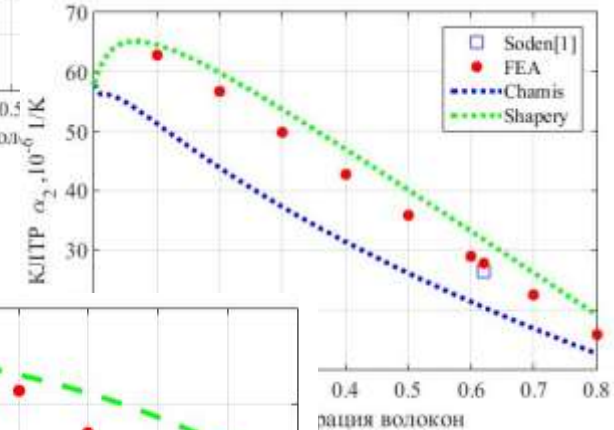
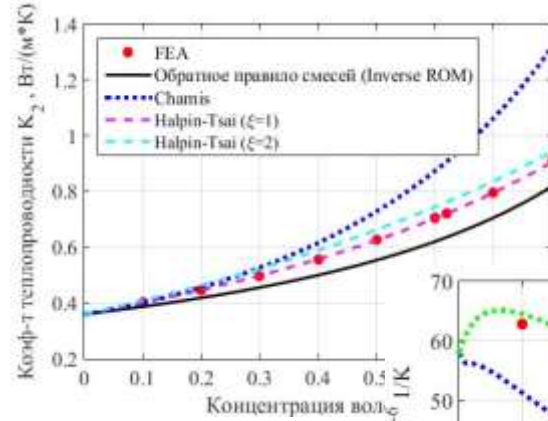
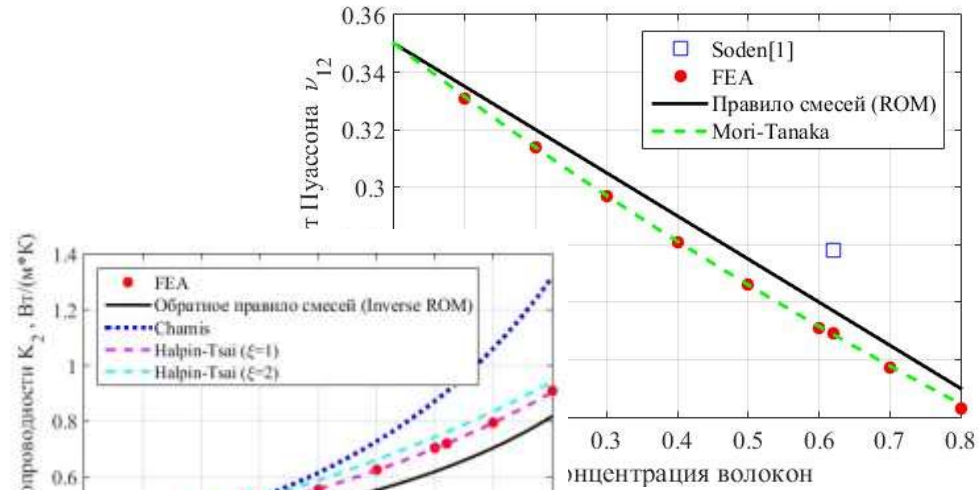
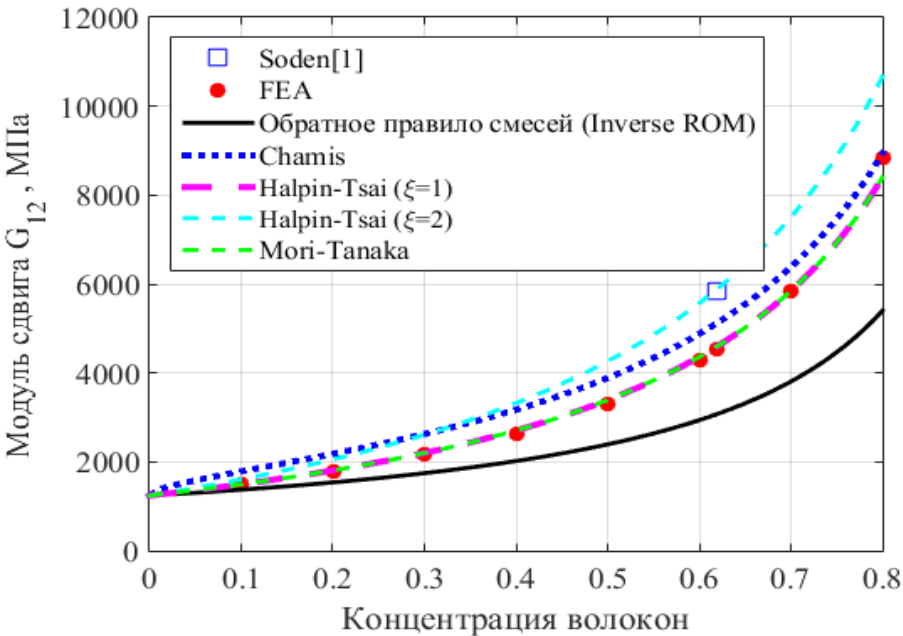
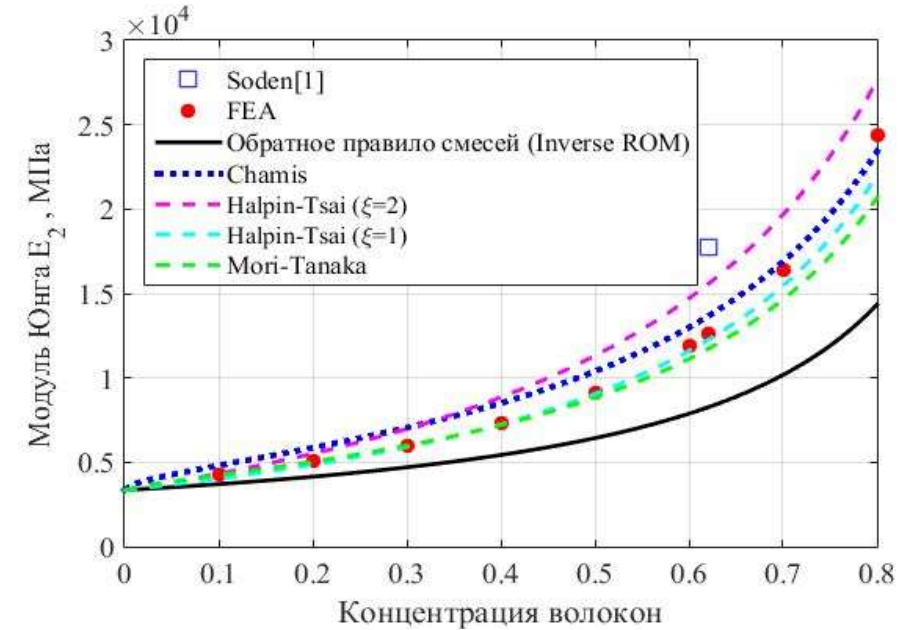
где $\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{L}} : \underline{\underline{S}}_m : (\underline{\underline{C}}_f - \underline{\underline{C}}_m))^{-1}$

$\underline{\underline{L}}$ – тензор Эшелби

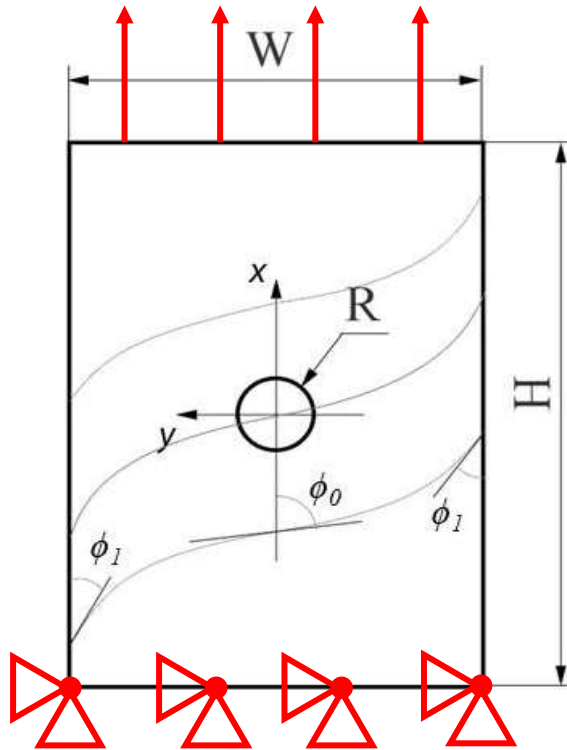
Shapery:

$$\alpha_1^* = \frac{\alpha_m E_m(1-V_f) + \alpha_f E_f V_f}{E_m(1-V_f) + E_f V_f}$$

$$\alpha_2^* = (1 + \nu_m) \alpha_m (1 - V_f) + (1 + \nu_f) \alpha_f V_f - \alpha_1 (\nu_f V_f + \nu_m (1 - V_f))$$



Панели переменной жесткости с круговым вырезом (Variable stiffness panels). ККН у края отверстия.



$$\underline{\underline{\sigma}} \sim \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\underline{\varepsilon}} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

2 задачи:

1) Угол ориентации волокон изменяется линейно по ширине или длине пластины

$$\phi(y) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{2|y|}{W}$$

$$\phi(x) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{2|x|}{H}$$

2) Подобрать функцию, зависящую от координат точки в пространстве, которая бы корректно описывала огибание волокнами отверстия

Сравнение аналитического и численного решений для панели с прямолинейными волокнами

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \quad \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0$$

$$\nabla \times \underline{\underline{\varepsilon}} \times \nabla = 0$$

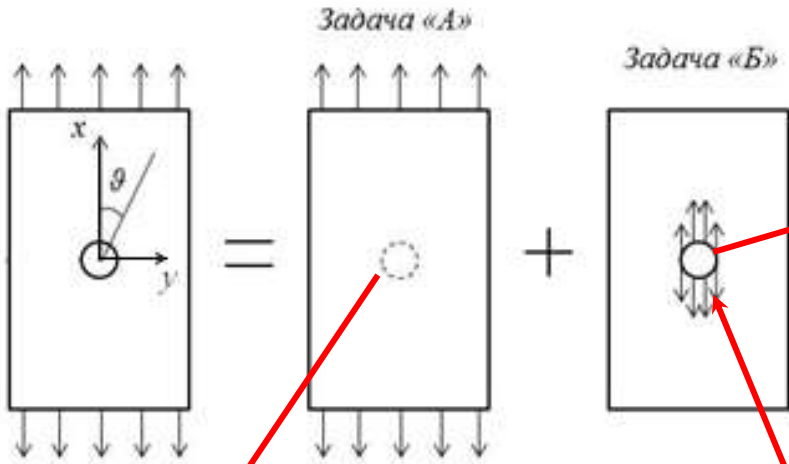


$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - \left(\frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$$

$$D_1 D_2 D_3 D_4 U = 0; \quad D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}$$

Принцип суперпозиции:

$$U = 2\text{Re}(U_1(z_1) + U_2(z_2)); \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$



$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = -p \cos \vartheta \\ \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\text{Re}(\mu_1 \psi_1(z_1) + \mu_2 \psi_2(z_2)) = - \int_0^s (p \cos \vartheta) ds \\ 2\text{Re}(\psi_1(z_1) + \psi_2(z_2)) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_n = p \cos \vartheta \\ Y_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_x \cos(\widehat{n, x}) + \tau_{xy} \cos(\widehat{n, y}) = -p \cos \vartheta \\ \tau_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + \sigma_y \cos(\widehat{n, y}) = 0 \end{cases}$$

$$\psi_j = \frac{\partial U_j}{\partial z_j}, \quad j = 1, 2$$

ψ_j ищется в виде:
$$\psi_j(z_j) = A_j \ln \xi_j + \sum_{n=1}^{\infty} A_{jn} \xi_j^{-n}; \quad \xi_j = \frac{z_j + \sqrt{z_j^2 - R^2(1 + \mu_j^2)}}{R(1 - \mu_j)}; j = 1, 2$$

Условия для нахождения
неизвестных коэффициентов:

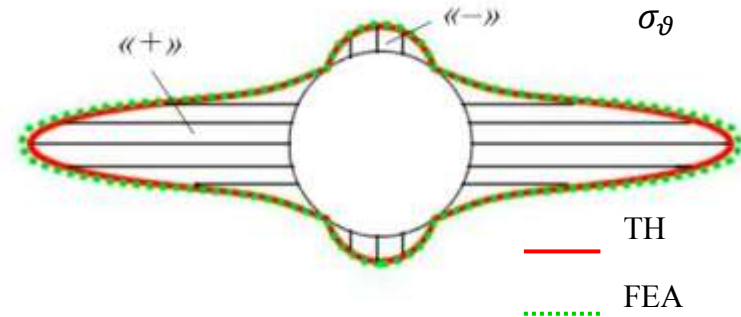
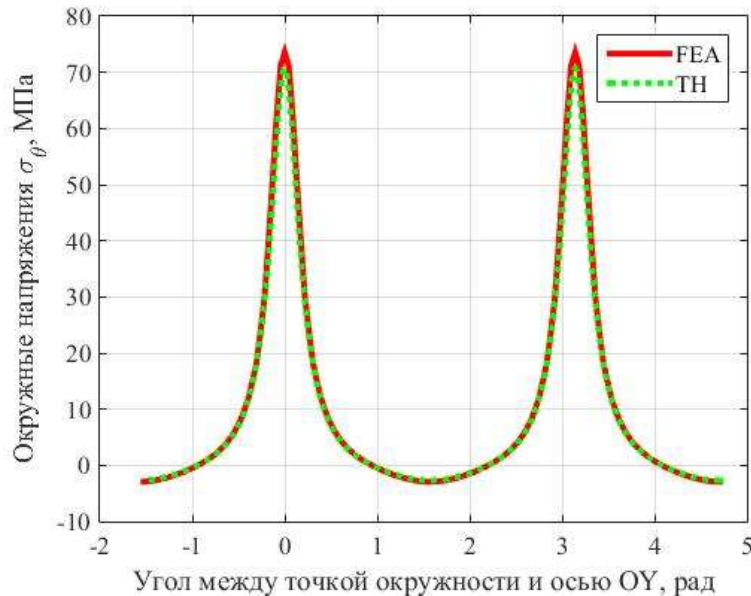
$$R_x + \oint X_n ds = 0; \quad R_y + \oint Y_n ds = 0$$

$$u|_{\vartheta} = u|_{\vartheta+2\pi k}; \quad v|_{\vartheta} = v|_{\vartheta+2\pi k} \quad \rightarrow \quad A_1, A_2$$

$$\begin{cases} \psi_1 = -\frac{ipR}{2(\mu_1 - \mu_2)\xi_1} \\ \psi_2 = \frac{ipR}{2(\mu_1 - \mu_2)\xi_2} \end{cases}$$

$$A_{11} = -\frac{ipR}{2(\mu_1 - \mu_2)}; \quad A_{21} = \frac{ipR}{2(\mu_1 - \mu_2)}$$

$$\sigma_{\theta} = 2\text{Re} \left([\mu_1 \sin\theta + \cos\theta]^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1} + [\mu_2 \sin\theta + \cos\theta]^2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2} \right)$$



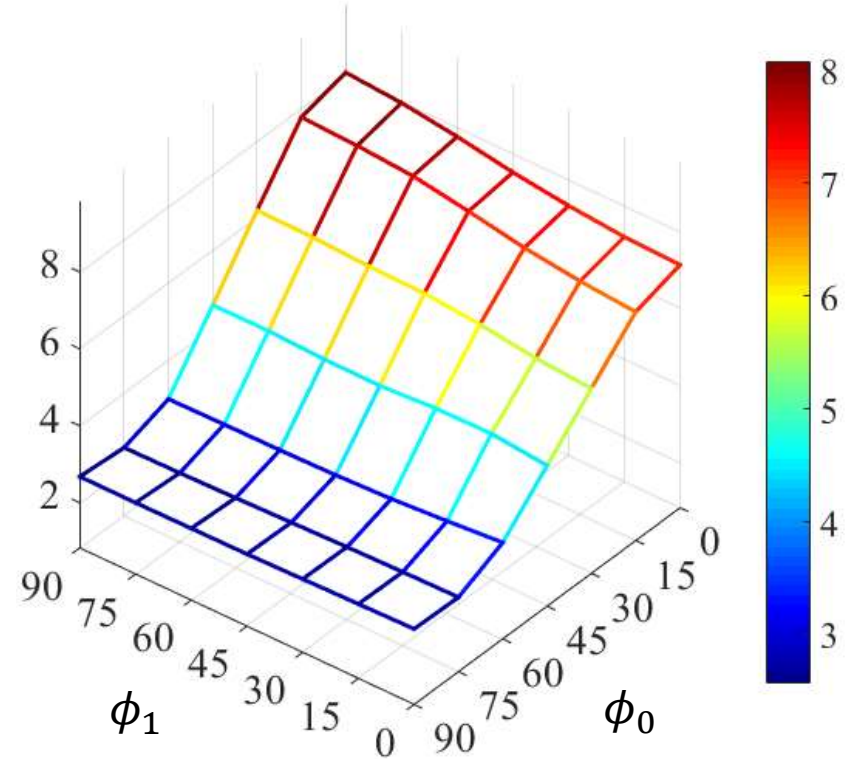
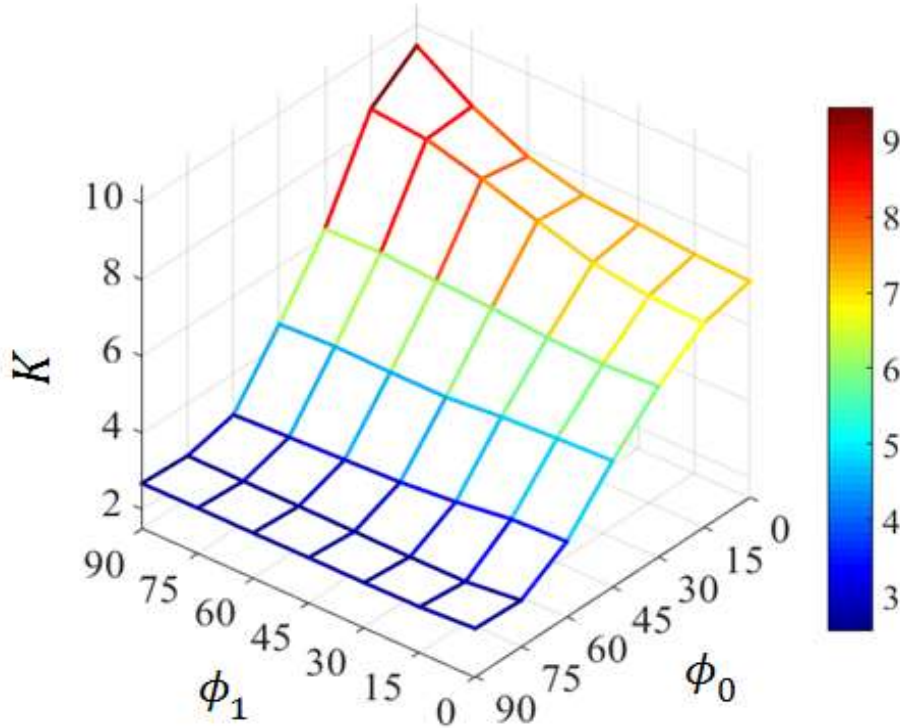
$$K_{0_TH} = 7.074$$

$$K_{0_FEA} = 7.145$$

Зависимость коэффициента концентрации напряжений от значений углов ϕ_0 и ϕ_1

$$\phi(y) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{2|y|}{W}$$

$$\phi(x) = \phi_0 + (\phi_1 - \phi_0) \frac{2|x|}{H}$$



Модификация укладки волокон

Для каждого КЭ подберем $f(x)$ в виде полинома третьей степени:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

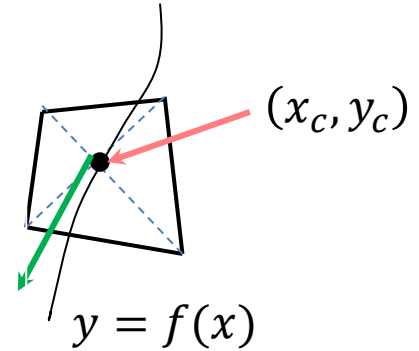
$$\alpha_c = \arctg(y'(x_c))$$

Условия для нахождения констант:

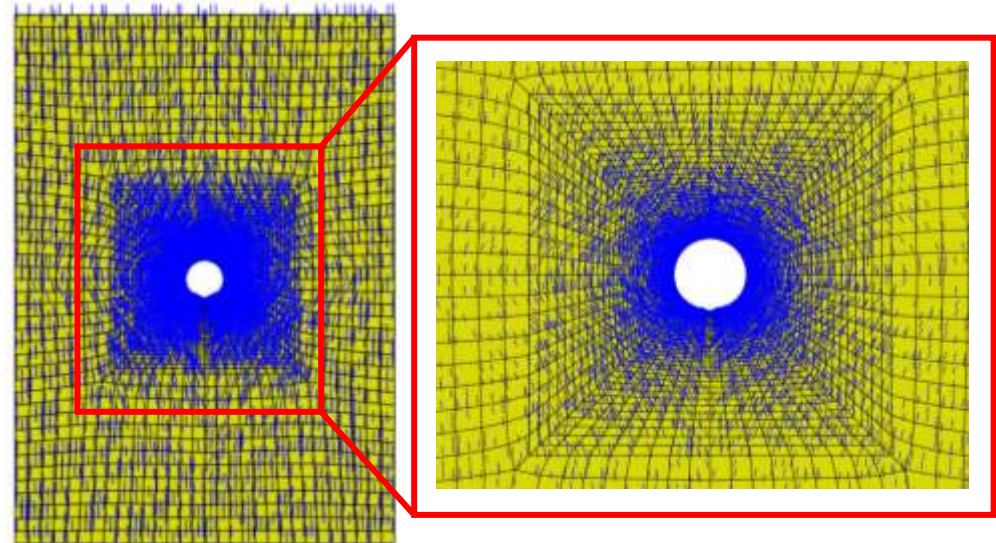
$$\left\{ \begin{array}{l} y'(0) = 0 \\ y'\left(\frac{H}{2}\right) = 0 \\ y(x_c) = y_c \\ y(0) = \Delta \left(\frac{W}{2} - R\right) + R \end{array} \right.$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2y_c}{W}, \quad \text{если } x_c \geq R \\ \frac{y_c - \sqrt{R^2 - x_c^2}}{\frac{W}{2} - \sqrt{R^2 - x_c^2}}, \quad \text{если } x_c < R \end{array} \right.$$

Ориентация
волокон в
данном КЭ



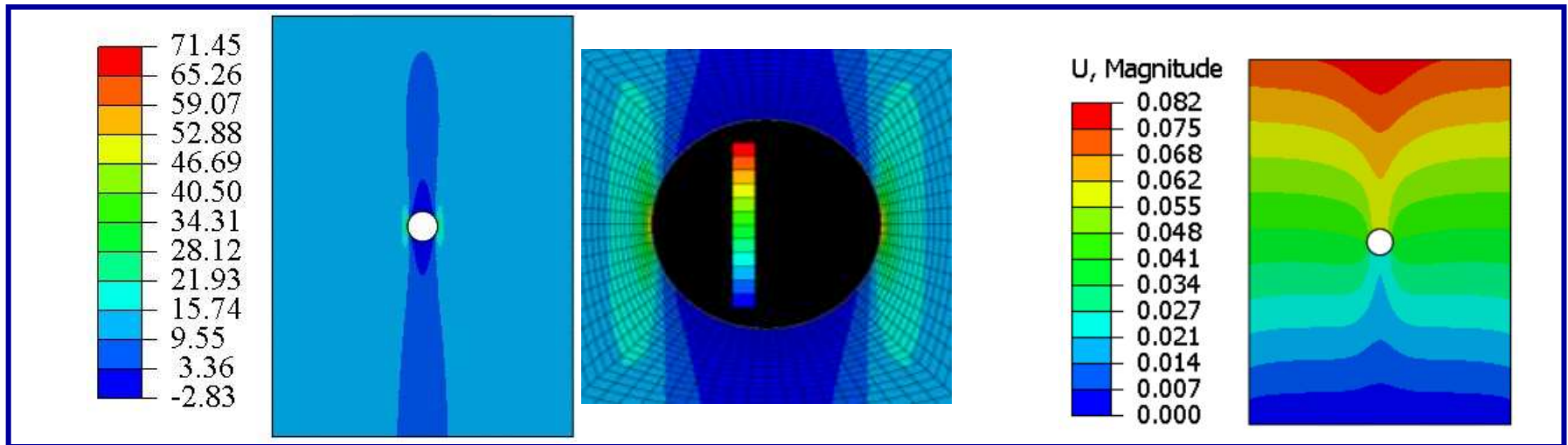
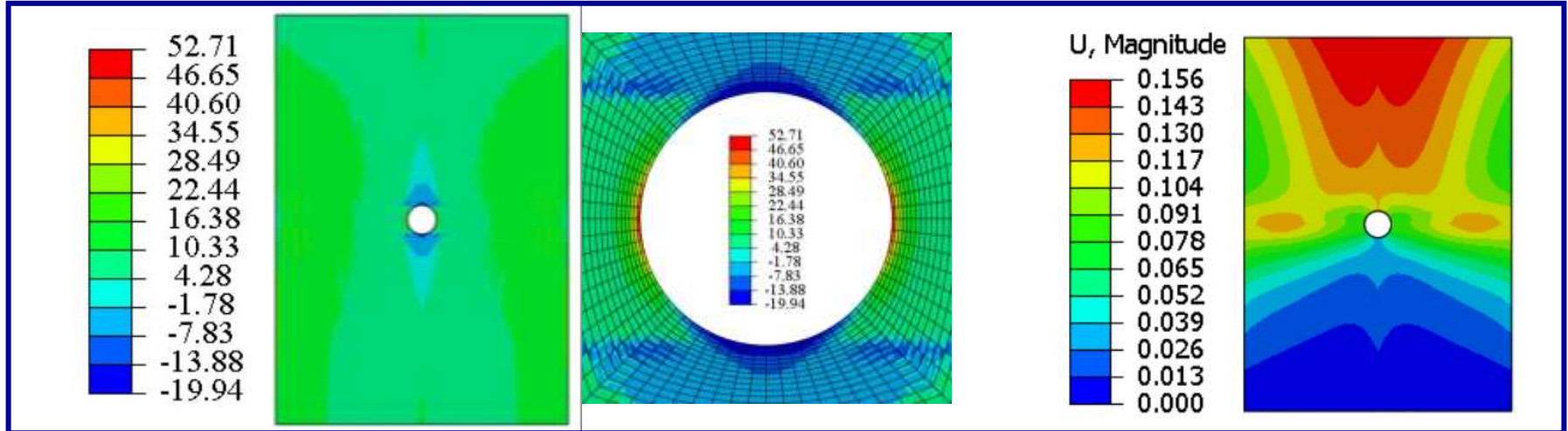
Полученная укладка:



Сравнение результатов

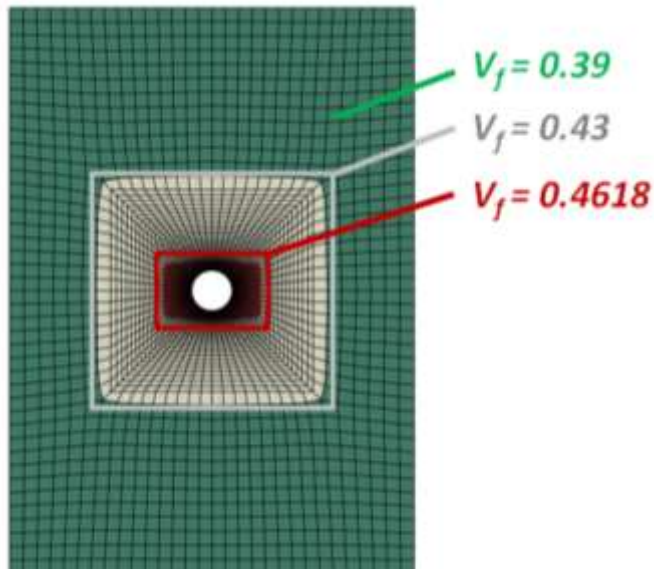
Наибольшие по модулю главные напряжения, МПа

Перемещения, мм



Дискретное распределение концентрации волокон

Ранее предполагалось, что концентрация волокон во всех точках пластины одинаковая. В действительности же для корректности сравнения пластин с прямолинейной и криволинейной укладками необходимо ввести предположение о сохранении их массы. Предположение о сохранении массы панели при изменении укладки волокон в свою очередь приводит к выводу о неравномерном распределении концентрации волокон по пластине – она больше исходного значения (0.4) у отверстия и меньше у внешних граней.



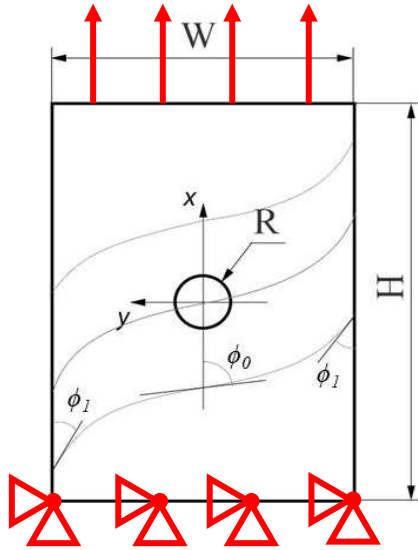
Отношение массы исходной панели к ее толщине:

$$M_0 = M_{FIB} + M_{MATR} = (\rho_{FIB} V_f + \rho_{MATR} (1 - V_f))(WH - \pi R^2)$$

**Значения концентраций
выбраны произвольно при
условии сохранения исходной
массы!**

$$K_D = 5.489 \quad U_M = 0.153 \text{ мм}$$

Непрерывное распределение концентрации волокон



$$F = c_1 f_0 \left(1 - \frac{2x}{H}\right) + c_2, \quad \text{где } f_0 = c_3 e^{-C_4 y}$$

Граничные условия:

$$\begin{cases} F|_{x=H/2} = Q_{ex} \\ F|_{x=0} = f_0 \\ f_0|_{y=R} = Q_{in} \\ f_0|_{y=W/2} = Q_{ex} \end{cases}$$

Q_{IN} – Значение концентрации волокон в точке $(0, R)$
 Q_{EX} – Значение концентрации волокон на внешних гранях пластины

Условие сохранения массы: $\iint_S (\rho_{FIB} F + \rho_{MATR} (1 - F)) dx dy = M_0$

Численное решение задачи гомогенизации для каждого конечного элемента слишком трудоемко! Определение эффективных упругих характеристик материала производится на основе результатов предыдущей задачи:

$$E_1^* = E_{f1} V_f + E_m (1 - V_f)$$

$$E_2^* = \left[\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right] E_m ; \eta = \frac{E_{f2} / E_m - 1}{E_{f2} / E_m + \xi} ; \xi = 2$$

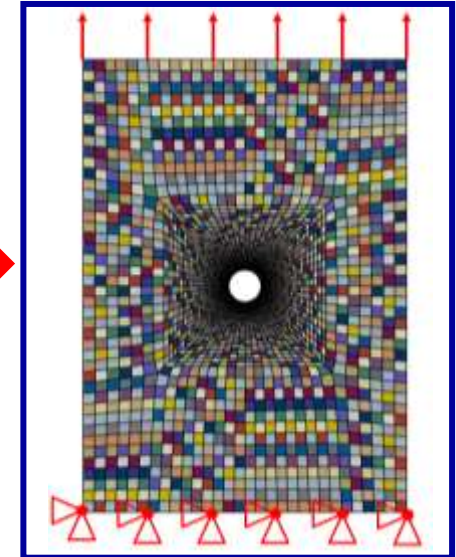
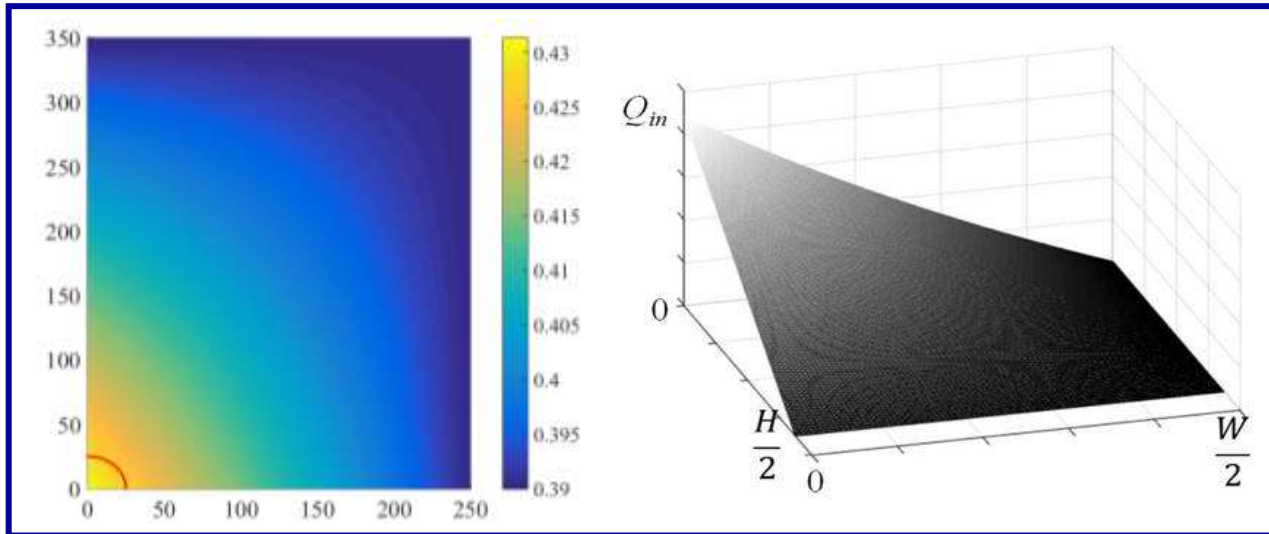
$$v_{12}^* = v_{f12} V_f + v_m (1 - V_f)$$

$$G_{12}^* = \left[\frac{1 + \xi \eta V_f}{1 - \eta V_f} \right] G_m ; \eta = \frac{G_{f12} / G_m - 1}{G_{f12} / G_m + \xi} ; \xi = 1$$

| E_{f1} , ГПа | E_{f2} , ГПа | ν_{f12} | G_{f12} , ГПа | G_{f23} , ГПа | E_m , ГПа | ν_m |
|----------------|----------------|-------------|-----------------|-----------------|-------------|---------|
| 232 | 15 | 0.279 | 24 | 5 | 4.14 | 0.35 |

Поверхность распределения значений концентрации волокон для четверти пластины

Число материалов в КЭ модели



Результаты:

$$Q_{IN} = 0.39, Q_{EX} = 0.427: \quad K_C=5.40 \quad U_M=0.153 \text{ мм}$$

$$Q_{IN} = 0.3645, Q_{EX} = 0.5: \quad K_C=5.79 \quad U_M=0.147 \text{ мм}$$

Выводы по рассмотренной задаче

- Предложен способ математического описания криволинейных укладок и показана возможность его интеграции в систему конечно-элементного моделирования ABAQUS;
- Путем использования криволинейных укладок волокон в панели можно достичь снижения ККН у края отверстия;
- Была рассмотрена укладка, полученная с помощью полинома не только 3, но и 4 степени путем добавления условия: $y''(x_c) = 0$. Поля напряжений и перемещений пластин с обеими укладками качественно совпадают;
- Учет неоднородности распределения концентрации волокон в пластине с вырезом оказывает несущественное влияние на значения выходных характеристик в поставленной задаче;
- Работа существенной части волокон на изгиб при растяжении панелей с предложенными криволинейными укладками приводит к снижению ее жесткости и локальному увеличению наибольших перемещений в области за отверстием почти в 2 раза. Поэтому, несмотря на снижение коэффициента концентрации напряжений у края отверстия, при наличии ограничений на перемещения данный результат может оказаться неудовлетворительным и требует постановки и решения задачи оптимизации.

Задачи оптимизации жесткости

$$\Pi = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : ({}^4 S : \underline{\underline{\sigma}}) d\Omega \rightarrow \min$$

Метод главных напряжений

P. Pedersen: предположение о независимости поля σ от θ

$$\frac{d\Pi_E}{d\vartheta_E} = \int_{\Omega_E} \frac{\partial S_{ijkl}}{\partial \vartheta_E} \sigma_{ij} \sigma_{kl} d\Omega_E$$

$$\frac{d\Pi_E}{d\vartheta_E} = \int_{\Omega_E} [2U_2(\sigma_I^2 - \sigma_{II}^2) \sin(2\vartheta_E) + 4U_3(\sigma_I - \sigma_{II})^2 \sin(4\vartheta_E)] d\Omega_E$$

$$U_2 = \frac{S_{11} - S_{22}}{2}; U_3 = \frac{-S_{66} + S_{11} + S_{22} - 2S_{12}}{8}$$

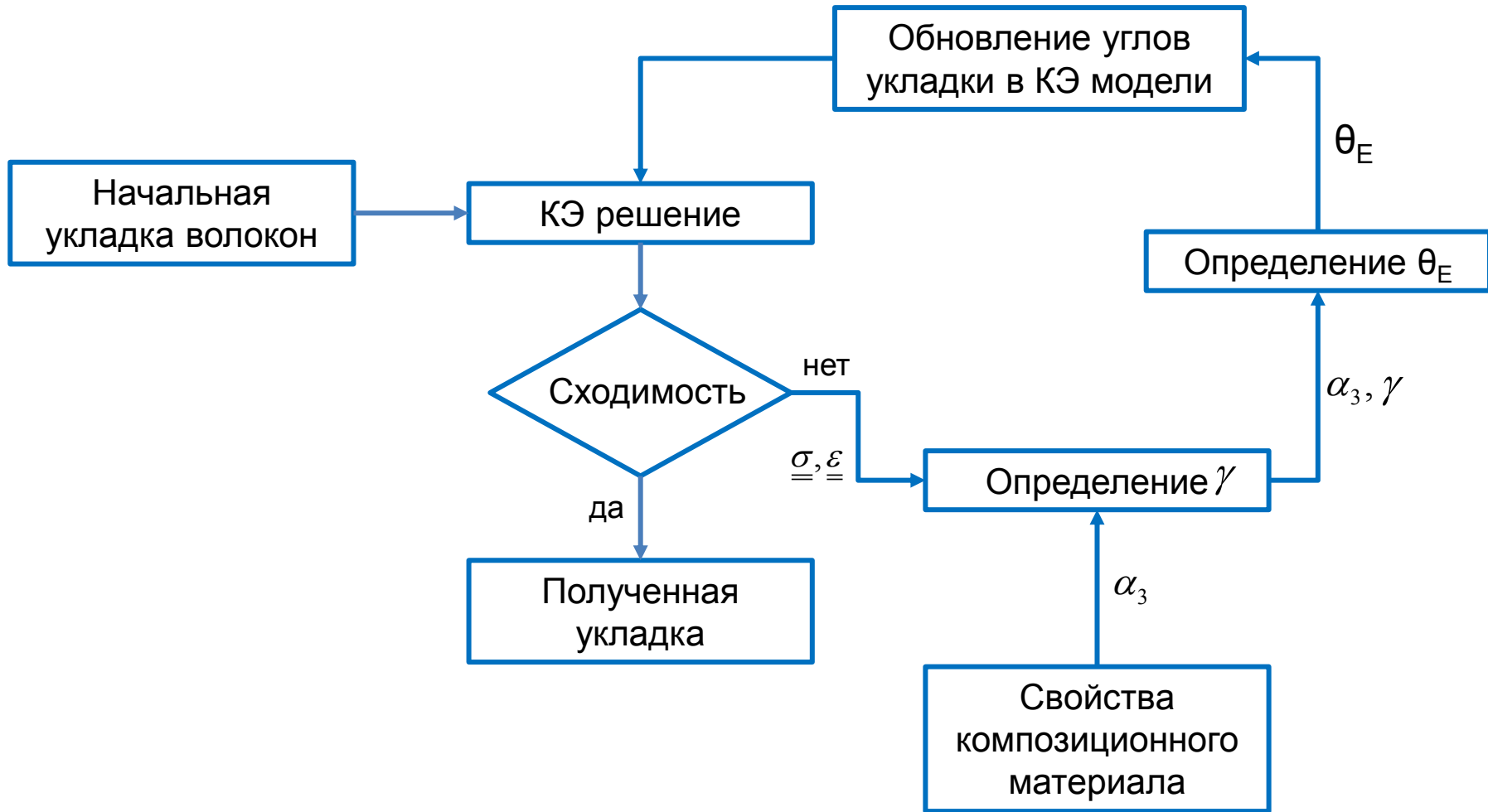
| Точка экстремума ϑ | $\alpha_3 > 0$ | | $\alpha_3 < 0$ | |
|------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | $\gamma < -1$ | $-1 < \gamma < 0$ | $0 < \gamma < 1$ | $\gamma > 1$ |
| 0° | глобальный минимум | локальный максимум | глобальный минимум | глобальный минимум |
| 90° | глобальный максимум | глобальный максимум | локальный минимум | глобальный максимум |
| $\cos 2\vartheta = -\gamma$ | — | глобальный минимум | глобальный максимум | — |

$$\alpha_3 = -S_{66} + S_{11} + S_{22} - 2S_{12}$$

Характеризует сдвиговую жесткость материала

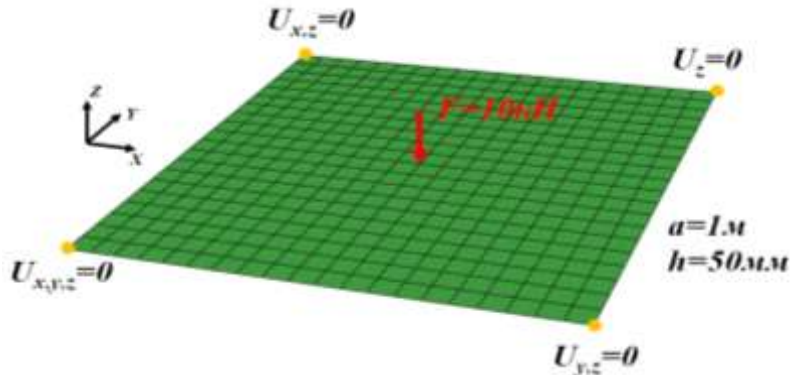
$$\gamma = \frac{(S_{11} - S_{22})(\sigma_I + \sigma_{II})}{(-S_{66} + S_{11} + S_{22} - 2S_{12})(\sigma_I - \sigma_{II})}$$

Итерационная процедура



Оптимизация укладки волокон в пластине, нагруженной в центре сосредоточенной силой

Постановка задачи



Материал

| E_1 , МПа | E_2 , МПа | ν_{12} | G_{12} , МПа | G_{23} , МПа |
|-------------|-------------|------------|----------------|----------------|
| 95200 | 6926 | 0.319 | 3156 | 2298 |

Низкая жесткость на сдвиг: $\alpha_3 < 0$

Оптимизированная укладка

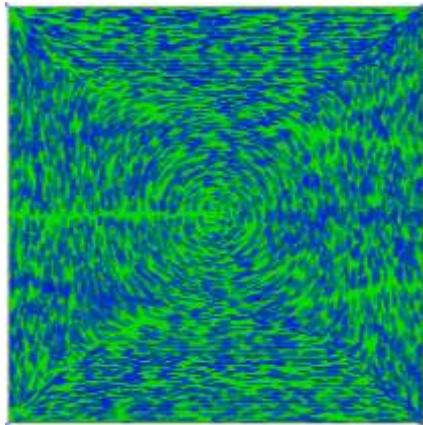
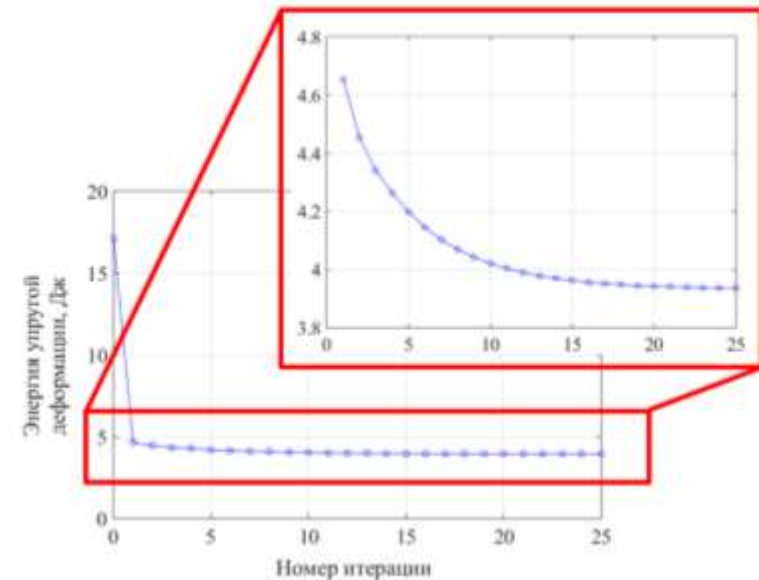


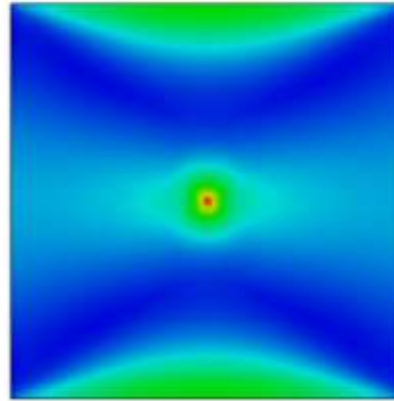
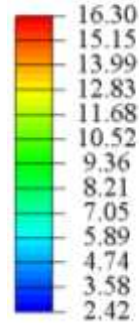
График сходимости метода



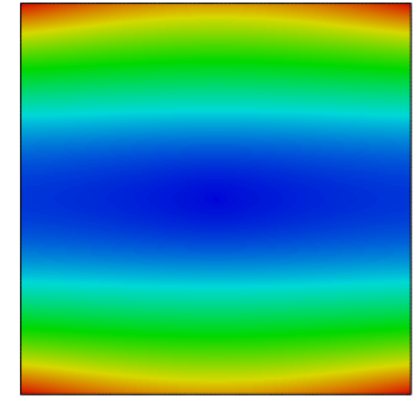
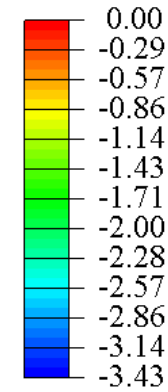
Сравнение результатов

Исходная укладка
(волокна уложены
горизонтально)

S, Max. Principal
SNEG, (fraction = -1.0)
(Avg: 100%)

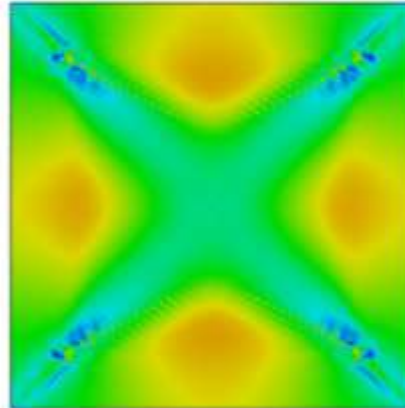
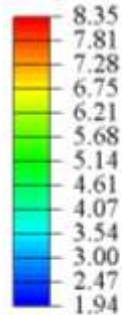


U, U3

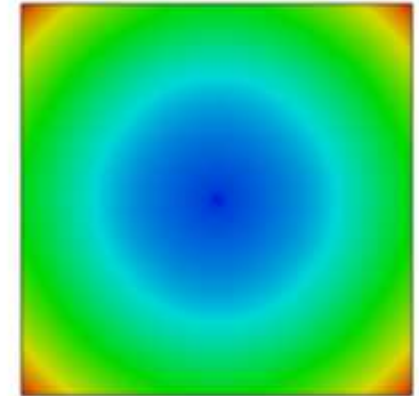
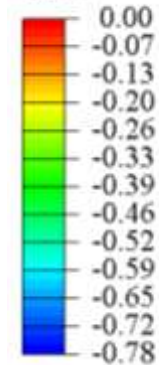


Оптимизированная
укладка

S, Max. Principal
SNEG, (fraction = -1.0)
(Avg: 100%)



U, U3



Оптимизация укладки волокон в пластине, нагруженной сосредоточенной силой в ее плоскости

Постановка задачи

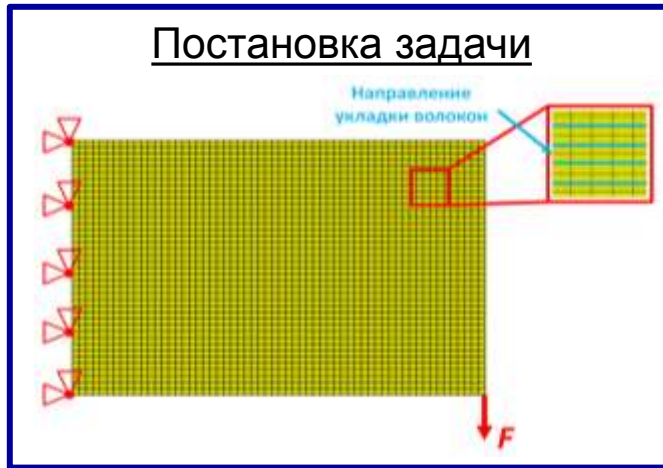
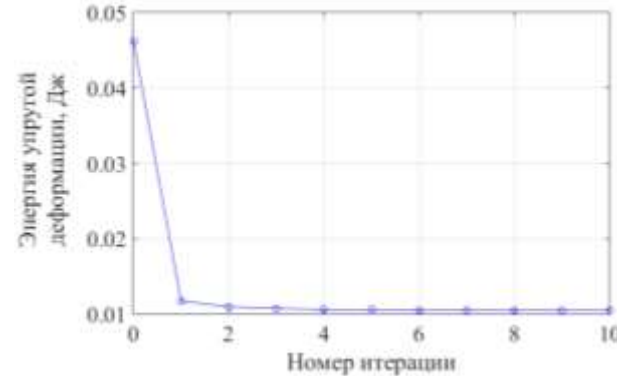
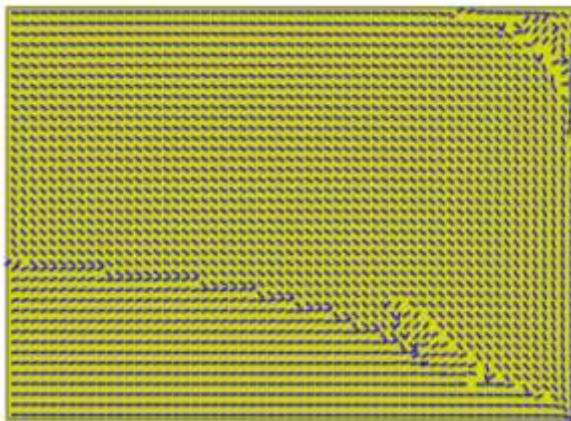


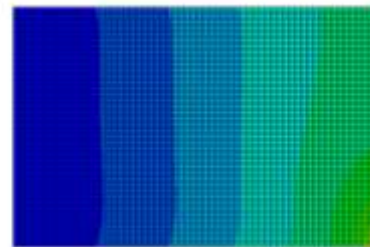
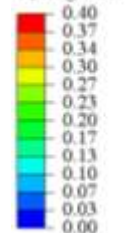
График сходимости метода



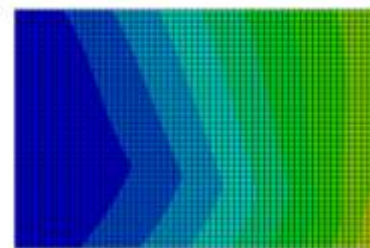
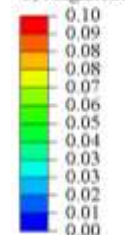
Оптимизированная укладка



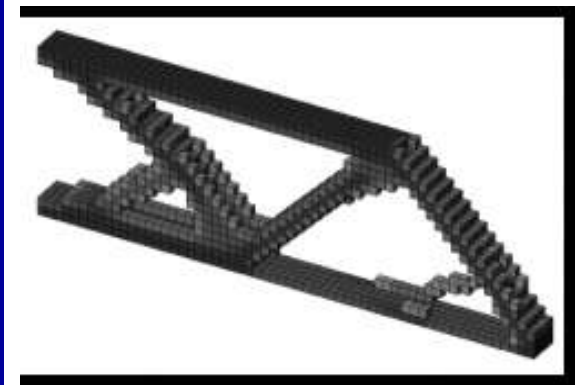
U, Magnitude



U, Magnitude

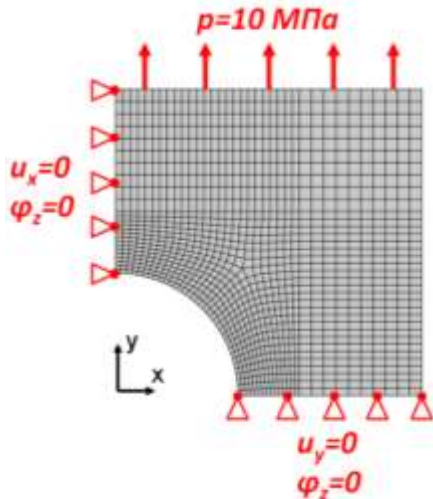


Результат топологической оптимизации



Оптимизация укладки волокон в панели, с круговым вырезом

Постановка задачи



Оптимизированная укладка

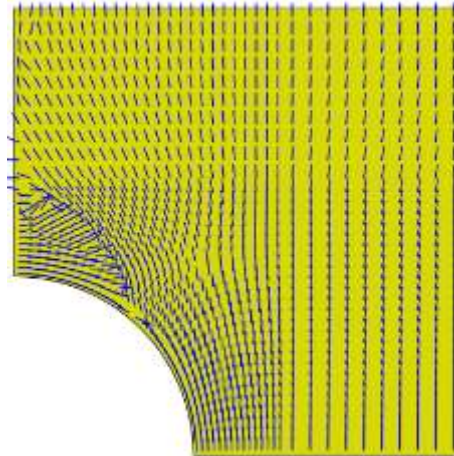
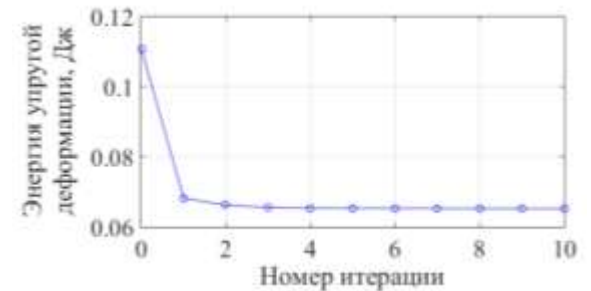
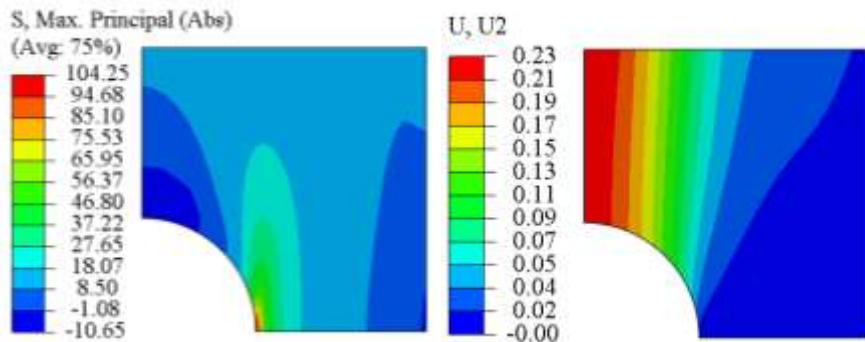


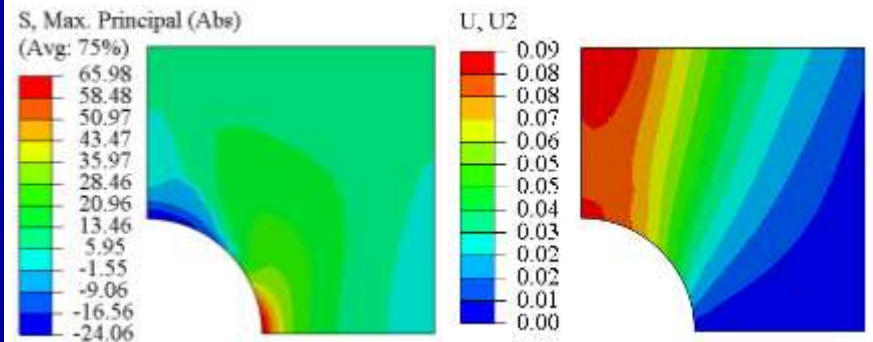
График сходимости метода



НДС плиты с исходной укладкой



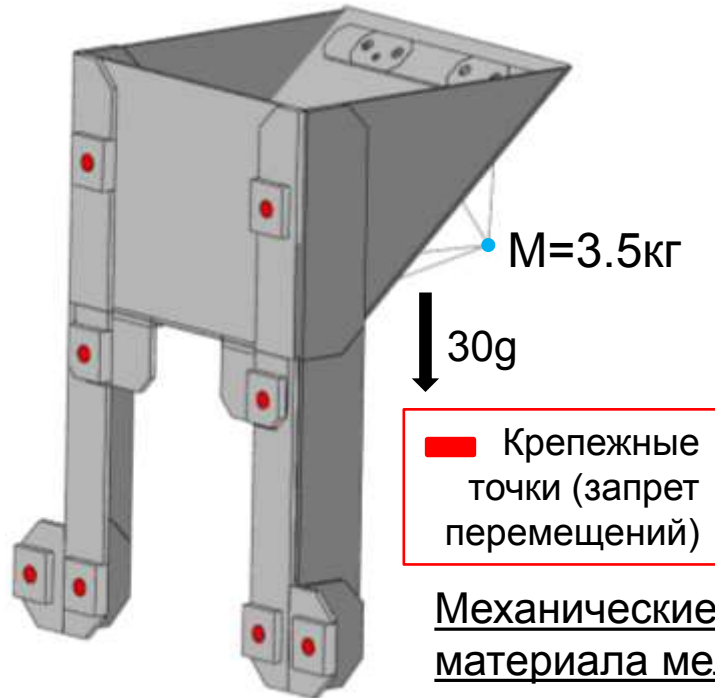
НДС плиты с оптимизированной укладкой



Выводы по рассмотренной задаче

- Рассмотренный итерационный подход изначально предложил P.Pedersen. Основные идеи его работ были использованы для интеграции метода в систему КЭ моделирования ABAQUS;
- Итерационный метод оптимизации прост и не предполагает использование алгоритмов параметрической оптимизации, однако имеет ряд серьезных недостатков, связанных с введенными для обоснования метода предположениями;
- Метод является эвристическим и в ряде случаев расходится;
- Все рассмотренные задачи решены методом главных напряжений. Метод главных деформаций не сошелся ни в одной из задач (в том числе при задании кинематических нагрузок);
- Укладка волокон в некоторых из рассмотренных в разделе задач не имеет непрерывного характера, что обуславливает необходимость сглаживания таких укладок;
- Для использования автоматизированных способов производства таких панелей также необходимо определение алгоритмов, переводящих конечно-элементное решение (значения углов ориентации волокон в отдельных точках панели) в закон движения механизмов, отвечающих за выкладку волокон.

Параметрическая оптимизация укладки волокон в слоях композиционного материала стенок кронштейна под установку звездного датчика



- Масса звездного датчика – 3.5 кг
- Звездный датчик – точечная масса
- Гравитационная нагрузка – 30g
- Стенки кронштейна состоят из 8 слоев с начальной укладкой $(0/+45/-45/90)_S$

Найти наиболее эффективную укладку волокон в стенках кронштейна для заданного режима нагружения с учетом возможных ограничений на характеристики конструкции

Механические упругие характеристики материала мелких деталей, креплений

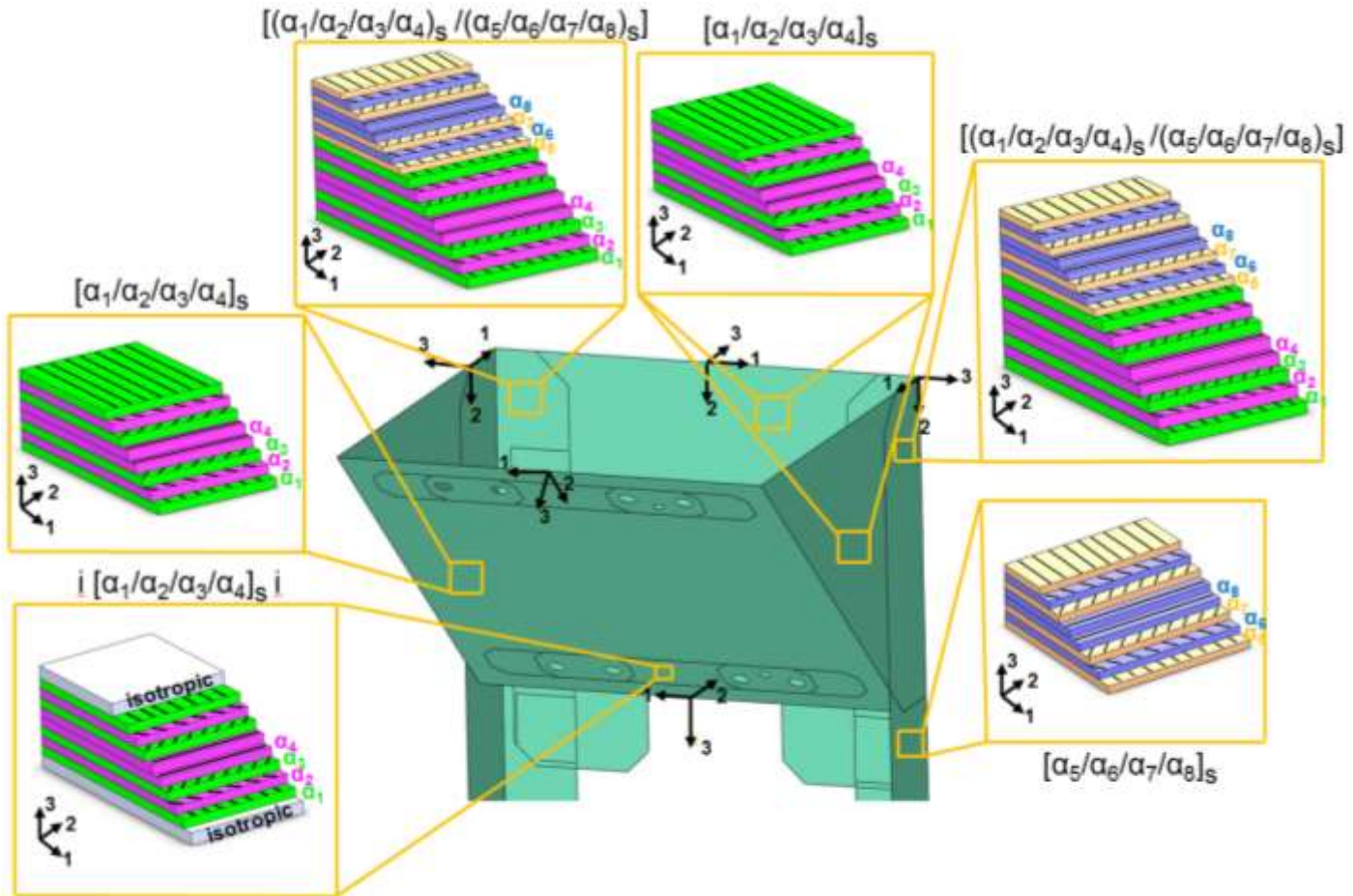
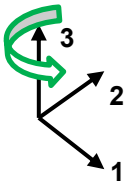
| E, МПа | ν |
|--------|-------|
| 125000 | 0.2 |

Эффективные механические упругие свойства слоя композиционного материала стенок кронштейна

| E_1 , МПа | E_2 , МПа | E_3 , МПа | ν_{12} | ν_{13} | ν_{23} | G_{12} , МПа | G_{13} , МПа | G_{23} , МПа |
|-------------|-------------|-------------|------------|------------|------------|----------------|----------------|----------------|
| 48880 | 6431 | 6431 | 0.364 | 0.364 | 0.379 | 2331.8 | 2331.8 | 2331.8 |

Укладка волокон в стенках кронштейна и принятые обозначения

Направление отсчета углов укладки волокон в слоях – α_i



Постановка и решение задачи оптимизации

$$\min_{\alpha} U_d(\alpha)$$

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8]$$

$$\alpha_i = -80 + 10k, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 17$$

Диапазон изменения $-80 \leq \alpha_i \leq 90$ с шагом **10**

$$\sigma_m < 150 \text{ МПа}$$

Ограничения: $f_1 > 50 \text{ Гц}$

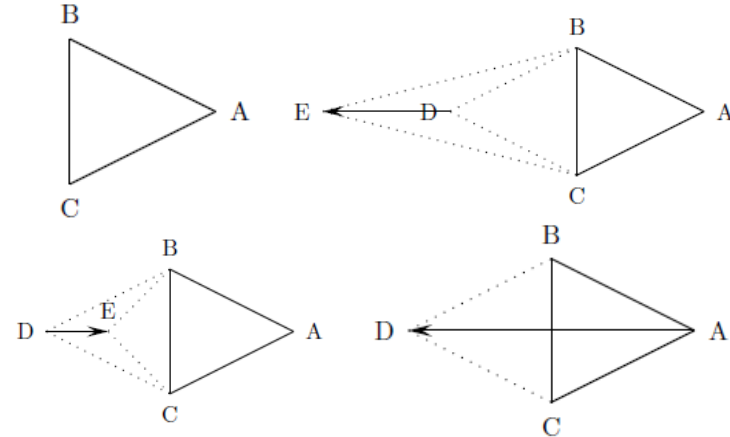
$$P_{max} < 1500 \text{ Н}$$

Общее число различных векторов α : $N = 18^8$

$$\min_{a \in K} \{U_d(\vec{a})\}, K = \{\vec{a} \mid v_1(\vec{a}) > 50, P_{max}(\vec{a}) < 1500, \sigma_m(\vec{a}) < 150\} \vec{H} = [2.2; 0.6; 1.6; 2.2; 3.3]$$

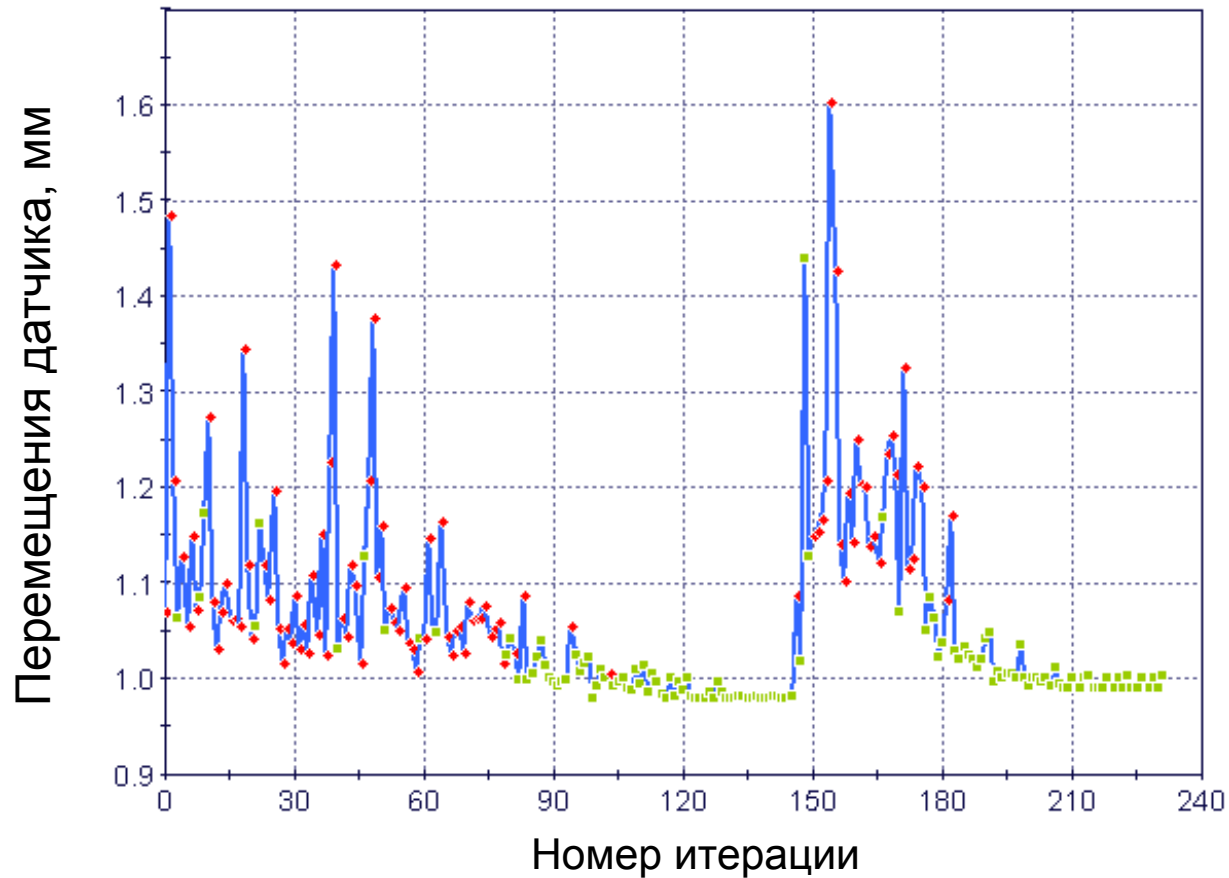
| Параметры | $\alpha_1, ^\circ$ | $\alpha_2, ^\circ$ | $\alpha_3, ^\circ$ | $\alpha_4, ^\circ$ | $\alpha_5, ^\circ$ | $\alpha_6, ^\circ$ | $\alpha_7, ^\circ$ | $\alpha_8, ^\circ$ | М, г | U_d , мм | P_{max} , Н | σ_m , МПа | N_1 , Гц |
|-----------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|------------|---------------|------------------|------------|
| Исходные | 0 | 45 | -45 | 90 | 0 | 45 | -45 | 90 | 414 | 0.995 | 1497.10 | 140.46 | 86.20 |
| Оптимиз. | 10 | 0 | 80 | -30 | -60 | 60 | -50 | 90 | 414 | 0.979 | 1462.67 | 139.74 | 87.04 |

Алгоритм оптимизации Нелдера-Мида



Величина перемещений датчика снизилась на 1.6% при соблюдении всех ограничений!

График сходимости метода SIMPLEX





Спасибо за внимание!