



Диаграммы деформирования при фазовых превращениях упругих тел

Выполнила: Лапина Е.А.

Научный руководитель: Фрейдин А.Б.

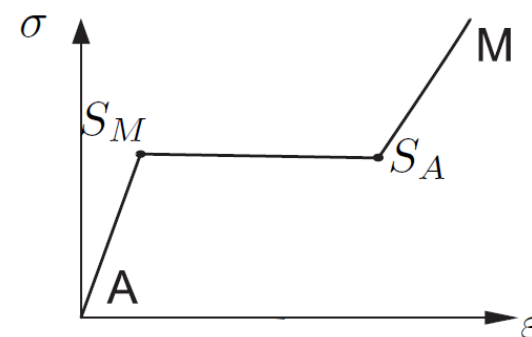
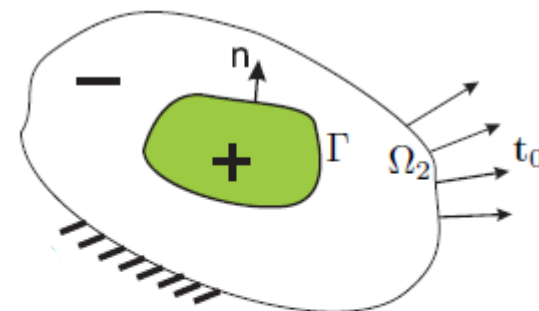
Санкт-Петербург
2017

Постановка проблемы

Рассматриваются фазовые превращения, сопровождающиеся собственной деформацией превращения и изменением модулей упругости

При каких деформациях начинается фазовое превращение? ➡ Построение предельных поверхностей прямого и обратного ФП

Как материал переходит из одной фазы в другую? ➡ Построение диаграмм деформирования для материала, претерпевающего ФП



Предельные поверхности фазовых превращений

Предельные поверхности фазовых превращений - поверхности в пространстве деформаций, на которых микроструктура с бесконечно малой объемной долей новой фазы энергетически выгоднее однофазного состояния.

Полуобратный метод (Фрейдин, Еремеев, Шарипова...): поверхность превращения как огибающая поверхностей возникновения для различных типов геометрии областей новой фазы (слой, эллипсоид, цилиндр) .

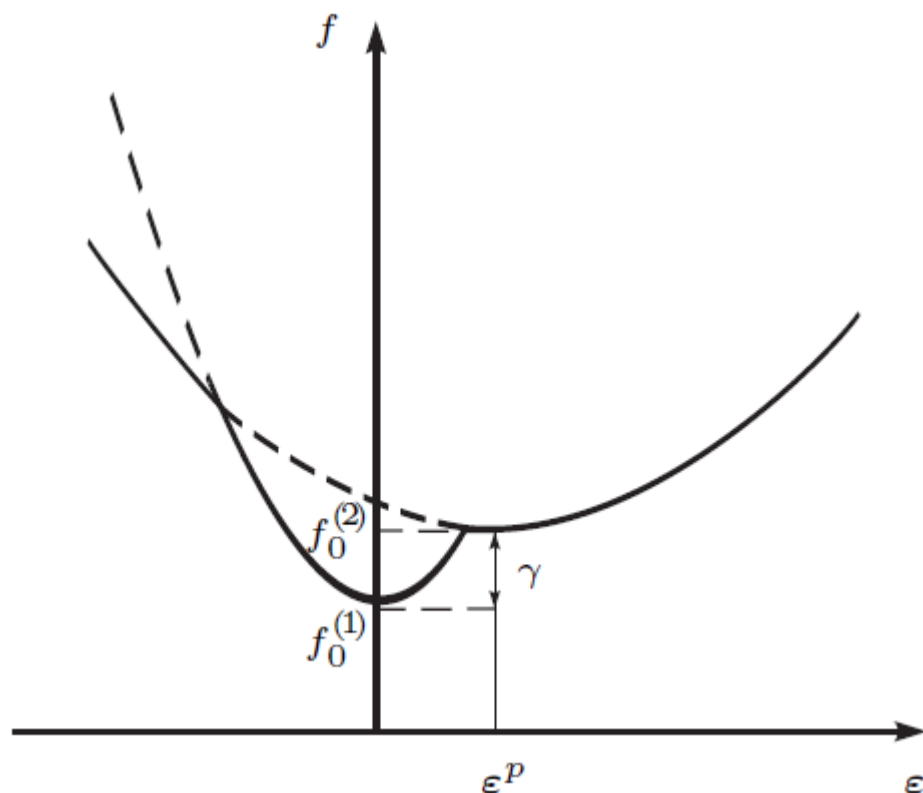
Прямой метод: при заданных средних деформациях равновесная микроструктура минимизирует энергию по отношению к геометрическим параметрам и объемной доле новой фазы. Предельным поверхностям прямого и обратного превращений соответствуют деформации, при которых объемная доля новой фазы стремится к нулю или единице.

Математический аппарат: Оптимальный композит минимизирует энергию при заданных средних деформациях и объемной доли по отношению к геометрическим параметрам.(Лурье, Черкаев, Милтон...)

Свободная энергия

$$f^{(1)}(\varepsilon, \theta) = f_0^{(1)}(\theta) + \frac{1}{2} \varepsilon : C_1 : \varepsilon, \quad f^{(2)}(\varepsilon, \theta) = f_0^{(2)}(\theta) + \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon^p) : C_2 : (\varepsilon - \varepsilon^p)$$

$$f(\varepsilon, \theta) = \min_{\{1,2\}} \left\{ f^{(1)}(\varepsilon, \theta), f^{(2)}(\varepsilon, \theta) \right\}$$



ε^p - деформация превращения;
 $f_0^{(1,2)}$ - химическая энергия:

γ играет роль температуры

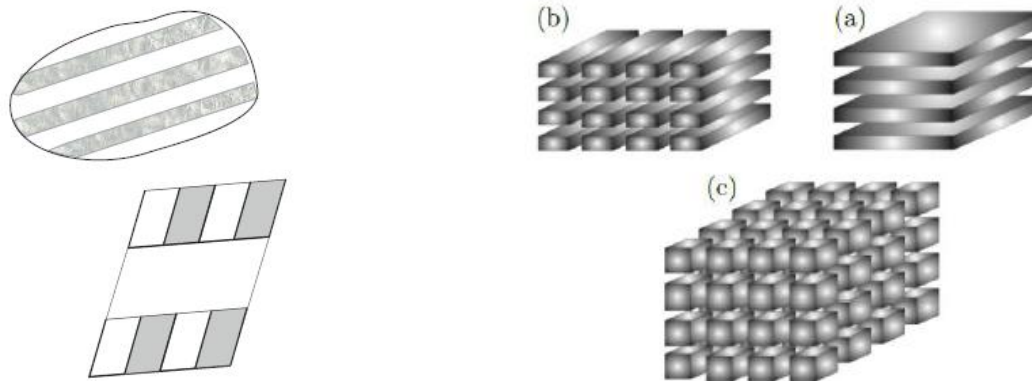
Минимизация энергии деформации при заданной объемной доле

Верхняя и нижняя оценки энергии деформации W :

$$LW(m_+, \varepsilon_0) \leq W(m_+, \varepsilon_0) \leq UW(m_+, \varepsilon_0)$$

$UW(m_+, \varepsilon_0)$ - верхняя граница (энергия любой микроструктуры)

$LW(m_+, \varepsilon_0)$ - нижняя граница



Ламинаты: а) 1 ранга; б) 2 ранга;
с) 3 ранга

Границы совпадают: $LW(m_+, \varepsilon_0) = UW(m_+, \varepsilon_0), \forall m_+, \forall \varepsilon_0$

*Antimonov M.A., Cherkaev A., Freidin A.B. Phase transformations surfaces and exact lower bounds // International Journal of Engineering Science. 2015



Оптимальные ламинаты

$$\mathbf{q}_+ = [\mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon}_+ - [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]$$

Оптимальные ламинаты ранга больше 3 энергетически эквивалентны одному из следующих случаев ламинатов ранга 1,2,3*:

1. Ламинаты первого ранга с нормалью, обеспечивающей максимум квадратичной формы

$$\mathcal{K}_-(\mathbf{n}, \mathbf{q}_+) = \mathbf{q}_+ : \mathbf{K}_-(\mathbf{n}) : \mathbf{q}_+ ,$$

$$\mathbf{K}_\pm = \{\mathbf{n} \otimes \mathbf{G}_\pm \otimes \mathbf{n}\}^s , \quad \mathbf{G}_\pm = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_\pm \cdot \mathbf{n})^{-1}$$

Нормаль зависит от собственных значений q_+ , возможны два направления нормали.

2. Ламинаты второго ранга, тензор $\mathbf{q}_+$ осесимметричный

$$\mathbf{q}_+ = q(\mathbf{E} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + q_k \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$$

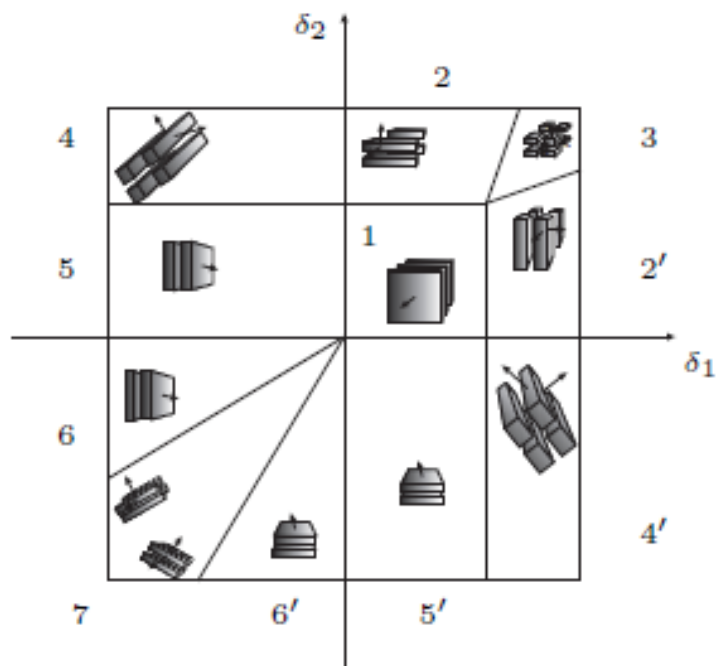
В зависимости от соотношения q и q_k возможны два вида направлений нормали

3. Ламинаты третьего ранга, тензор $\mathbf{q}_+$ - шаровой

*Antimonov M.A., Cherkaev A., Freidin A.B. Phase transformations surfaces and exact lower bounds // International Journal of Engineering Science. 2015

Минимизирующие микроструктуры

$$\delta_1 = q_1/q_3, \quad \delta_2 = q_2/q_3, \quad |q_3| \geq \max\{|q_1|, |q_2|\}, \quad \mathbf{q} = [\mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon} - [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]$$



$$k_+ > k_- , \mu_+ > \mu_- , \quad f_0^- > f_0^+$$

1,5,5',6,6' – простые слои

3 – ламинаты третьего ранга

2,2' – прямые ламинаты второго ранга

4,4',7 – косые ламинаты второго ранга

Построение предельных поверхностей превращения

Энергия ламината ранга n :

$$E = m_+(\gamma_* + \frac{1}{2}\mathbf{e}_0 : \mathbf{M}_-^{(n)} : \mathbf{e}_0), \quad n = 1, 2, 3$$

где:

$$\mathbf{M}_-^{(n)} = \left([\mathbf{C}]^{-1} + m_- \sum_{i=1}^n \beta^{(i)} \mathbf{K}_-(\mathbf{n}^{(i)}) \right)^{-1} \quad \beta^{(i)} = \frac{m_1^{(i)}}{m_- m_2^{(i)}} \prod_{j=1}^i m_2^{(j)} \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

$$\gamma_* = \gamma + \frac{1}{2} [\boldsymbol{\varepsilon}^p] : [\mathbf{C}^{-1}]^{-1} : [\boldsymbol{\varepsilon}^p] \quad \mathbf{e}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_0 - [\mathbf{C}]^{-1} : [\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^p]$$

Для предельных поверхностей:

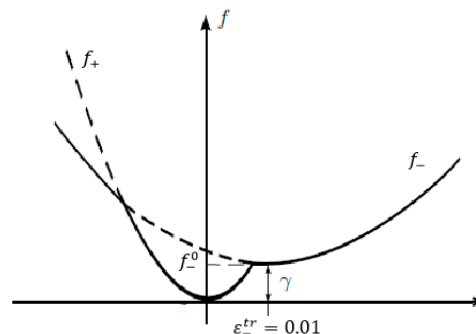
$$\left. \frac{\partial E(\boldsymbol{\varepsilon}_0, m_+)}{\partial m_+} \right|_{m_+=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial E(\boldsymbol{\varepsilon}_0, m_+)}{\partial m_+} \right|_{m_+=1} = 0.$$

Для оптимального ламината

$$\frac{\partial E}{\partial m_+} = \gamma_* + \frac{1}{2} (\mathbf{q}_+ : [\mathbf{C}]^{-1} : \mathbf{q}_+ + \mathcal{K}_{max}(\mathbf{q}_+)) = 0$$

Сечение предельных поверхностей превращения плоскостью $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$

$$\begin{aligned} k_+ &> k_- & f_0^- &> f_0^+ \\ \mu_+ &> \mu_- & \varepsilon_-^{tr} &= 0.01 \end{aligned}$$



1. Поверхность прямого превращения

— Ламинаты 1 ранга

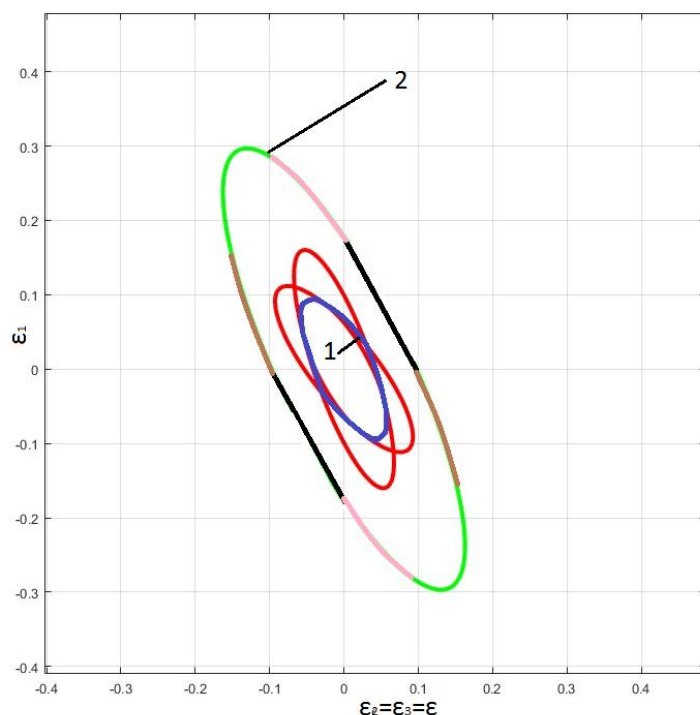
2. Поверхность обратного превращения

— Ламинаты 3 ранга

— Прямые ламинаты 2 ранга

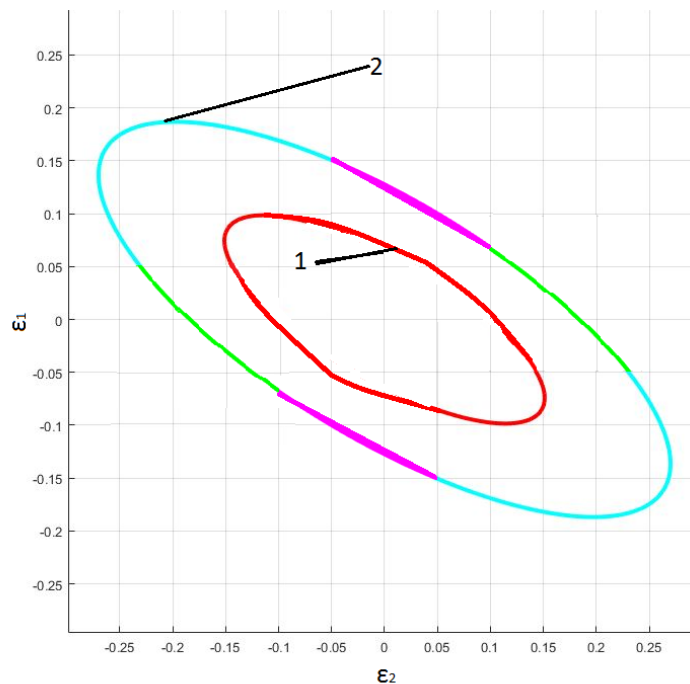
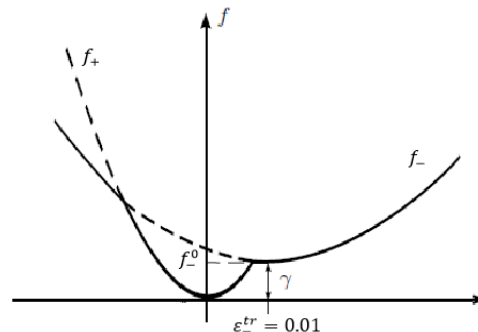
— Прямые ламинаты 1 ранга

— Косые ламинаты 2 ранга



Сечение предельных поверхностей превращения плоскостью $\varepsilon_3 = 0$

$$\begin{aligned} k_+ &> k_- & f_0^- &> f_0^+ \\ \mu_+ &> \mu_- & \varepsilon_-^{tr} &= 0.01 \end{aligned}$$



1. Поверхность прямого превращения

— Ламинаты 1 ранга

2. Поверхность обратного превращения

— Косые ламинаты 2 ранга

— Прямые ламинаты 2 ранга

— Ламинаты 1 ранга

Диаграмма деформирования при всестороннем растяжении

Предельные поверхности ФП и
путь деформирования

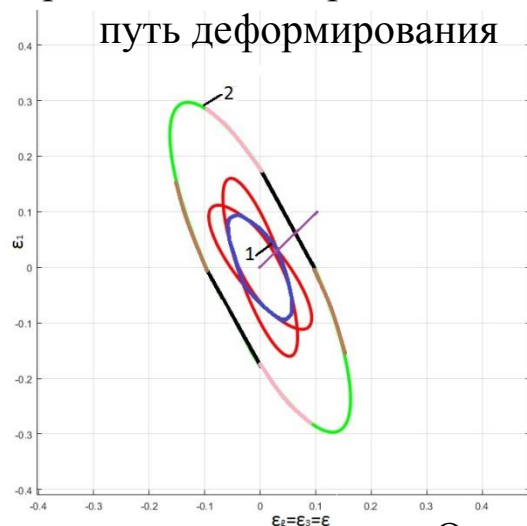
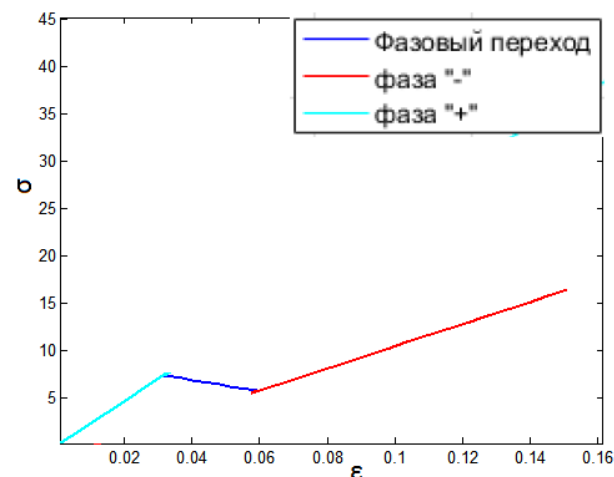


Диаграмма деформирования



Оптимальные микроструктуры

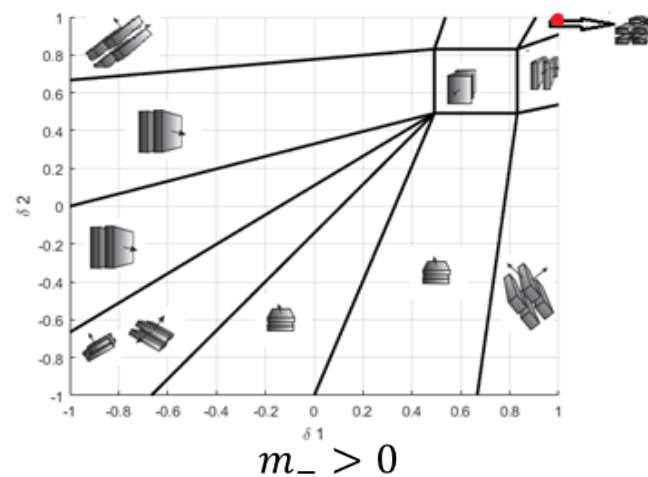
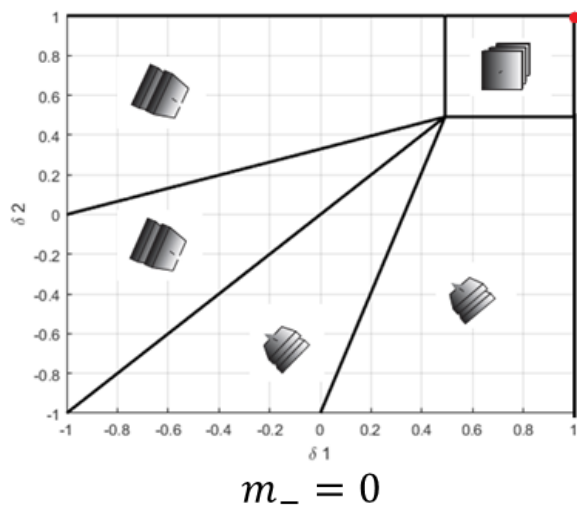


Диаграмма деформирования при осесимметричной деформации

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = \nu \varepsilon_1$$

Предельные поверхности ФП и
путь деформирования

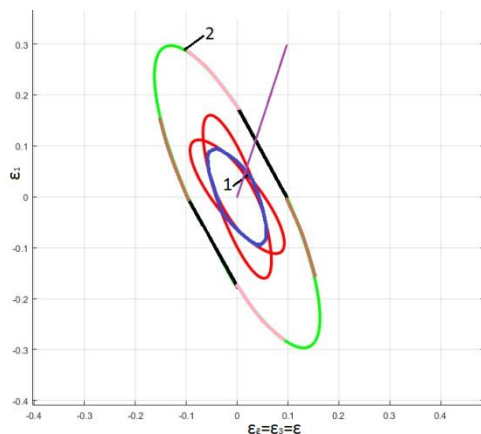
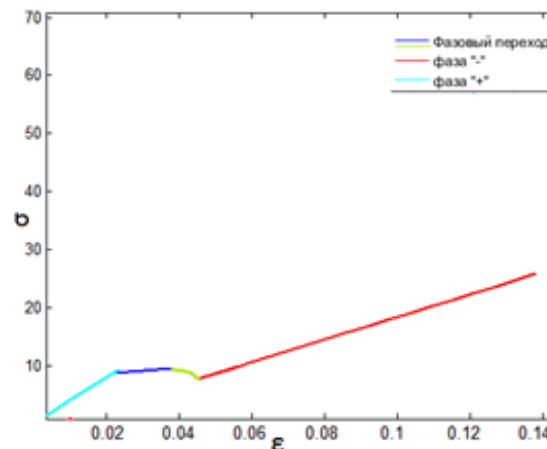
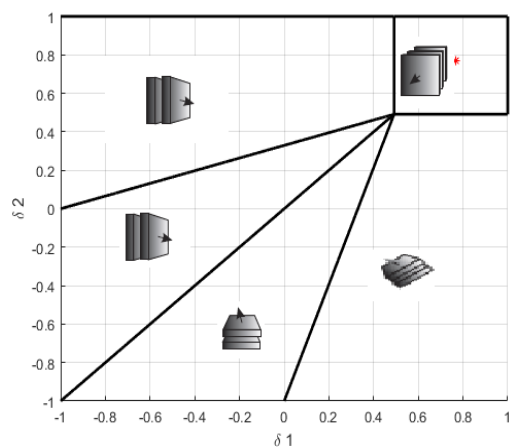


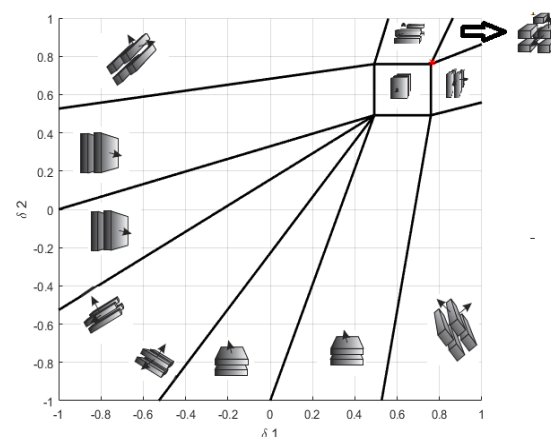
Диаграмма деформирования



Оптимальные микроструктуры



$m_- = 0$



$m_- = 0.8$

Диаграмма деформирования при деформации $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$; $\varepsilon_3 = 0$

Предельные поверхности ФП и
путь деформирования

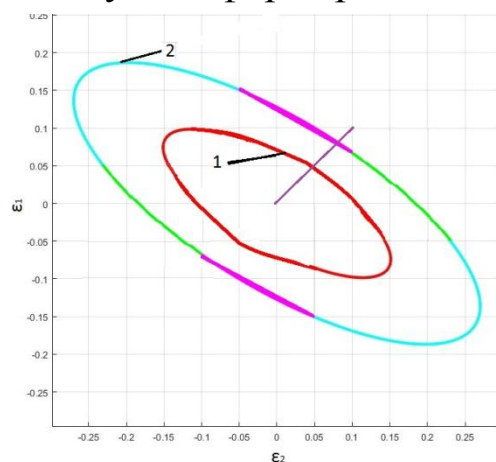
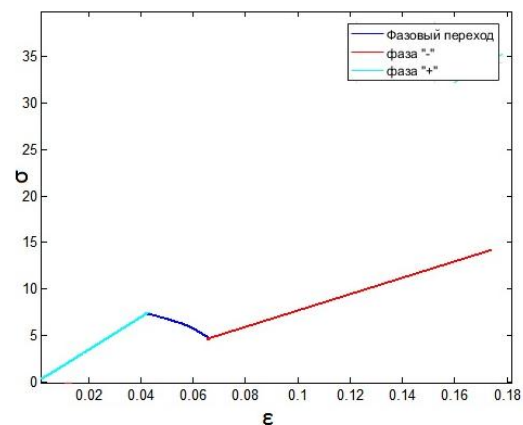
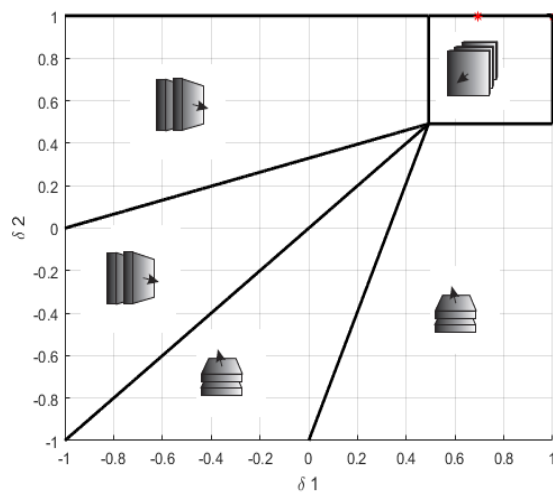


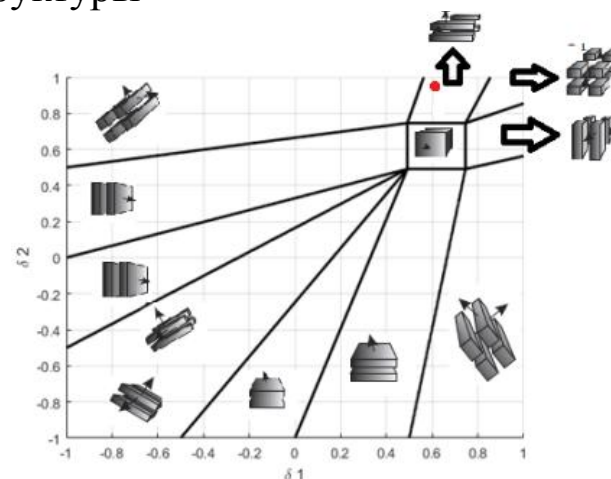
Диаграмма деформирования



Оптимальные микроструктуры



$m_- = 0$



$m_- > 0$



Заключение

- Разработан алгоритм построения предельных поверхностей превращения средствами MatLab;
- Рассмотрен случай, когда новая фаза обладает меньшим модулем сдвига и объемным модулем упругости, чем исходная фаза;
- Были построены сечения поверхностей прямого и обратного фазовых превращений для осесимметричных деформаций (плоскостью $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$) и для случая плоской деформации ($\varepsilon_3 = 0$);
- Для случаев всестороннего растяжения, осесимметричной деформации и плоской деформации были построены диаграммы деформирования для материалов, претерпевающих фазовые превращения;
- Наблюдались эффекты деформационного упрочнения и разупрочнения.



Спасибо за внимание!