Моделирование распространения фронтов химических реакций в деформируемых телах

Диссертация

на соискание академической степени магистра

по направлению 15.04.03 «Прикладная механика»

Выполнила: студентка группы 63602/4 Петренко С.Е. Научный руководитель: Проф.,д.ф.-м.н. Фрейдин А.Б.

Санкт-Петербург, 2017

Актуальность проблемы

MEMS: многоцикловая усталость кремниевых шестеренок

Механохимия. Связанные задачи описания химических и механических процессов.

 $Si + O_2 \rightarrow SiO_2$ Interface SiO_2/Si $u \rightarrow u \rightarrow u$ Rection-Layer
Recti

Эксперимент: Muhlstein et al (2001, 2002, ...)

Актуальность проблемы

Разбухание кремниевых нанопроволок в процессе литизации



X.H. Liu et al. Anisotropic Swelling and Fracture of Silicon Nanowires during Lithiation, Nano Letters, 2011

Цели работы

Постановка и решение связанных задач механохимии для неупругих продуктов реакции

1) Плоский фронт реакции в зажатой пластине для:

- линейного вязко-упругого превращенного материала, описываемого моделью Максвелла
- линейно вязкого превращенного материала
- линейного вязко-упругого превращенного материала, описываемого моделью Кельвина-Фойгта

2) Плоский фронт химической реакции в свободной пластине для линейно вязкого превращенного материала

3) Сферический фронт химической реакции для:

- линейно вязкого превращенного материала
- линейного вязко-упругого превращенного материала, описываемого моделью Кельвина-Фойгта

4) Распространение сферического фронта химической реакции для упруго-пластического превращенного материала

Модели реакций, контролируемых диффузией

Уравнение диффузии, напр., $\Delta c = 0$

- $\left. D \frac{\partial c}{\partial N} \right|_{\Omega} \alpha \left(c_* c(\Omega) \right) = 0$ на внешней поверхности тела $\left. D \frac{\partial c}{\partial N} \right|_{\Gamma} + k_* \omega(\Gamma) = 0$ на фронте химической реакции
- *D* коэффициент диффузии
- lpha коэффициент переноса, c_* растворимость B_* в B_+



 ω - скорость реакции

Модели:

- Deal-Groove модель окисления (1965) плоский фронт реакции, без напряжений
- Као et al. 1987. Напряжения влияют через $D = D(\sigma)$, $\kappa = \kappa(\sigma)$
- Дополнительные слагаемые в уравнении диффузии (J. Toribio, A.G. Knyazeva,...)

Влияние напряжений на скорость реакции через влияние на диффузию

Химическое сродство

Производство энтропии: Т $P[S] = A\omega \ge 0$, где ω – скорость реакции

$$A = -\sum n_i M_i \mu_i$$

- химическое сродство, M_i - молярная масса і-ой компоненты; μ_i - химический потенциал і-ой компоненты; n_i - стехиометрический коэффициент Кинетическое уравнение (Пригожин И., Дефей Р., 1954) $\omega = \omega(A), \omega(0) = 0$

$$\omega = \vec{\omega} \left(1 - \exp\left(-\frac{A}{RT}\right) \right), W_N = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \omega_N$$

Фрейдин А.Б.: Напряжения влияют на скорость реакции через тензор химического сродства

$$A_{NN} = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \left(\gamma(T) + \frac{1}{2} \varepsilon_- : \varepsilon_- - \frac{1}{2} (\varepsilon_+ - \varepsilon_{tr}) : \mathcal{C}_+ : (\varepsilon_+ - \varepsilon_{tr}) + \sigma_- : \llbracket \varepsilon \rrbracket \right) + n_* RT ln \frac{c}{c_*}$$

Скорость реакции на площадке с нормалью N

$$W_N = \frac{n_- M_-}{\rho_-} k_* c \left(1 - \exp\left(-\frac{A_{NN}}{RT}\right) \right)$$

В деформируемом теле реакция идет не в точках, а на ориентированных площадках⇒ тензор химического сродства

Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах. МТТ. 2014 Freidin A., On chemical reaction fronts in nonlinear elastic solids, 2009 Распространение плоского фронта химической реакции зажатой пластине. Вязко-упругий превращенный материал

$$\varepsilon_{z} = 0$$

$$\sigma_{y} = 0, \ \sigma_{xy} = 0$$

$$\sigma = \sigma E + S; \ \varepsilon = \frac{\vartheta}{3}E + e$$

$$\sigma_{-}^{+} = k^{+}(\vartheta^{+} - \vartheta^{tr})$$

Модель Максвелла:

$$S^{+} = S^{el} = S^{\eta}, \qquad S^{el} = 2\mu^{+}e^{el}, \qquad S^{\eta} = 2\eta e^{i\eta}, e^{+} = e^{el} + e^{\eta}, \qquad S^{-} = 2\mu^{-}e^{-}$$

Плоский фронт реакции в зажатой пластине. Модель Максвелла

Нормальная компонента тензора химического сродства:

$$A_{NN} = \frac{n_{-}M_{-}}{\rho_{-}} \left(\gamma + \frac{E_{-}}{2(1-\nu_{-}^{2})} \varepsilon_{0}^{2} - \frac{k^{+}}{2} (\vartheta^{+} - \vartheta^{tr})^{2} - \mu^{+} \left((e_{x}^{e})^{2} + (e_{y}^{e})^{2} + (e_{z}^{e})^{2} \right) \right) + n_{*}RT \ln \left(\frac{c_{eq}}{c_{*}} \right)$$

Критическое значение параметра γ :

$$\gamma_* = \frac{\mu^+ k^+ (\vartheta^{tr})^2 (8\mu^+ + 13k^+)}{2(4\mu^+ + 3k^+)^2} \qquad \xi = \frac{h}{H}$$
еакции:

Кинетика фронта реакции:

$$\frac{n_*^2 k_* H}{2D} \cdot \xi^2 + \left(1 + \frac{n_*^2 k_*}{\alpha}\right) \cdot \xi = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \cdot \frac{k_* n_* c_*}{H} \left(1 - exp\left(-\frac{n_- M_-}{\rho_-} + \frac{E_-}{2(1 - \nu_-^2)}\varepsilon_0^2 - \frac{k^+}{2}(\vartheta^+ - \vartheta^{tr})^2 - -\mu^+\left((e_x^e)^2 + (e_y^e)^2 + (e_z^e)^2\right)\right)\right) \right) \cdot t$$

Зависимость кинетики фронта от величины внешней деформации и параметра γ



Релаксация напряжений позади фронта реакции



 t_y - момент времени, при котором $h(t_y) = y$

Химическое превращение упругого шара в случае упруго-пластического превращенного материала.

$$\sigma = \sigma E + S; \quad \varepsilon = \frac{\vartheta}{3}E + e$$

$$\sigma^{+} = k^{+}(\vartheta^{+} - \vartheta^{tr})$$

$$\sigma^{-} = k^{-}\vartheta^{-}$$

$$S^{+} = 2\mu^{+}e^{el} = 2\mu^{+}(e^{+} - e^{pl})$$

$$e^{+} = e^{el} + e^{pl}$$

$$S^{-} = 2\mu^{-}e^{-}$$



$$\dot{\boldsymbol{e}^{+}} = \dot{\boldsymbol{e}^{el}} + \dot{\boldsymbol{e}^{pl}} = \frac{\dot{\boldsymbol{s}^{+}}}{2\mu^{+}} + \begin{cases} 0, & \text{если} \left| \sigma_{r}^{+} - \sigma_{\varphi}^{+} \right| < \sigma_{y} \\ \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma^{+}}, & \text{если} \left| \sigma_{r}^{+} - \sigma_{\varphi}^{+} \right| = \sigma_{y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_{\varphi}}{r} = 0$$
$$u^{\pm} = A^{\pm}r + \frac{B^{\pm}}{r^2}$$

Начальное упругое состояние ($\sigma_0 < \sigma_0^*$)

$$\boldsymbol{\sigma}^{+} = \left(k^{+}(3A^{+} - \vartheta^{tr}) - \frac{4\mu^{+}B^{+}}{r^{3}}\right)\boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}_{r} + \left(k^{+}(3A^{+} - \vartheta^{tr}) + \frac{2\mu^{+}B^{+}}{r^{3}}\right)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}_{r})$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{+} = \left(A^{+} - \frac{2B^{+}}{r^{3}}\right)\boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}_{r} + \left(A^{+} + \frac{B^{+}}{r^{3}}\right)(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{e}_{r}\boldsymbol{e}_{r})$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{-} = 3k^{-}A^{-}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{-} = A^{-}\boldsymbol{E}$$

Интенсивность касательных напряжений:

$$\begin{aligned} |\sigma_r - \sigma_{\phi}| &= 6\mu^+ \left| \frac{([k^{-1}]\sigma_0 + \vartheta^{tr})}{4\mu^+ [k^{-1}] + \frac{3 + \frac{4\mu^+}{k^-}}{(1 - \xi)^3}} \right| \frac{1}{\varrho^3} \\ \varrho &= \frac{r}{R} \end{aligned}$$



Упруго-пластическое состояние ($\sigma_0^* < \sigma_0 < \sigma_0^{**}$)

Упругий регион:
$$(a < \varsigma < r < R)$$

 $\sigma^{el} = \left(\sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_y\varsigma^3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right)\right)e_re_r + \left(\sigma_0 - \frac{1}{3}\sigma_y\varsigma^3\left(\frac{1}{r^3} + \frac{2}{R^3}\right)\right)(E - e_re_r)$
 $\varepsilon^{el} = \left(\frac{\sigma_0 + k^+ \vartheta^{tr}}{3k^+} - \frac{\sigma_y\varsigma^3}{3}\left(\frac{2}{3R^3k^+} - \frac{1}{\mu^+}\right)\right)e_re_r + \left(\frac{\sigma_0 + k^+ \vartheta^{tr}}{3k^+} - \frac{\sigma_y\varsigma^3}{9}\left(\frac{2}{R^3k^+} - \frac{1}{2\mu^+}\right)\right)(E - e_re_r)$
Пластичный регион: $(a < r < \varsigma)$
 $\sigma^{pl} = \left(\sigma_0 - \sigma_y\left(\ln\frac{r}{\varsigma} - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\varsigma^3}{R^3}\right)\right)\right)e_re_r + \left(\sigma_0 - \sigma_y\left(\ln\frac{r}{\varsigma} + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\varsigma^3}{R^3}\right)\right)\right)(E - e_re_r)$
 $\varepsilon^{pl} = \frac{\sigma_y(3k^+ + 4\mu^+)}{6\mu^+k^+}\left(\frac{\varsigma^3}{r^3} - 1\right)\alpha$
 $A_{NN} = \frac{n_-M_-}{\rho_-}\left(\gamma + \frac{9}{2}k^-(A^-)^2 - \frac{1}{6}\left(3\sigma_0 + 6\sigma_yln\left(\frac{\varsigma}{R(1-\xi)}\right) - \frac{2\sigma_y\varsigma^3}{R^3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sigma_r^p\left(6\sigma_yln\left(\frac{\varsigma}{R(1-\xi)}\right) + 3\sigma_0 - 3\sigma_y\left(1 + \frac{\varsigma^3}{R^3}\right)\right) + 2\sigma_y^2\right) + \frac{1}{4k^-A^-}\left(\frac{3\sigma_r^p}{2\mu^+} - 3A^- - \frac{\sigma_y}{\mu^+}\right) + n_*RTln\frac{c}{c_*}$

Зависимость кинетики фронта химической реакции от интенсивности внешней нагрузки и от энергетического параметра в случае постоянной нагрузки



Зависимость кинетики фронта химической реакции от интенсивности внешней нагрузки и от энергетического параметра в случае изменяющейся со временем нагрузки



Результаты.

Решены связанные задачи механохимии в постановке, основанной на понятии тензора химического сродства

1) Задача о распространении плоского фронта химической реакции в зажатой пластине для линейного вязко-упругого превращенного материала (модели Максвелла и Кельвина-Фойгта)

- вязкость не влияет на кинетику фронта химической реакции, так как не влияет на напряжения на фронте, но влияет на релаксацию напряжений позади фронта реакции;
- исследовано влияние зависящего от температуры энергетического параметра γ на кинетику фронта реакции;
- внешние деформации могут ускорять, замедлять и блокировать реакцию;
- увеличение объемного модуля упругости превращенного материала замедляет распространение фронта химической реакции, а уменьшение – ускоряет;
- исследованы предельные случаи перехода от материала Максвелла к линейно-упругому и линейно-вязкому материалам;

Результаты

2) Задача о распространении плоского фронта химической реакции в свободной пластине для линейно вязкого превращенного материала.

- В случае свободной пластины реакция протекает быстрее, чем в случае зажатой пластины;
- Вязкость влияет на кинетику фронта химической реакции и на релаксацию напряжений позади фронта реакции. Увеличение коэффициента вязкости приводит к замедлению реакции, и наоборот;
- Исследовано влияние внешних напряжений на кинетику фронта химической реакции. Показано, что растягивающие напряжения ускоряют реакцию, и наоборот;
- Исследовано влияние зависящего от температуры энергетического параметра γ на скорость химической реакции. Было продемонстрировано, что увеличение энергетического параметра ускоряет реакции, а уменьшение – замедляет реакцию.

Результаты

 Задача о распространении сферического фронта химической реакции для линейного вязко-упругого превращенного материала Кельвина-Фойгта.

- Вязкость влияет на кинетику фронта химической реакции. показано., что увеличение коэффициента вязкости приводит к замедлению реакции;
- Исследовано влияние внешнего напряжения на кинетику фронта реакции. Показано, что растягивающие напряжения – ускоряют реакцию, а сжимающие – замедляют;
- Исследовано влияние энергетического параметра γ на скорость химической реакции. Было показано, что увеличение параметра γ – ускоряет реакцию, а уменьшение γ – замедляет реакцию;
- Показано, что в случае превращенного материала, описываемого моделью Кельвина Фойгта, увеличение объемного модуля упругости превращенного материала приводит к замедлению реакции, и наоборот;

Результаты

4) Задача о распространении сферического фронта химической реакции в случае упруго-пластического превращенного материала для:

- постоянной внешней нагрузки
- линейно изменяющейся во времени внешней нагрузки.

- Существует область статически допустимых напряжения для упругопластического состояния. Существует напряжение $\sigma_0^{(1)}$, меньше которого не будет пластичности нигде – будет только упругое состояние. Существует напряжение $\sigma_0^{(2)}$, больше которого нет статически допустимых напряжений;
- показано, что если пластичность начнется, то она начнется на фронте реакции;
- Исследовано как интенсивность внешней нагрузки влияет на кинетику фронта химической реакции и влияет на упруго-пластическое состояние;
- Исследовано как энергетический параметр γ влияет на распространение фронта химической реакции.

Апробация Работы

Статья:

 Freidin, A., Morozov, N., Petrenko, S., Vilchevskaya, E. Chemical reactions in spherically symmetric problems of mechanochemistry. Acta Mech., 2016, 227, 43-56

Личные доклады:

- С.Е. Петренко, А.Б. Фрейдин "Распространение фронтов химических реакций в упругих и вязко-упругих телах". Неделя науки СпбПУ 2015. Диплом 1 степени за доклад и тезисы в сборнике конференции
- Petrenko S., Freidin A., Spherically-symmetric problem of mechanochemistry with visco-elastic reaction product, p.94-95, Book of Abstracts, XLIV International Summer School-Conference 'Advanced Problems in Mechanics', St.Petersburg, Russia, 2016

Соавторство докладов на 3 международных конференциях

Золотая Медаль Российской Академии Наук с премией для студентов высших учебных заведений

Грант Правительства Санкт-Петербурга 2016, для студентов вузов, расположенных на территории Санкт-Петербурга

Спасибо за внимание.

Распространение плоского фронта химической реакции в случае вязкого превращенного материала в свободной пластине

$$\sigma = \sigma E + S; \quad \varepsilon = \frac{\vartheta}{3}E + e$$

$$\sigma^{+} = k^{+}(\vartheta^{+} - \vartheta^{tr})$$

$$\sigma^{-} = k^{-}\vartheta^{-}$$

$$S^{+} = 2\eta e^{+}$$

$$S^{-} = 2\mu^{-}e^{-}$$

$$\varepsilon_{z} = 0$$

$$\Gamma_{z} = 0$$

$$\Gamma_{z} = 0$$

$$\Gamma_{z} = 0$$

$$\sigma_y = 0, \ \sigma_{xy} = 0$$

Гипотеза плоских сечений:

$$\varepsilon^\pm_x = a^\pm y + b^\pm$$

$$\int_{0}^{h} \sigma_x^+ dy + \int_{h}^{h} \sigma_x^- dy = H\sigma_0$$
$$\int_{0}^{h} \sigma_x^+ y \, dy + \int_{h}^{h} \sigma_x^- y \, dy = \frac{H^2\sigma_0}{2}$$

Плоский фронт реакции в свободной пластине в случае вязкого превращенного материала

$$\begin{split} \dot{q}y + \dot{r} + \frac{3k^{+}}{4\eta}(q \ y + r) &= \frac{3k^{+}}{2}(\dot{a}(y - h) - a\dot{h}) \\ \dot{\vartheta^{+}} + \frac{3k^{+}}{4\eta}(\vartheta^{+} - \vartheta^{tr}) &= \frac{3}{2}(\dot{a}(y - h) - a\dot{h}) \\ \alpha\left(\frac{aH^{2}}{2} + \frac{ah^{2}}{2} - ahH\right) + \frac{qh^{2}}{4} + \frac{rh}{2} + \eta\left(-\frac{\dot{a}h^{2}}{2} - ah\dot{h}\right) = H\sigma_{0} \\ \alpha\left(\frac{aH^{3}}{3} + \frac{ah^{3}}{6} - \frac{ahH^{2}}{2}\right) + \frac{qh^{3}}{6} + \frac{rh^{2}}{4} + \eta\left(-\frac{\dot{a}h^{3}}{6} - \frac{ah^{2}\dot{h}}{2}\right) = \frac{H^{2}\sigma_{0}}{2} \\ \dot{h} = \frac{n_{-}M_{-}}{\rho_{-}} \cdot \frac{k_{*}c_{*}n_{*}}{1 + n_{*}^{2}k_{*}\left(\frac{\dot{h}}{D} + \frac{1}{\alpha}\right)} \left(1 - \exp\left(-\frac{n_{-}M_{-}}{\rho_{-}n_{*}RT}\left(\gamma - \frac{k^{+}}{2}(\vartheta^{+} - \vartheta^{tr})^{2}\right)\right)\right) \end{split}$$

Зависимость кинетики фронта химической реакции от типа граничных условий



Релаксация напряжений позади фронта реакции в свободной пластине



Зависимость кинетики фронта химической реакции от внешнего напряжения σ_0 и от коэффициента вязкости η



Распространение сферического фронта химической реакции в случае вязко-упругого превращенного материала. Модель Кельвина-Фойгта.

$$\sigma = \sigma E + S; \quad \varepsilon = \frac{\vartheta}{\vartheta} E + e$$

$$\sigma^{+} = k^{+} (\vartheta^{+} - \vartheta^{t \vartheta})$$

$$\sigma^{-} = k^{-} \vartheta^{-}$$

$$S^{+} = 2\eta e^{+} + 2\mu^{+} e^{+}$$

$$S^{-} = 2\mu^{-} e^{-}$$



Υ.

Нормальная компонента тензора химического сродства:

$$A_{NN} = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \left(\gamma + \frac{9}{2} k^- (A^-)^2 - \frac{k^+}{2} (3A^+ - \vartheta^{tr})^2 - 24\mu^+ \left(\frac{B^+}{a^3}\right)^2 + 9k^- A^- (A^+ - A^-) \right) + n_* RT \ln \frac{c}{c_*}$$

Радиальная скорость фронта химической реакции:

$$\begin{split} \dot{\xi} &= \frac{n_- M_-}{\rho_-} \cdot \frac{k_* n_* c_*}{1 + n_*^2 k_* \left(\frac{1 - \xi}{\alpha} + \frac{\xi}{D}\right) (1 - \xi)} \left(1 - exp \left(-\frac{n_- M_-}{\rho_- RT n_*} \left(\gamma + \frac{9}{2} k^- (A^-)^2 - \frac{k^+}{2} (3A^+ - \vartheta^{tr})^2 - 24\mu^+ \left(\frac{B^+}{a^3}\right)^2 + 9k^- A^- (A^+ - A^-) \right) \right) \right) \end{split}$$

Зависимость кинетики фронта химической реакции от величины внешнего напряжения и от энергетического параметра γ



$$1 - \sigma_0 = 10 Pa$$

$$2 - \sigma_0 = 0 Pa$$

$$3 - \sigma_0 = -10 Pa$$

 $1 - \gamma = 10^{10} \\ 2 - \gamma = 10^{8} \\ 3 - \gamma = 10^{7}$

Зависимость кинетики фронта химической реакции от величины коэффициента вязкости

