

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Кафедра «Механика и процессы управления»

Диссертация допущена к защите  
Зав. кафедрой

\_\_\_\_\_ Д.А. Индейцев

" " \_\_\_\_\_

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
**на соискание степени МАГИСТРА**

**Тема: Термомеханическая контактная задача с учетом трения**

Направление: 15.04.03 "Прикладная механика"

Магистерская программа: "Механика сплошных сред: теоретические основы и приложения"

Выполнил студент гр.63602/4

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Н.А. Хайлов

Руководитель, к.т.н., доц.

\_\_\_\_\_  
(подпись)

Д.В. Шевченко

Санкт-Петербург  
2017

# Содержание

Введение.....	1
Глава 1. Термомеханика и контакт с трением. Основные сведения о системе торможения автомобиля .....	5
1.1. Термомеханика. История развития и базовая концепция.....	5
1.2. Контакт с трением.....	6
1.3. Система торможения автомобиля .....	7
1.4. Тормозной диск.....	8
1.5. Основные неисправности, связанные с тормозным диском.....	10
Глава 2. Метод конечных элементов. Модельные задачи .....	14
2.1. Метод конечных элементов .....	14
2.2. Метод множителей Лагранжа.....	22
2.3. Сжатие упругого слоя.....	27
2.4. Нагрев стержня, расположенного между двумя стенками.....	36
Глава 3. Моделирование термомеханической контактной задачи с учетом трения .....	38
3.1. Определяющие уравнения .....	38
3.2. Контактная задача для тормозного диска.....	41
Заключение .....	46
Список литературы .....	47

# Введение

Данная работа посвящена моделированию контактной задачи с учетом трения. Контактная задача с учетом трения имеет большой спектр применения на практике. Большинство тормозных систем реализованы с помощью силы трения, например, основная часть тормозной системы автомобиля представляет из себя тормозную колодку, трущуюся о тормозной диск, тем самым замедляющую транспортное средство. В настоящее время в большинстве случаев для моделирования подобных задач используется метод конечных элементов. С помощью стандартных конечно-элементных пакетов можно без труда решить задачу механики твердого тела для стандартных материалов, которые предоставляет данное программное обеспечение. Однако с развитием технологий для изготовления различных тормозных систем используются все более сложные материалы с нестандартными нелинейными зависимостями напряжений от деформаций.

Целью данной работы является вывод определяющих уравнений для контактной задачи с учетом трения. Для достижения заданной цели необходимо составить уравнения движения, закон сохранения энергии, граничные и начальные условия, ограничения, которые накладываются на тела из-за контакта. Также требуется произвести сравнение аналитических решений и решений, полученных с помощью метода конечных элементов, для модельных задач. Далее необходимо продемонстрировать решение термомеханической задачи с использованием полученного метода для конкретного материала.

Первая глава содержит краткое описание основ термомеханики и контакта с трением. Рассмотрена тормозная система автомобиля, в частности – тормозной диск. Приведены основные виды повреждений тормозного диска при эксплуатации.

Во второй главе работы представлен обзор метода конечных элементов, в частности, метод множителей Лагранжа. Рассматриваются модельные задачи.

В третьей части представлен вывод общих уравнений термомеханической контактной задачи, а также продемонстрировано конечно-элементное решение задачи о контакте тормозного диска с колодкой.

Список литературы содержит список статей, которые использовались для ознакомления с темой, список учебных пособий для описания метода конечных элементов, а также для различных аспектов механики твердого тела.

# Глава 1. Термомеханика и контакт с трением.

## Основные сведения о системе торможения автомобиля

### 1.1. Термомеханика. История развития и базовая концепция

Термомеханика, как следует из названия, является разделом механики деформируемого твердого тела, в котором помимо силовых нагрузок присутствуют также термические возмущения, которые могут приводить к изменению напряженно-деформированного состояния системы. Тепловые напряжения могут привести к развитию трещин у хрупких материалов, возникновению пластических трансформаций, изменению физических свойств материалов.

Термодинамическая система характеризуется конечным числом независимых переменных, т.н. термодинамических параметров, например, давлением, температурой, градиентом температуры и др. Связь между механическими деформациями и термодинамическими параметрами устанавливается законами термодинамики. При этом важной особенностью задач термомеханики является *необратимость* термических деформаций, обусловленная градиентом температуры. В рамках термомеханики можно также выделить отдельные теории на основании выбора определяющих соотношений для материала. Одной из таких теорий является термоупругость, в рамках которой для механической системы используются основные соотношения теории упругости. Первые работы по термомеханике, а в частности по термоупругости, были опубликованы У.Т. Кельвином во второй половине XIX века. Также во второй четверти XX века задачами термомеханики занимался английский ученый Д. И. Тейлор.

Обширный спектр термодинамических задач и проблем, возникающих на практике, привел к быстрому развитию теории термомеханики. К

термомеханическим задачам, например, относятся задачи, возникающие при разработке ядерных реакторов, различных типов турбин, а также при моделировании самолетов, то есть те задачи, в которых возникают дополнительные источники тепла и, как следствие, неравномерный нагрев.

Одной из характерных задач термомеханики является задача о торможении. В данной задаче из-за контакта с трением выделяется большое количество тепла, которое влияет на напряженно-деформированное состояние.

## 1.2. Контакт с трением

Самый древний способ добычи огня позволяет утверждать, что с давних времен люди догадывались, что при трении выделяется тепло. Даже сегодня один из распространенных способов разжечь огонь – с помощью спичек – основан на этом принципе. В XVII веке физик Джованни Бальяни продемонстрировал, что тепла, выделяемого при трении двух металлов, достаточно, чтобы вскипятить воду. Однако, до XVIII-ого века некоторые ученые полагали, что нагрев тел при трении происходит из-за *теплорода* – некоторого вещества, которое может проникать в другое для нагрева, а также способствовать переходу в другое агрегатное состояние. И хотя еще в 1493 году Леонардо да Винчи записал некоторые классические законы трения скольжения в своих дневниках, они не были опубликованы до 2016 года. Поэтому в 1699 году французский физик Гийом Амонтон открыл их снова, представив характер трения в терминах шероховатостей поверхностей. Дальше эту идею развили Бернард Форест де Белидор и Леонард Эйлер, который вычислил угол естественного откоса и впервые разделил статическое и кинетическое трение. Другое объяснение было дано Джоном Теофилом Десагульерсом, который с помощью двух свинцовых шаров продемонстрировал сильные силы сцепления. Дальнейшее исследование трения связано с именем Шарля-Августина де Кулона, который изучил

влияние на трение таких факторов, как характер материалов при контакте, величина пятна контакта, нормальное давление и время, в течение которого поверхности находятся в контакте. Позже Артур Жюль Морин разработал концепцию скользящего трения, а Осборн Рейнольдс получил уравнения вязкого трения.

Основные принципы и идеи термомеханики можно сформулировать следующим образом. Согласно закону сохранения энергии, энергия не исчезает во время трения. При этом возникают ситуации, когда кинетическая энергия уменьшается, а потенциальная не увеличивается; это объясняется переходом кинетической энергии в тепловую. Теплота распространяется в поверхностном слое трущейся пары (от пятен контакта) в глубь контактирующих тел в виде температурных волн, амплитуда которых с увеличением глубины уменьшается. Чем выше скорость скольжения, тем на меньшую глубину распространяются температурные волны. Вместе с тем при возрастании шага неровностей на трущейся поверхности глубина распространения температурных волн в поверхностном слое увеличивается.

### **1.3. Система торможения автомобиля**

В автомобиле в качестве тормоза применяется дисковый тормозной диск. Дисковый тормозной механизм состоит из вращающегося тормозного диска и двух неподвижных колодок, установленных внутри суппорта с обеих сторон. Суппорт закреплен на кронштейне. В пазах суппорта установлены рабочие цилиндры, которые при торможении прижимают тормозные колодки к диску. Охлаждение тормозного диска осуществляется потоком воздуха. Тормозные диски в настоящее время производятся из различных материалов. Например, для повышения эффективности торможения и обеспечения стойкости к перегреву на спортивных автомобилях применяются керамические тормозные диски. Тормозные колодки прижимаются к суппорту пружинными

элементами. К колодкам прикреплены фрикционные накладки. На современных автомобилях тормозные колодки оснащаются датчиком износа.

Тормозной привод обеспечивает управление тормозными механизмами. В тормозных системах автомобилей применяются следующие типы тормозных приводов: механический, гидравлический, пневматический, электрический и комбинированный. Механический привод используется в стояночной тормозной системе. Механический привод представляет собой систему тяг, рычагов и тросов, соединяющую рычаг стояночного тормоза с тормозными механизмами задних колес. Он включает рычаг привода, тросы с регулируемыми наконечниками, уравнитель тросов и рычаги привода колодок. На некоторых моделях автомобилей стояночная система приводится в действие от ножной педали (т.н. стояночный тормоз с ножным приводом). В последнее время в стояночной системе широко используется электропривод, а само устройство называется электромеханическим стояночным тормозом. Пневматический привод используется в тормозной системе грузовых автомобилей.

#### **1.4. Тормозной диск**

Основной частью системы торможения, подверженной термомеханическим деформациям является тормозной диск. Он состоит из двух основных частей – центральной части и ротора. Тормозные колодки во время торможения приходят в контакт с ротором, который крепится к центральной части диска. Она в свою очередь соединяется со ступицей колеса и препятствует распространению тепла от зоны контакта до колесных подшипников.

Обычно ротор изготавливается из чугуна из-за высокого коэффициента трения и низкого износа материала. В свою очередь центральная часть диска производится из чугуна или более легких материалов, например, из алюминия.



По конструкции различают два вида центральной части диска: спаянная с ротором и в виде отдельной детали. В основном центральные части производятся из чугуна и неотделимы от ротора (рис. 1.1).



Рисунок 1.1 - Чугунный тормозной диск

Однако в гоночных моделях автомобилей центральная часть диска является отдельной деталью и изготавливается обычно из алюминиевых и титановых сплавов, композитных материалов или керамики (рис. 1.2).



Рисунок 1.2 - Керамический тормозной диск

Чтобы улучшить охлаждение, диски, как было упомянуто выше, делают вентилируемыми. Вентилируемые диски между двумя поверхностями ротора содержат радиальные полости, по которым циркулируют потоки воздуха от центра к краям (рис. 1.3). Благодаря активной циркуляции внутри диска холодный воздух охлаждает нагревающуюся часть тормозного диска.



Рисунок 1.3 - Вентилируемый тормозной диск

## 1.5. Основные неисправности, связанные с тормозным диском

Основной причиной неисправностей тормозных дисков является естественный износ рабочей поверхности из-за трения колодки о диск. Колодка изнашивается быстрее, диск – медленнее. Этот процесс может развиваться с разной скоростью в зависимости от стиля вождения. На рис. 1.4 приведены типовые примеры изнашивания диска: цифрой 1 отмечен случай, соответствующий равномерной деформации диска, 2 - неравномерной толщине по окружности, 3 - образование «буртиков».

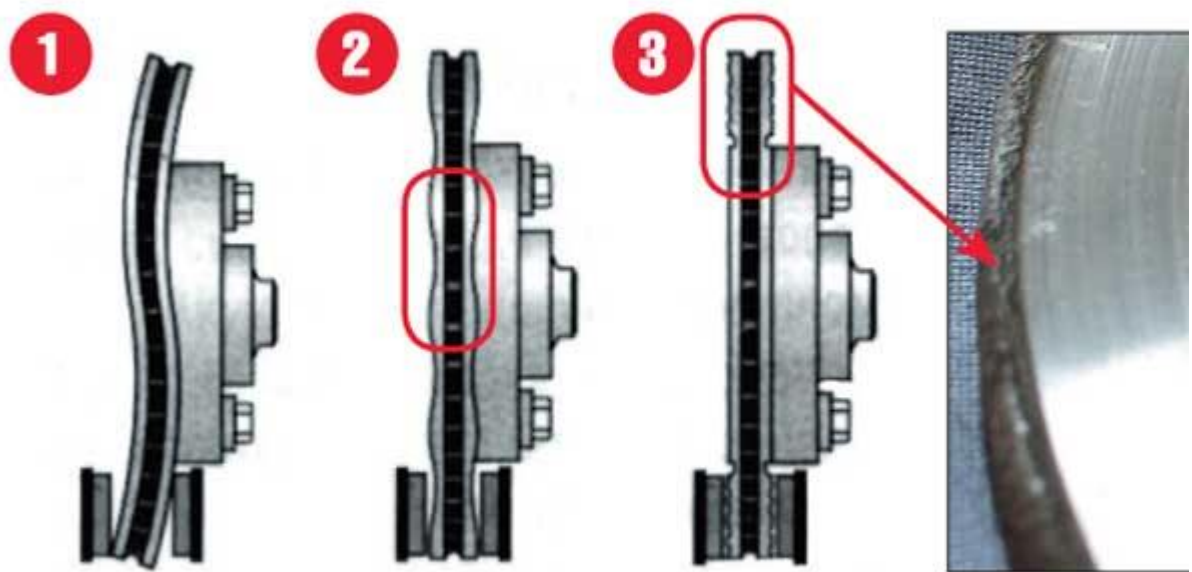


Рисунок 1.4 - Изнашивание тормозного диска

Причиной ускоренного износа диска могут быть тормозные колодки с некачественными накладками, например, изготовленными из смеси с большим количеством твердых включений и т.п. На рис. 1.5 показаны отличия тормозного диска после торможения стандартной колодкой и после торможения колодкой с металлическим основанием.



Рисунок 1.5 - Торможение некачественными колодками

При перегреве фрикционной накладки и самих дисков возможно изменение их структуры, которое ведет к образованию пленки или налета на поверхности диска (рис. 1.6). В этом случае фрикционный слой начинает скользить по диску, и надеяться на эффективное торможение невозможно. Это приводит к частичному отказу тормозов, потере возможности полноценно управлять машиной и, вполне возможно, к ДТП.



Рисунок 1.6 - Налет на тормозном диске

При езде с постоянными разгонами-торможениям, а также при мокром дорожном покрытии возможны деформации диска и даже появление микротрещин. Это происходит из-за резкого охлаждения диска: при торможении он может нагреваться до температуры 400–450°C. При деформации деталей в процессе торможения возникают вибрации, а микротрещины со временем могут увеличиться, что может привести к разрушению диска и даже заклиниванию тормозного механизма. Из-за попадания грязи в зазор между трущимися поверхностями, а также крупных включений в накладке колодки на диске появляются канавки. После установки новых колодок в систему с таким диском они прирабатываются дольше.

Причинами сильного нагрева тормозного диска могут стать:

- Сильно выработанные диски и колодки;
- Неравномерный износ поверхности диска;
- Некачественные колодки;
- Деформация самого диска.

При проектировании тормозного диска важно учитывать материал, из которого изготавливается диск, его геометрию, а также назначение автомобиля, для которого изготавливается диск.

## Глава 2. Метод конечных элементов. Модельные задачи

### 2.1. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) — численный метод решения задач прикладной механики.

Основой метода конечных элементов можно считать матричные методы строительной механики. Основной трудностью, связанной с использованием данного метода, было слишком большое количество алгебраических уравнений, которые необходимо было решить. Приблизительно к 1920 г. благодаря усилиям Мэйни и Остенфельда были сформулированы идеи численного решения рамных и фермовых конструкций. В 1932 г. Харди Кросс предложил метод моментных распределений, который позволил численно рассчитывать гораздо более сложные конструкции. Вычислительные машины появились в 50-х годах и, хотя значимость вычислительной техники была не столь очевидна, некоторые ученые предприняли попытки сформулировать в матричной форме алгоритмы расчета фермовых конструкций. Начиная с середины 50-х годов МКЭ прошел через несколько непрерывных модификаций. Были выписаны конечно-элементные соотношения для твердого деформируемого тела, изгибаемых пластин, тонких оболочек и других конструктивных форм. После статического поведения линейно-упругого материала было исследовано динамическое, а также геометрическая и физическая нелинейность. После этих исследований ученые начали интенсивно развивать вычислительные программы с целью обеспечить возможность применения данного метода.

Существенный толчок МКЭ получил в 1963 году после того, как было показано, что метод конечных элементов можно рассматривать как один из вариантов распространённого в строительной механике метода Рэлея-Ритца,

который путём минимизации потенциальной энергии сводит задачу к системе линейных уравнений равновесия. После этого МКЭ стал применяться к задачам, описываемым уравнениями Лапласа или Пуассона. Далее область применения метода была расширена, когда в 1968 году было установлено, что уравнения, определяющие решение на элементах, могут быть легко получены с помощью вариантов метода взвешенных невязок, таких как метод Галёркина или метод наименьших квадратов. Это сыграло важную роль в теоретическом обосновании МКЭ, так как позволило применять его при решении многих типов дифференциальных уравнений. Таким образом метод конечных элементов превратился в общий метод численного решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. С развитием вычислительных средств возможности метода постоянно расширяются, как расширяется и класс решаемых задач. Практически все современные расчёты на прочность проводят с помощью метода конечных элементов.

Для задач теории упругости метод конечных элементов является наиболее популярным методом решения. Квазистатическая задача теории упругости в перемещениях для гетерогенной анизотропной среды заключается в решении трех дифференциальных уравнений равновесия относительно компонентов вектора перемещения:

$$\nabla \cdot ({}^4C(r) \cdot \nabla u) + f_v = 0,$$

где  $\mathbf{r} = x_k \mathbf{e}_k = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$  – вектор-радиус рассматриваемой точки;

$\mathbf{u} = u_k \mathbf{e}_k$  – вектор перемещения;

$\nabla = \mathbf{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  – набла-оператор Гамильтона;

${}^4C(r) = C_{ijkl} e_i e_j e_k e_l$  – тензор упругих модулей, тензор 4-го ранга;

$\mathbf{f}_v = f_{vk} \mathbf{e}_k$  – вектор объемных сил;

символ "·" обозначает операцию свертки.

К системе уравнений равновесия, определяющих поведение тела в точках его объема  $V$ , добавляются условия на ограничивающей его поверхности  $S$ :

– кинематические граничные условия:

$$\mathbf{u}|_S = \mathbf{u}|_S(\mathbf{r}),$$

где  $\mathbf{u}_S = u_{sk} \mathbf{e}_k$  – заданный на границе вектор перемещения;

– статические граничные условия

$$\mathbf{n} \cdot ({}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot \nabla \mathbf{u})|_S = \mathbf{f}_S,$$

где  $\mathbf{f}_S = f_{sk} \mathbf{e}_k$  – заданный на границе вектор поверхностной нагрузки,

$\mathbf{n} = n_k \mathbf{e}_k$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела;

смешанные граничные условия.

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{u}_S(\mathbf{r}),$$

$$\mathbf{n} \cdot ({}^4\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u})|_{S_2} = \mathbf{f}_S,$$

$$S = S_1 \cup S_2.$$

Возможны также и комбинированные граничные условия, когда из трех равенств, которые должны быть заданы в каждой точке поверхности S, одно (два) формулируются в перемещениях, а два (одно) – в силах.

В случае малых деформаций  $(|\nabla \mathbf{u}|) \ll 1$  тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  выражается через вектор перемещения с помощью соотношений Коши:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \boldsymbol{\varepsilon}^T = (\nabla \mathbf{u})^S = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

где  $(\dots)^T$  – операция транспонирования,

$(\dots)^S$  – операция симметрирования,

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ ,  $\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$ ,  $\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$  – относительные деформации,

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  – сдвиговые деформации.

Определяющие соотношения для линейной гетерогенной анизотропной упругой среды записываются в следующем виде:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = {}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = C_{ijmn} \varepsilon_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$  – тензор напряжений,

$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$  – нормальные напряжения,

$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$  – касательные напряжения,

${}^4\mathbf{C}(\mathbf{r})$  – тензор упругих модулей, тензор 4-го ранга;



$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = S_{ijmn} \sigma_{nm} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

где  ${}^4\mathbf{S}(\mathbf{r})$  – тензор упругих податливостей, тензор 4-го ранга.

Последние соотношения представляют собой взаимно-обратные формулировки обобщенного закона Гука. При этом  ${}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot {}^4\mathbf{S}(\mathbf{r}) = {}^4\mathbf{E}$  – единичный тензор;  $W(\boldsymbol{\varepsilon}) = W(\boldsymbol{\sigma})$  – упругий потенциал или удельная потенциальная энергия деформации линейно-упругого тела:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot {}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot {}^4\mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = W(\boldsymbol{\sigma}).$$

Рассмотрим тело  $V$ , которое находится в равновесии под действием объемных сил  $\mathbf{f}_v$ , поверхностных сил  $\mathbf{f}_s$  и перемещений  $\mathbf{u}_s$ , заданных на поверхности  $S$ . В теле возникают поля перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ , деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r})$  и напряжений  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r})$ .

Пусть перемещения тела в его равновесном состоянии получили малые приращения  $\delta\mathbf{u}$ , совместимые с геометрическими и кинематическими связями, наложенными на тело:

$$\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{u}_s \Rightarrow \delta\mathbf{u}|_{S_1} = \mathbf{0}.$$

Такие дополнительные перемещения называют возможными

Сформулируем принцип возможных перемещений.

Для тела, находящегося в положении равновесия, работа внешних сил на возможных перемещениях равна вариации потенциальной энергии деформации:

$$\int_V \mathbf{f}_v \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_V \mathbf{f}_s \cdot \delta\mathbf{u} dS = \delta U.$$

Вариация потенциальной энергии деформации равна работе напряжений на соответствующих возможных деформациях:

$$\delta U = \delta \int_V W(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \delta W(\boldsymbol{\varepsilon}) dV = \int_V \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} dV.$$

Из принципа возможных перемещений можно получить дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_v &= 0, & \mathbf{r} \in V, \\ \mathbf{n}|_{S_2} &= \mathbf{f}_s, & \mathbf{r} \in S_2.\end{aligned}$$

Пусть в области  $V$  требуется определить вектор-функцию  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Основная идея МКЭ состоит в построении дискретных конечно-элементных моделей области и непрерывной функции решения. Построение КЭ-модели области заключается в аппроксимации области  $V$  конечным числом непересекающихся подобластей, называемых конечными элементами и имеющих общие узловые точки. Построение КЭ-модели функции состоит в интерполяции вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  на каждом построенном КЭ полиномом, который определяется с помощью узловых значений искомой вектор-функции  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ .

Область  $V$  представляется в виде совокупности конечных элементов  $V^{(e)}$ ,  $e = \overline{1, n_e}$ ; где  $n_e$  – общее число КЭ. Конечные элементы имеют общие узловые точки, каждая из которых имеет номер  $J$ ,  $J = \overline{1, n_p}$ ,  $n_p$  – общее число узловых точек (узлов). КЭ-модель области характеризуется глобальным вектором координат узлов  $\mathbf{X} = \{\dots, X_J, \dots\}_{J=\overline{1, n_p}}^T$ .

Вектор координат узлов конечных элементов  $\mathbf{X}^{(e)}$  формируется из глобального вектора  $\mathbf{X}$  при помощи матрицы инциденций  $\mathbf{a}_f^{(e)}$ :

$$\mathbf{X}^{(e)} = \{\dots, X^e, \dots\}_{i=\overline{1, n_p}}^T = \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{X}.$$

Выбор типа, формы элемента и числа его узловых точек зависит от характера рассматриваемой задачи и от точности, которую требуется обеспечить.

В качестве основных неизвестных, называемых степенями свободы, в МКЭ принимаются узловые значения искомой функции и, если это

необходимо, ее производных. Введем в рассмотрение глобальный вектор узловых неизвестных всей конструкции

$$\mathbf{U} = (\dots, U_J, \dots)_{J=\overline{1, n_p}}^T$$

и локальный (элементный) вектор узловых неизвестных  $\mathbf{u}^{(e)}$ , который формируется из глобального вектора узловых неизвестных  $\mathbf{U}$  при помощи матрицы инциденций  $\mathbf{a}_f^{(e)}$ :

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{U}.$$

В случае трехмерного элемента вектор неизвестных состоит из трех компонент перемещений вдоль трех осей, в случае оболочечного или стержневого элемента он дополняется еще тремя компонентами поворота относительно каждой оси:

$$\mathbf{u}^{(e)} = (u^1, u^2, u^3)^T \text{ – в случае трехмерных элементов;}$$

$\mathbf{u}^{(e)} = (u^1, u^2, u^3, \theta^1, \theta^2, \theta^3)^T$  – в случае оболочечного или стержневого элемента.

После выбора узловых неизвестных строится интерполяционный полином, которым закон изменения искомой функции в пределах КЭ выражается через значения его узловых неизвестных. Если в качестве степеней свободы КЭ выбираются только узловые значения самой функции, то элемент называют *лагранжевым*; если используются и производные по координатам, то соответствующий КЭ называют *эрмитовым*.

В произвольной точке КЭ ( $e$ ) с вектор-радиусом  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$  определим значение функции так:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{f^{(e)}} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{f^{(e)}} \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{U},$$

где  $\mathbf{x} = \mathbf{N}^{g^{(e)}} \mathbf{x}^{(e)} = \mathbf{N}^{g^{(e)}} \mathbf{a}_g^{(e)} \mathbf{X}$ ,

$\mathbf{N}^{f^{(e)}}$  – матрица интерполяционных полиномов,

$\mathbf{N}^{g^{(e)}}$  – матрица аппроксимирующих функций (функций формы).

На основе тензора малых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^S$  определим вектор деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)},$$

где  $\mathbf{B}^{(e)}$  – матрица градиентов на элементе  $(e)$ .

Обобщив соотношения Дюамеля-Неймана  $\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C}(\mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha}\Delta T)$ , определим вектор напряжений:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0,$$

где  $\mathbf{D}^{(e)}$  – матрица упругости,

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$  – вектор начальных деформаций (температурных деформаций),

$\boldsymbol{\sigma}_0$  – вектор начальных напряжений.

Запишем принцип возможных перемещений в матричной форме:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_v dV + \int_{S_2} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_s dS,$$

где  $\mathbf{f}_v$  – вектор объемных сил,

$\mathbf{f}_s$  – вектор поверхностных сил.

Подставив в принцип возможных перемещений следующие соотношения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^{f^{(e)}} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{N}^{f^{(e)}} \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{U},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{U},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^{(e)}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) + \boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{D}^{(e)} \left( \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{a}_f^{(e)} \mathbf{U} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \right) + \boldsymbol{\sigma}_0,$$

и воспользовавшись свойством аддитивности:

$$\int_V (\dots) dV = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{V^{(e)}} (\dots) dV,$$

получим выражение:

$$\delta \mathbf{U}^T \left( \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{a}_f^{(e)T} \int_{V^{(e)}} \left( \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} \mathbf{U} \right) dV \mathbf{a}_f^{(e)T} \right) \mathbf{U} =$$

$$= \delta U^T \left( \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{a}_f^{(e)T} \left( \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{f^{(e)T}} \mathbf{f}_v dV + \int_{S_2^{(e)}} \mathbf{N}^{f^{(e)T}} \mathbf{f}_S dS + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}_0 dV + \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)} \boldsymbol{\sigma}_0 dV \right) \right).$$

Вследствие произвольности  $\delta U$  в объеме  $V$  и на той части поверхности  $S_2$ , где перемещения не заданы, можем записать:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

где  $\mathbf{K}$  – глобальная матрица жесткости:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{a}_f^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{a}_f^{(e)},$$

$\mathbf{k}^{(e)}$  – матрица жесткости элемента ( $e$ ):

$$\mathbf{k}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \mathbf{B}^{(e)} dV,$$

$\mathbf{F}$  – глобальный вектор узловых сил:

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{a}_f^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{a}_f^{(e)T} (\mathbf{f}_v^{(e)} + \mathbf{f}_S^{(e)} + \mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(e)} + \mathbf{f}_{\sigma_0}^{(e)}),$$

$\mathbf{f}_v^{(e)}$  – вектор узловых сил элемента ( $e$ ), статически эквивалентный действующим на тело объемным силам  $\mathbf{f}_v$ :

$$\mathbf{f}_v^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{N}^{f^{(e)T}} \mathbf{f}_v dV,$$

$\mathbf{f}_S^{(e)}$  – вектор узловых сил элемента ( $e$ ), статически эквивалентный действующим на тело поверхностным силам  $\mathbf{f}_S$ :

$$\mathbf{f}_S^{(e)} = \int_{S_2^{(e)}} \mathbf{N}^{f^{(e)T}} \mathbf{f}_S dV,$$

$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(e)}$  – вектор узловых сил элемента ( $e$ ), статически эквивалентный полям начальных деформаций  $\varepsilon_0$ :

$$\mathbf{f}_{\varepsilon_0}^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \varepsilon_0 dV,$$

$\mathbf{f}_{\sigma_0}^{(e)}$  – вектор узловых сил элемента ( $e$ ), статически эквивалентный полям начальных напряжений  $\sigma_0$ :

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^{(e)} = - \int_{V^{(e)}} \mathbf{B}^{(e)T} \mathbf{D}^{(e)} \sigma_0 dV.$$

На основе вычисленных элементных матриц жесткости  $\mathbf{k}^{(e)}$  ( $e = \overline{1, n_e}$ ) и векторов нагрузки  $\mathbf{f}^{(e)}$  ( $e = \overline{1, n_e}$ ) при помощи матрицы кинематических связей  $\mathbf{a}_f^{(e)}$  производится *ансамблирование*, т.е. формируется глобальная матрица жесткости  $\mathbf{K}$  всей конструкции (ансамбля конечных элементов) и глобальный вектор внешней нагрузки  $\mathbf{F}$ .

## 2.2. Метод множителей Лагранжа

Для решения задач с ограничениям, например, контактных задач, используется метод множителей Лагранжа. Рассмотрим применение метода к задаче о контакте двух тел. Пусть имеются два тела  $B_1$  и  $B_2$ , которые в результате приложенных нагрузок вступают в механический контакт (рис. 2.1).



Рисунок 2.1 - Контакт двух тел

На контактной поверхности  $\Gamma_C$  должны быть выполнены условия непроникания одного тела в другое:

$$g^\alpha = \min_{x^\beta \in \Gamma^\beta} (\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta) \cdot \mathbf{n}^\alpha \geq 0, \quad \mathbf{x}^\alpha \in \Gamma^\alpha,$$

где  $\alpha, \beta$  – индексы контактирующих тел,  
 $\Gamma^\alpha$  – поверхность тела  $B_\alpha$ , обращенная к  $B_\beta$ ,  
 $\Gamma^\beta$  – поверхность тела  $B_\beta$ , обращенная к  $B_\alpha$ ,  
 $g^\alpha$  – зазор между точкой  $\mathbf{x}^\alpha$  и телом  $B_\beta$ .

Контакт возникает тогда, когда хотя бы для одной точки тела  $B_\alpha$  зазор равен нулю. Если же для всех точек  $B_\alpha$  зазор положителен, то тела не находятся в контакте.

В случае контакта на совместной границе контактирующих тел возникают распределенные поверхностные силы, обозначаемые  $\mathbf{t}$ . Нормальная и касательная составляющие распределенной контактной силы, действующей на любой из тел, имеют вид:

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} \leq 0,$$

$$t_t = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к контактной поверхности данного тела,  
 $\boldsymbol{\tau}$  – касательный вектор к контактной поверхности тела.

Нестрогое неравенство обращается в равенство при выходе тел из контакта и в строгое неравенство – при нахождении в контакте. Из этого следует, что нормальные контактные силы могут быть только сжимающими. Касательные контактные силы могут принимать любые значения.

На контактной поверхности могут быть поставлены условия одного и следующих типов:

- Скольжение без трения. В случае, если на контактной поверхности реализуется условие скольжения без трения, касательные контактные силы принимаются равными нулю:

$$t_t = 0.$$

- Прилипание. Если на контактной поверхности имеет место прилипание, то касательные контактные силы не зависят от нормальных контактных сил, но и не равны нулю.
- Трение. Касательные контактные силы подчиняются закону Кулона, т.е. контактирующие тела неподвижны друг относительно друга до тех пор, пока выполняется неравенство:

$$|t_t| \leq \mu_s |t_n|,$$

где  $\mu_s > 0$  – статический коэффициент трения.

При нарушении неравенства тела начинают движение друг относительно друга. Тогда касательные контактные силы подчиняются неравенству:

$$|t_t| \leq \mu_d |t_n|,$$

где  $\mu_d$  – динамический коэффициент трения,  $\mu_d \leq \mu_s$ .

Движение будет продолжаться, пока не будет выполнено неравенство:

$$|t_t| < \mu_d |t_n|,$$

и не начнется снова до тех пор, пока вновь не нарушится неравенство.

При численном решении в данной работе контактные условия учитываются с помощью метода множителей Лагранжа.

Согласно методу множителей Лагранжа к потенциальной энергии системы двух тел, входящих в контакт, добавляется потенциал контактных сил вида

$$W_c = - \int_{\Gamma_c} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)}) d\Gamma,$$

где  $\Gamma_c$  – поверхность контакта между телами  $B_1$  и  $B_2$ ,

$\Lambda$  – функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил,

$x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$  – актуальные положения соответствующих сходственных точек тел  $i = 1, 2$  на поверхности контакта,



$X^{(i)}$  – исходные положения сходственных точек,

$u^{(i)}$  – получаемые перемещения сходственных точек.

Применим в этом случае метод минимизации потенциальной энергии:

$$\delta\Pi = \int_B \delta\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \delta\{u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \delta\Lambda \cdot (u^{(1)} - u^{(2)}) d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_c} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0.$$

Так как  $u$  и  $\Lambda$  независимы, получается система уравнений вида

$$\begin{cases} \int_B \delta\{\varepsilon\}^T [H] \{\varepsilon\} dS - \int_{\Gamma} \delta\{u\}^T \{t\} d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma = 0, \\ \int_{\Gamma_c} \delta\Lambda \cdot ((X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)})) d\Gamma. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла необходимо его дискретизировать. При этом дискретизируется и непрерывная функция  $\Lambda$ . В таком случае в систему добавляются новые неизвестные.

Взятие интеграла осуществляется следующим образом. Одно из тел выбирается активным, другое – пассивным. Интегрирование производится по сегментам граничных элементов дискретизированного активного тела, вступивших в контакт, на них же выбираются квадратурные точки, затем строятся сходственные точки на пассивном теле. Тогда потенциал можно представить в следующем виде:

$$W_c = - \int_{\Gamma_c} \lambda^T \cdot (x^{(m)} - x^{(s)}) d\Gamma,$$

где  $x^{(m)}$  – актуальное положение сходственных точек на активном теле,

$x^{(s)}$  – актуальное положение сходственных точек на пассивном теле,

$\lambda$  – вектор дискретизированных множителей Лагранжа,

$\Gamma_c$  – контактная поверхность на активном теле.

В общем случае используется интерполяция

$$x^{(m)} = N_\alpha(\xi)\tilde{x}_\alpha^{(m)}(t),$$

$$x^{(s)} = N_\beta(\xi)\tilde{x}_\beta^{(s)}(t),$$

$$\lambda = N_c(\xi)\tilde{\lambda}_c(t),$$

где  $N_\alpha, N_\beta$  – функции формы, используемые в МКЭ для получения системы,  $N_c$  – функции формы для дискретизации множителя Лагранжа.

Рассмотрим составление системы уравнений при решении задачи с помощью метода конечных элементов с множителями Лагранжа.

Система уравнений МКЭ для двух деформируемых твердых тел, находящихся в контакте, примет вид:

$$\left( \begin{array}{cc|c} K_1 & 0 & L_1 \\ 0 & K_2 & \\ \hline & L_2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ G \end{pmatrix}$$

где  $K_1$  и  $K_2$  – матрицы жесткости, получаемые с помощью МКЭ для упругой деформации 1-го и 2-го тела соответственно,

$U_i = \{u_1^{(i)}, \dots, u_{N_i}^{(i)}\}^T$  – вектор узловых перемещений для  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ ,

$F_i = \{f_1^{(i)}, \dots, f_{N_i}^{(i)}\}^T$  – вектор внешних сил для  $i$ -го тела,  $i = 1, 2$ ,

$\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  – дискретизированные множители Лагранжа,

$G = \{g_1, \dots, g_m\}$  – разрывы, соответствующие парам контактных узлов,

$m$  – число контактных пар,

$L_1, L_2$  – добавочные блоки, соответствующие множителям Лагранжа.

Блок  $L_1$  заполняется при варьировании добавочного слагаемого относительно перемещений:

$$\{\lambda_n, \lambda_\tau\} \int_{\Gamma_c} (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)}) d\Gamma.$$

Добавочные слагаемые связывают уравнения для первого и второго тела между собой.

При добавлении множителей Лагранжа общее число неизвестных численной модели увеличивается. Для добавления необходимого количества уравнений в систему заполняются блоки  $L_2$  и  $G$ , коэффициенты которых получаются при варьировании добавочного слагаемого относительно множителей Лагранжа

$$\delta\{\lambda_n, \lambda_\tau\} \int_{\Gamma_c} \left( (X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)}) \right) d\Gamma.$$

В зависимости от условия на границе контакта блоки, соответствующие множителям Лагранжа, заполняются следующим образом:

- Скольжение без трения. В случае скольжения без трения при интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, вводятся два множителя Лагранжа, по одному на крайнюю точку сегмента ( $\lambda_\tau = 0$ ).
- Прилипание. При интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, вводятся четыре множителя Лагранжа, по два на крайнюю точку сегмента.
- Трение. При интегрировании каждого элемента активного тела, находящегося в контакте, в случае трения также как для прилипания вводятся четыре множителя Лагранжа, по два на крайнюю точку сегмента.

### 2.3. Сжатие упругого слоя

Рассмотрим модельную задачу о сжатии упругого слоя (см. рис. 2.2). Пусть к поверхностям слоям при  $x = \pm \frac{h}{2}$  мгновенно прикладываются нормальные сжимающие силы интенсивности  $p_0$ . Предполагая поверхности слоя теплоизолированными, определим приращение его температуры.

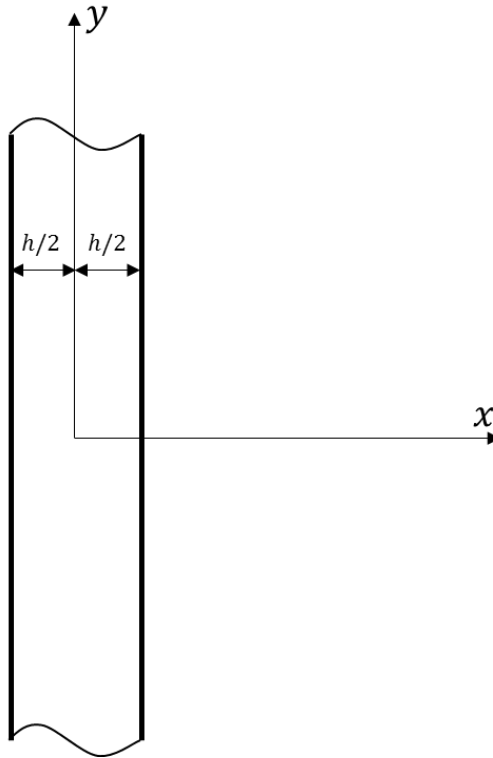


Рисунок 2.2 - Упругий слой

Напишем выражение для плотности свободной энергии и плотности термодинамического потенциала:

$$f = u - Ts, \quad (2.3.1)$$

где  $f$  – плотность свободной энергии,  
 $u$  – плотность внутренней энергии,  
 $s$  – плотность энтропии;

$$g = f - \sigma : \varepsilon, \quad (2.3.2)$$

где  $g$  – плотность термодинамического потенциала.

Найдем выражение полных дифференциалов для плотности внутренней энергии, плотности термодинамического потенциала и плотности свободной энергии с помощью первого закона термодинамики:

$$\dot{u} = \sigma : \dot{\varepsilon} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r, \quad (2.3.3)$$

где  $r$  – удельная мощность источников тепла.

$$\begin{aligned} du &= Tds + \sigma : d\varepsilon \\ dg &= -s dT - \varepsilon : d\sigma \\ df &= -s dT + \sigma : \varepsilon \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Из уравнений полных дифференциалов (2.3.4), а также неравенства Клаузиуса-Дюгема получаем следующие соотношения для величин:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= T; & \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\sigma}; \\ \frac{\partial f}{\partial T} &= -s; & \frac{\partial g}{\partial T} &= -s; \\ \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \boldsymbol{\sigma}; & \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= -\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Так как приращение температуры по сравнению с температурой не малая величина, разложим  $f$  в ряд Тейлора по степеням  $\boldsymbol{\varepsilon}$  с коэффициентами, зависящими от температуры:

$$f(J_1, J_2, T) = f(0, 0, T) + \frac{\partial f}{\partial J_1} J_1 + \frac{\partial f}{\partial J_2} J_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial J_1^2} J_1^2 \quad (2.3.6)$$

где  $J_1 = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $J_2 = \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}$  – инварианты тензора  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Учитывая, что

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T},$$

с помощью удельной теплоемкости при отсутствии деформаций:

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{\varepsilon} = 0) &= T \left. \frac{\partial s}{\partial T} \right|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0} = -T \frac{\partial^2 f}{\partial T^2}, \\ f &= - \int_{T_0}^T dT \int_0^T \frac{C|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}}{T} dT \end{aligned}$$

выразим напряжения через плотность свободной энергии, используя соотношения (2.3.4) и (2.3.5):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f}{\partial J_1} \mathbf{E} + 2 \frac{\partial f}{\partial J_2} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial^2 f}{\partial J_1^2} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \\ \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \left[ \text{tr } \boldsymbol{\sigma} - 3 \frac{\partial f}{\partial J_1} \right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial J_1^2} &= \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial J_2} = \mu. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Если  $\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 0$ , то деформации происходят только из-за свободного теплового расширения, тогда:

$$\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = 3 \int_{T_0}^T \bar{\alpha} dT = -\frac{3}{3\lambda + 2\mu} \frac{\partial f}{\partial J_1},$$

где  $\bar{\alpha}$  – коэффициент линейного теплового расширения.

Из этого уравнения можно получить соотношения:

$$\frac{\partial f}{\partial J_1} = -(3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0),$$

$$\alpha_T = \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \bar{\alpha} dT.$$

Подставляя найденные величины в разложение плотности свободной энергии в ряд Тейлора, получим окончательный вид  $f$ :

$$f = \frac{\lambda}{2} (tr \boldsymbol{\varepsilon})^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0) tr \boldsymbol{\varepsilon} - \int_{T_0}^T dT \int_0^T \frac{C|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}}{T} dT,$$

$$s = -\frac{1}{2} \frac{\partial \lambda}{\partial T} (tr \boldsymbol{\varepsilon})^2.$$

Далее из формулы (2.3.7) находим связь между напряжениями и деформациями:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \mu \boldsymbol{\varepsilon} + [\lambda tr \boldsymbol{\varepsilon} - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T (T - T_0)] \mathbf{E},$$

$$tr \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{tr \boldsymbol{\sigma}}{K} + 3 \alpha_T (T - T_0), \quad (2.3.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma}}{E} - \frac{\nu tr \boldsymbol{\varepsilon}}{E} \mathbf{E} + \alpha_T (T - T_0) \mathbf{E},$$

где  $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$ .

Используя получившиеся выражения для плотности свободной энергии, напряжений и деформаций, получаем плотность термодинамического потенциала:

$$g = -\frac{(1 + \nu) \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}}{E} + \frac{\nu tr^2 \boldsymbol{\sigma}}{2E} - \alpha_T (T - T_0) tr \boldsymbol{\sigma} -$$

$$-\frac{3E}{2(1 - 2\nu)} \alpha_T^2 (T - T_0)^2 - \int_{T_0}^T dT \int_0^T \frac{C|_{\boldsymbol{\varepsilon}=0}}{T} dT. \quad (2.3.9)$$

Теперь вернемся к задаче и рассмотрим полученные уравнения в полубесконечном полупространстве.

Поскольку в задаче рассматривается упругое полупространство, можно полагать:

$$\begin{aligned} u_y = u_z = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xz} = 0, \\ \varepsilon_x = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \sigma_x + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_T (T - T_0), \\ \sigma_y = \sigma_z = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x - \frac{1}{1-\nu} \alpha_T E (T - T_0). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Применяя допущения для упругого полупространства к закону сохранения импульса:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + F = \rho \frac{d^2 u}{dt^2},$$

получаем:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0.$$

После взятия производной по  $x$  и с учетом  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x$  получаем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя (2.3.7) в данное уравнение имеем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}{E(1-\nu)} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \rho \alpha_T \frac{\partial^2 (T - T_0)}{\partial t^2}. \quad (2.3.11)$$

Обозначая

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}{E(1-\nu)} = \frac{1}{c_1^2}$$

и учитывая, что  $C|_{\sigma=0} = T \frac{\partial s}{\partial T}|_{\sigma=0}$ ,  $s = -\frac{\partial g}{\partial T}$  находим связь между удельной теплоемкостью при отсутствии напряжений и удельной теплоемкостью при отсутствии деформаций:  $C|_{\sigma=0} = T \frac{\partial s}{\partial T}|_{\sigma=0} = -T \frac{\partial^2 s}{\partial T^2}|_{\sigma=0} = \frac{3}{2} T \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left( \frac{E}{1-2\nu} \alpha_T^2 (T - T_0)^2 \right) + C|_{\varepsilon=0}$ .

При малом термическом возмущении полагая  $\frac{T-T_0}{T_0} \ll 1$  получаем, что ни упругие коэффициенты, ни термические коэффициенты, ни удельные теплоемкости не зависят от  $T$ . В таком случае плотность энтропии принимает вид:

$$s = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} + C_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0}.$$

Тогда уравнение теплопроводности имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{q} + p_0 &= C_\varepsilon \dot{T} + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T T_0 \text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \mathbf{q} &= k \nabla T, \end{aligned}$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности.

В рассматриваемой задаче термические возмущения связаны только с осью  $x$ :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \left( 1 + \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) C_\varepsilon} \right) \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{(1 + \nu) \alpha_T T_0}{(1 - \nu) k} \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = 0, \quad (2.3.12)$$

где  $a = \frac{k}{C_\varepsilon}$ .

Систему уравнений (2.3.11-2.3.12) необходимо дополнить начальными и граничными условиями.

Граничные условия при  $x = \pm \frac{h}{2}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p_0 H(t), \\ \frac{\partial T}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

где  $p_0$  – давление, прикладываемое к краям упругого слоя,  $H(t)$  – функция Хевисайда.



Начальные условия при  $t = 0$

$$\begin{aligned} T &= T_0, \\ \sigma_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Перейдем в (2.3.11) и (2.3.12) к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c_1 x}{a}, \\ \tau &= \frac{c_1^2 t}{a}, \\ \theta &= \alpha_T (T - T_0), \\ \sigma &= \frac{\sigma_x (1 - 2\nu)}{E}, \\ \varepsilon &= \frac{(3\lambda + 2\mu)^2 \alpha_T^2 T_0}{(\lambda + 2\mu) C_\varepsilon}. \end{aligned}$$

Тогда уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (2.3.15)$$

В новых переменных начальные условия (2.3.14) примут вид ( $\tau = 0$ ):

$$\begin{aligned} \theta &= 0, \\ \sigma &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия (2.3.15) примут вид ( $\xi = \pm \xi_0 = \pm \frac{hc_1}{2a}$ ):

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{p_0(1 - 2\nu)}{E} H, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Лапласа к (2.3.15) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \int_0^\infty \sigma e^{-p\tau} d\tau, \\ \theta^* &= \int_0^\infty \theta e^{-p\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \sigma^*}{d\xi^2} - p^2 \sigma^* - p^2 \theta^* = 0, \\ \frac{d^2 \theta^*}{d\xi^2} - p(1 + \varepsilon) \theta^* - \varepsilon p \sigma^* = 0 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= -\frac{p_0(1 - 2\nu)}{pE}, \\ \frac{d\theta^*}{d\xi} &= 0. \end{aligned}$$

Выражая из системы (2.3.16) величину  $\theta^*$ , получаем:

$$\frac{d^4 \theta^*}{d\xi^4} - p(1 + \varepsilon + p) \frac{d^2 \theta^*}{d\xi^2} + p^3 \theta^* = 0 \quad (2.3.17)$$

Будем искать величину  $\theta^*$  в виде  $\theta^* = A e^{B\xi}$ . Характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (2.3.17) имеет вид:

$$B^4 - p(1 + \varepsilon + p)B^2 + p^3 = 0.$$

Его корни

$$B_{1,2} = -B_{3,4} = \sqrt{\frac{p}{2} \left[ 1 + \varepsilon + p \pm \sqrt{(1 + \varepsilon + p)^2 - 4p} \right]}.$$

Решение уравнения (2.3.17) может быть записано в виде

$$\theta^* = C_1 \operatorname{ch} B_1 \xi + C_2 \operatorname{sh} B_1 \xi + C_4 \operatorname{sh} B_2 \xi.$$

Полагая, что из симметрии граничных условий следует симметрия решений, положим  $C_2 = C_4 = 0$ , тогда

$$\theta^* = C_1 \operatorname{ch} B_1 \xi + C_3 \operatorname{ch} B_2 \xi.$$

Подставляя вид решения в систему (2.3.16), находим:

$$\sigma^* = \frac{1}{\varepsilon p} [C_1 [B_1^2 - p(1 + \varepsilon)] \operatorname{ch} B_1 \xi + C_3 [B_2^2 - p(1 + \varepsilon)] \operatorname{ch} B_2 \xi].$$

Удовлетворяя граничным условиям

$$\sigma^*(\pm \xi_0) = -\frac{p_0(1 - 2\nu)}{pE},$$

получим значения для постоянных  $C_1$  и  $C_3$ :

$$C_1 = \frac{-\varepsilon p_0(1 - 2\nu) B_2 \operatorname{sh} B_2 \xi_0}{E \{ [B_1^2 - p(1 + \varepsilon)] B_2 \operatorname{sh} B_2 \xi_0 \operatorname{ch} B_1 \xi_0 - [B_2^2 - p(1 + \varepsilon)] B_1 \operatorname{ch} B_2 \xi_0 \operatorname{sh} B_1 \xi_0 \}}.$$

Обозначив выражение, заключенное в фигурные скобки, как  $\varphi(p)$ , получаем:

$$\theta^* = \frac{\varepsilon p_0(1 - 2\nu)}{E \varphi(p)} (B_1 \operatorname{sh} B_1 \xi_0 \operatorname{ch} B_2 \xi_0 - B_2 \operatorname{sh} B_2 \xi_0 \operatorname{ch} B_1 \xi_0).$$

Из физических соображений ясно, что существует

$$\Delta T(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta T(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \theta^*(p);$$

тогда предельные значения переменных задачи:

$$\begin{aligned} \Delta T|_{t=\infty} &= \frac{1}{\alpha_T} \theta(\infty) = \frac{\varepsilon p_0(1 - 2\nu)}{\alpha_T(1 + \varepsilon)E}, \\ \sigma_x|_{t=\infty} &= -p_0, \\ \sigma_y|_{t=\infty} &= -\frac{\nu}{1 - \nu} K. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Для верификации рассмотрим материал со следующими параметрами:

$$E = 70 \cdot 10^9 \text{ Па}, \nu = 0.27, \alpha_T = 10^{-5}, C_p = 900 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{град}}, \rho = 2700 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$p_0 = -9.8 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

При таких значениях параметров приращение температуры составляет  $\Delta T \cong 4.5^\circ$ . Ниже приведены поля температур для различных моментов времени (рис. 2.3), а также график, на котором продемонстрирован выход температуры на стационарный режим при различных значениях  $y$  (рис. 2.4).

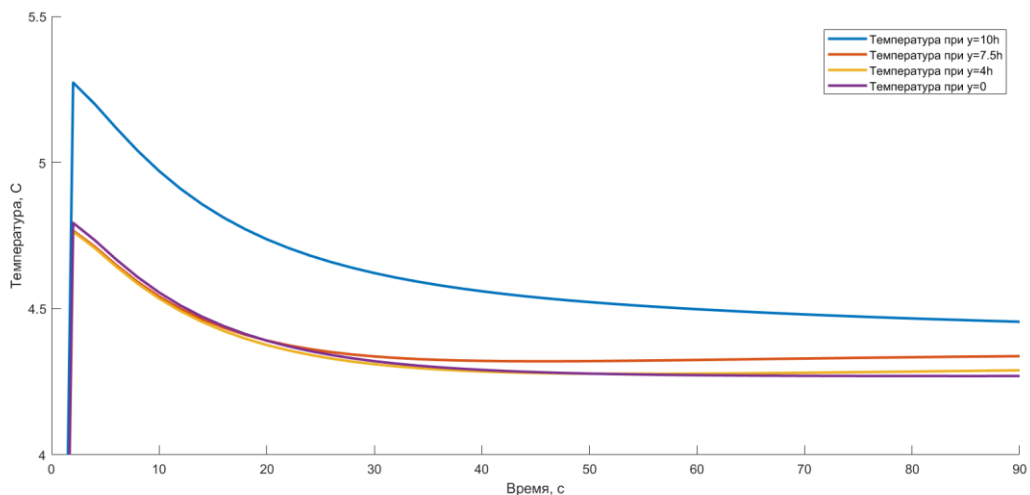


Рисунок 2.3 - Выход температуры на стационарный режим

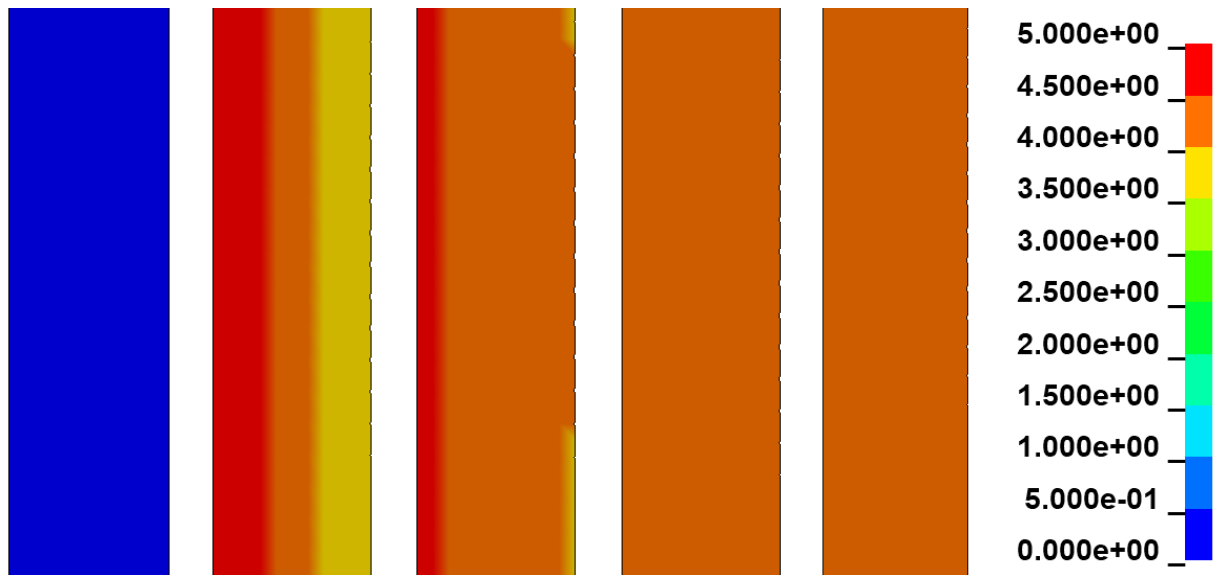


Рисунок 2.4 - Поле температур в момент времени  $t = 0, 10, 20, 30, 90$  с

В табл. 2.1 приведено сравнение аналитического решения с численным для температуры и напряжений. Видно, что погрешность вычисления температуры и напряжения мала.

Таблица 2.1 - Сравнение аналитического и численного решения

	$\Delta T, ^\circ\text{C}$	$\sigma_x _{t=\infty}, \text{МПа}$
Аналитическое решение	4.349	-9.8
Численное решение	4.323	-9.815
Погрешность	0.6%	1.2%

## 2.4. Нагрев стержня, расположенного между двумя стенками

Рассмотрим вторую модельную задачу. Стержень длиной  $l$  с модулем Юнга  $E$  и коэффициентом термического расширения  $\alpha$  помещен между двумя жесткими проводящими стенками  $A$  и  $B$  с температурами  $T_A$  и  $T_B$  (рис. 2.5).

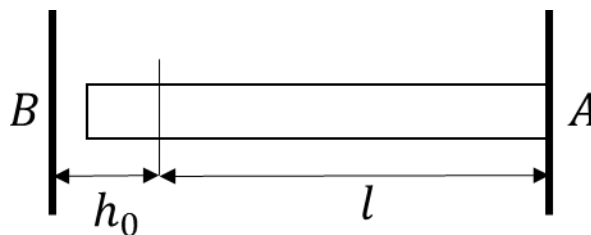


Рисунок 2.5 - Стержень с зазором

Стержень закреплен в точке  $A$ , и в начальный момент времени, когда  $T_A = T_B$ , имеется небольшой зазор  $h = h_0$  между концом стержня и стенкой  $B$ . Если  $T_A$  становится выше  $T_B$ , то в стационарном состоянии стержень приобретает температуру  $T_A$  и зазор приближается к величине

$$h = h_0 - \alpha l(T_A - T_B).$$

Если стержень расширяется и возникает идеальный контакт со стенкой  $B$ , то его температура изменяется линейно от  $T_A$  до  $T_B$ . Этот эффект продемонстрирован на рис. 2.6 и рис. 2.7.



Рисунок 2.6 – Первый момент контакта

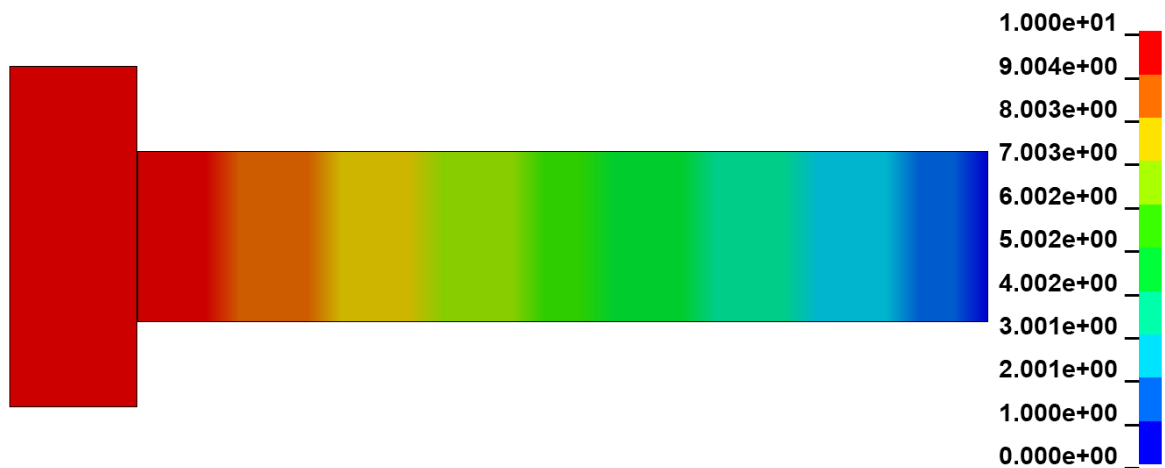


Рисунок 2.7 – Установившийся режим

# Глава 3. Моделирование термомеханической контактной задачи с учетом трения

## 3.1. Определяющие уравнения

Контактная задача термомеханики представляет большую важность из-за огромного спектра практического применения. Большинство систем торможения в настоящее время реализованы с помощью силы трения. Однако для решения задачи с точки зрения механики твердого тела необходимо записать уравнения состояния. Определяющие уравнения для этой задачи можно условно разделить на уравнения балансов, определяющие уравнения материала, граничные и начальные условия, а также уравнения контакта.

Для вывода уравнений рассмотрим два тела  $V_1$  и  $V_2$ , которые определены в отсчетной конфигурации. Пусть рассматривается лагранжево описание сплошной среды, а сама задача ставится в терминах скалярной функции температуры  $T(\mathbf{r}, t)$  и векторной функции перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ .

Вывод определяющих уравнений начнем с закона сохранения импульса в дифференциальной форме, который должен выполняться для любой материальной точки тел  $V_1$  и  $V_2$ :

$$\rho_{0i} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{u}_i = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_i + \mathbf{F}_i,$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность тела,

$\nabla$  – оператор Набла в отсчетной конфигурации,

$\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,

$\mathbf{F}$  – объемные силы, приложенные к телу,

$i$  – индекс тела,  $i = 1, 2$ .

В общем случае для каждого тела могут быть поставлены граничные условия первого или второго рода:

$$\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{N}_i|_{\Gamma_{\sigma_i}} = \mathbf{T}_i,$$

$$\mathbf{u}_i|_{\Gamma_{u_i}} = \bar{\mathbf{u}}_i,$$

где  $\mathbf{N}_i$  – внешняя нормаль к  $\Gamma_{\sigma_i}$ .

Начальные условия задаются стандартным образом для перемещений и скоростей:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_i|_{t=0} &= \mathbf{u}_{0i}, \\ \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \mathbf{u}_i &= \mathbf{v}_{0i}.\end{aligned}$$

В лагранжевом описании движения локальный баланс энергии имеет вид:

$$\begin{aligned}T_i \dot{S}_i &= D_i - \nabla \cdot \mathbf{q}_i + R_i, \\ \mathbf{q}_i &= -k_i \nabla T_i,\end{aligned}$$

где  $S$  – энтропия,

$D$  – общая диссипация,

$R$  – плотность внешних источников тепла,

$\mathbf{q}$  – вектор плотности теплового потока, зависимость которого от градиента температуры выражается, например, законом Фурье,

$k$  – коэффициент теплопроводности тела,

$(\dot{\phantom{x}}) = \frac{\partial}{\partial t}$  – производная по времени..

Для задачи теплопроводности также могут быть поставлены граничные условия как первого, так и второго рода:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{N}_i|_{\Gamma_{q_i}} &= \bar{q}_i, \\ T_i|_{\Gamma_{T_i}} &= T_i,\end{aligned}$$

где  $\mathbf{N}_i$  – внешняя нормаль к  $\Gamma_{q_i}$ .

Начальные условия для задачи теплопроводности имеют вид:

$$T_i|_{t=0} = T_{0i}.$$

Диссипацию можно разделить на внутреннюю и термическую составляющие:

$$D_i = D_{int_i} + D_{therm_i} \geq 0.$$

Внутреннюю диссипацию можно определить из физического смысла совершенной работы. Очевидно, что совершенная работа состоит из полезной работы и работы диссипативных сил, тогда диссипацию можно записать следующим образом:

$$D_{int_i} = \boldsymbol{\sigma}_i : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + T_i \dot{S}_i - \dot{U}_i \geq 0,$$

$$D_{int_i} = \boldsymbol{\sigma}_i^{irr} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i + \mathbf{A}_i^{irr} : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i,$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор малых деформаций,

$\mathbf{A}_i^{irr}$  – диссипативные силы связанные с внутренними переменными  $\boldsymbol{\alpha}_i$ ,

$\boldsymbol{\sigma}_i^{irr}$  – напряжения связанные с  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ ,

$U$  – внутренняя энергия.

Термическая диссипация имеет вид:

$$D_{therm_i} = -\frac{\mathbf{q}_i \nabla T_i}{T_i} \geq 0.$$

Для каждой материальной точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , принадлежащей телу  $V_1$  и лежащей на поверхности контакта, потребуем, чтобы контактная сила трения и нормальный тепловой поток были равны по модулю и противоположны по знаку силе трения и тепловому потоку соответствующей материальной точки с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , принадлежащей телу  $V_2$ , также лежащей на поверхности контакта:

$$\mathbf{t}_1(\mathbf{r}, t) d\Gamma_1 + \mathbf{t}_2(\mathbf{r}, t) d\Gamma_2 = 0,$$

$$q_{hc_1}(\mathbf{r}, t) d\Gamma_1 + q_{hc_2}(\mathbf{r}, t) d\Gamma_2 = 0,$$

где  $q_{hc_i} = q_i + R_{fr_i}$  – выходящий тепловой поток,

$R_{fr_i}$  – источник тепла от диссипации трения на контактной поверхности.

Также уравнения необходимо дополнить равенствами, выражающими связь деформаций и напряжений. Так, например, для кинематического линейного упрочнения определяющие уравнения для напряжений и деформаций имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - 3K\alpha T\mathbf{E},$$



$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{r}) = \sqrt{\frac{3}{2}(\mathbf{s} - \mathbf{r}) : (\mathbf{s} - \mathbf{r})} = \sigma_Y,$$

$$\mathbf{r} = H\boldsymbol{\varepsilon}^p,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p = \dot{p} \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{\sigma_Y},$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}^p : \boldsymbol{\varepsilon}^p},$$

где  $\mathbf{C}$  – тензор модулей упругости,

$\boldsymbol{\varepsilon}^p$  – тензор пластической деформации,

$\sigma_Y$  – предел текучести,

$\mathbf{s}$  – девиатор тензора напряжений,

$H$  – постоянная кинематического линейного упрочнения,

$:$  – операция двойного скалярного произведения.

### 3.2. Контактная задача для тормозного диска

Поскольку прикладные задачи термомеханики зачастую характеризуются сложной геометрией объектов, нелинейными зависимостями напряжений от деформаций, а также сложным контактным взаимодействием, в данной работе для исследования контакта тормозного диска с тормозной колодкой используется метод конечных элементов.

При тестировании тормозных дисков невыгодно использовать настоящий автомобиль для проведения испытаний. Поэтому обычно в качестве тестовой машины используют динамометр, который поддерживает постоянную скорость диска, а также давление, с которым колодка прижимается к диску. Далее смоделирован тест тормозного диска с помощью динамометра. Диск крутится с угловой скоростью 32 рад/с, а давление, прикладываемое к тормозной колодке составляет 0.5 МПа. Вообще говоря, тестирование одного диска достигает 6 часов, за это время температура диска при таком нагружении достигает порядка 75-100°C. Однако в данном случае в первую очередь

интересны качественные различия различных моделей материалов, поэтому рассматривается короткий промежуток времени.

Рассмотрим стандартный чугунный диск со стандартной тормозной колодкой. Упругий материал диска имеет следующие параметры:

$$E = 110 \cdot 10^9 \text{Па}, \nu = 0.27, \alpha_T = 10^{-5}, C_p = 465 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \text{град}}, \rho = 7000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

а параметры линейного кинематического упрочнения:

$$\sigma_Y = 270 \cdot 10^6 \text{Па}, \sigma_{tan} = 10^9 \text{Па},$$

где  $\sigma_{tan}$  – тангенциальный модуль.

Вначале смоделируем тормозной диск и тормозную колодку как абсолютно упругие тела. Далее добавим к модели материала температурное расширение. В качестве модели материала тормозного диска и колодки используем модель пластичного материала с линейным кинематическим упрочнением. После этого используем модель с температурным расширением. Все грани тормозного диска подвержены конвективному теплообмену с окружающей средой. Ось диска закреплена, а также сам диск не может двигаться в поперечном направлении.

Конечно-элементная дискретизация области приведена на рис. 3.1. На рис. 3. **Ошибка! Источник ссылки не найден.**-рис. 3. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показаны соответственно распределение температур, напряжений по Мизесу и касательных напряжений. Из этих графиков видно, что для упругого материала напряжения и температура растут быстрее, чем для пластичного. Это можно объяснить тем, что для упругого материала нормальное давление в зоне контакта больше из-за того, что тело стремится вернуться в исходное положение, а значит и сила трения будет больше, что ведет за собой рост температур и напряжений. На рис. 3.2-рис. 3.5 показаны поля температур диска для различных материалов в момент времени  $t = 1 \text{ с}$ .

Поскольку в данной задаче интерес представляет в первую очередь та часть диска, которая находится непосредственно в контакте с тормозной колодкой, то основное внимание при создании модели уделено именно ей. Из-за этого в месте контакта тормозного диска с осью автомобиля наблюдаются локальные повышения температуры, возникающие при моделировании закрепления диска с помощью балочных элементов. Также на месте контакта наблюдается распределение температур, которое совпадает с экспериментальными данными, а именно увеличение температуры от центра диска к краю в радиальном направлении.

Таким образом, в области диска, представляющей в данной задаче наибольший интерес, полученные численные результаты качественно совпадают с экспериментальными.

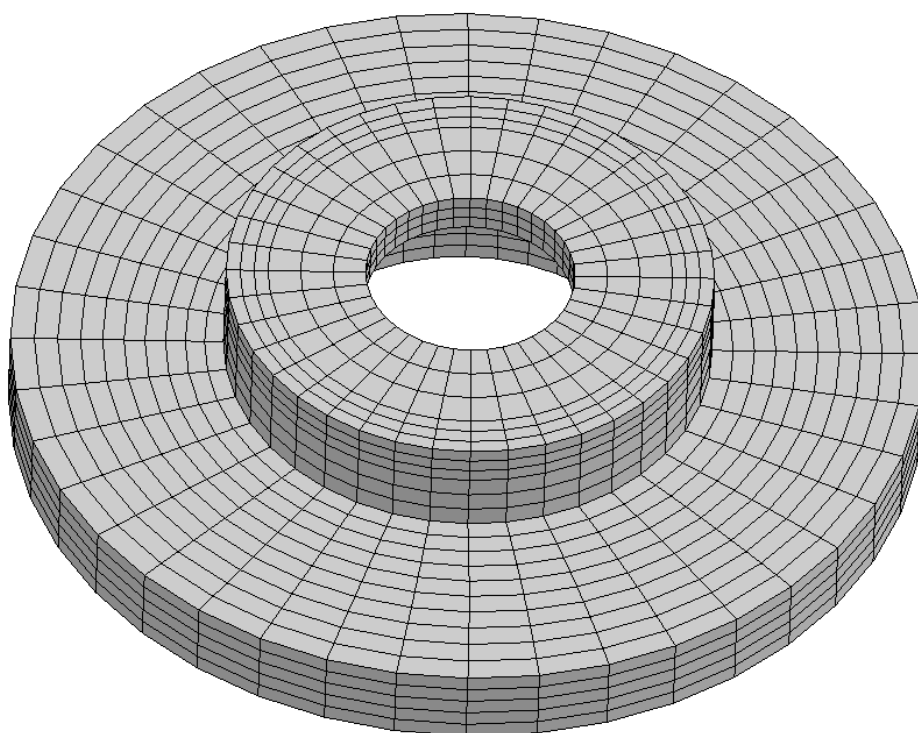


Рисунок 3.1 - Конечно-элементная дискретизация области

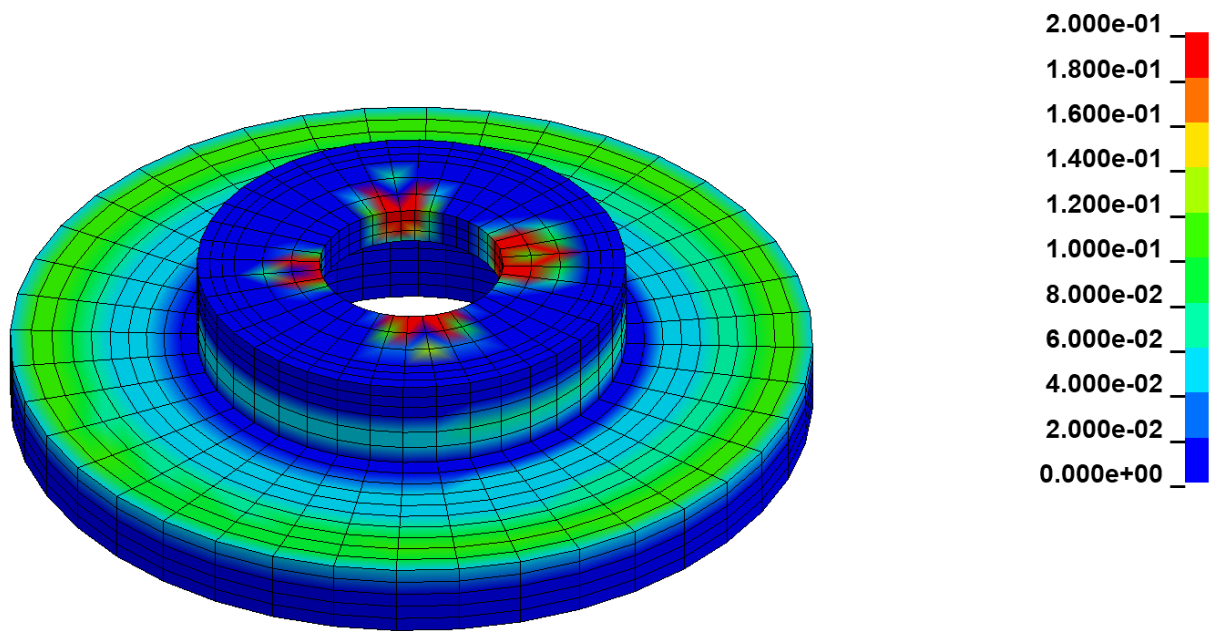


Рисунок 3.2 - Поле температур для упругого материала при  $t = 1$  с

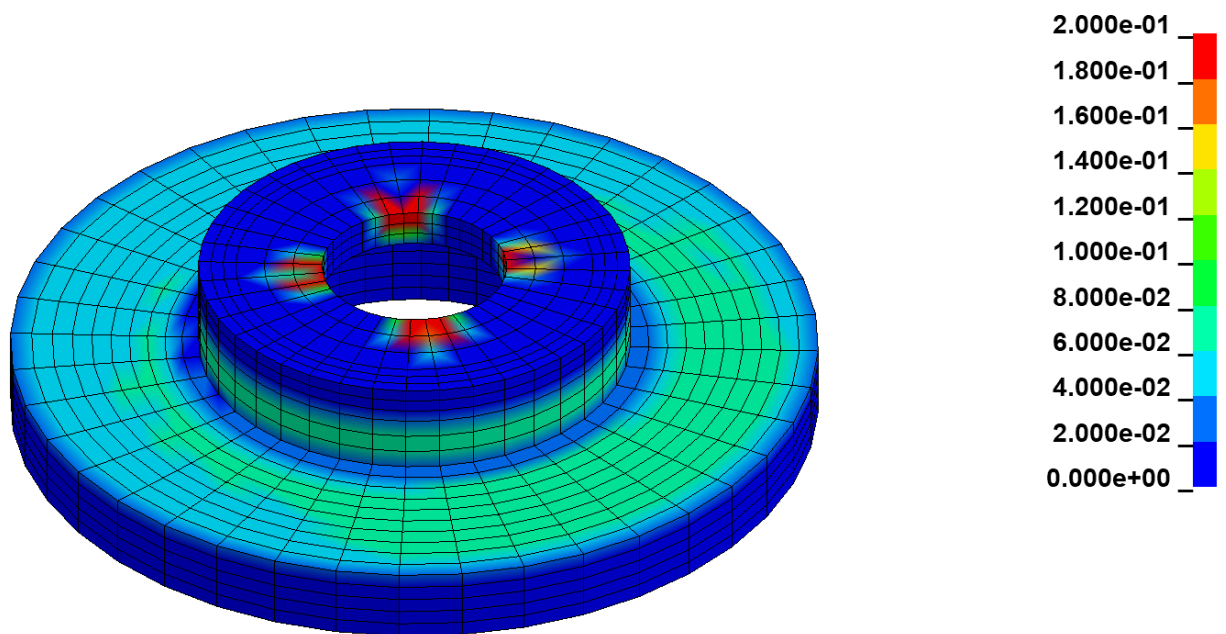


Рисунок 3.3 - Поле температур для упругого материала с температурным расширением при  $t = 1$  с

8

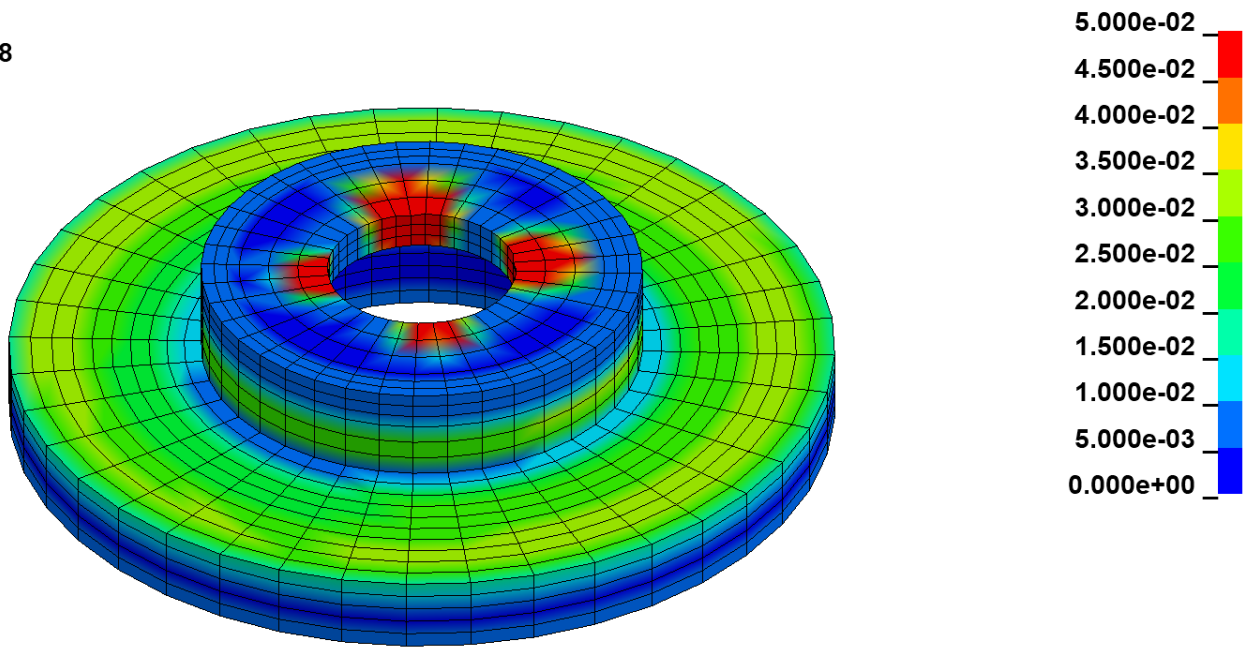


Рисунок 3.4 - Поле температур для пластичного материала при  $t = 1$  с

8

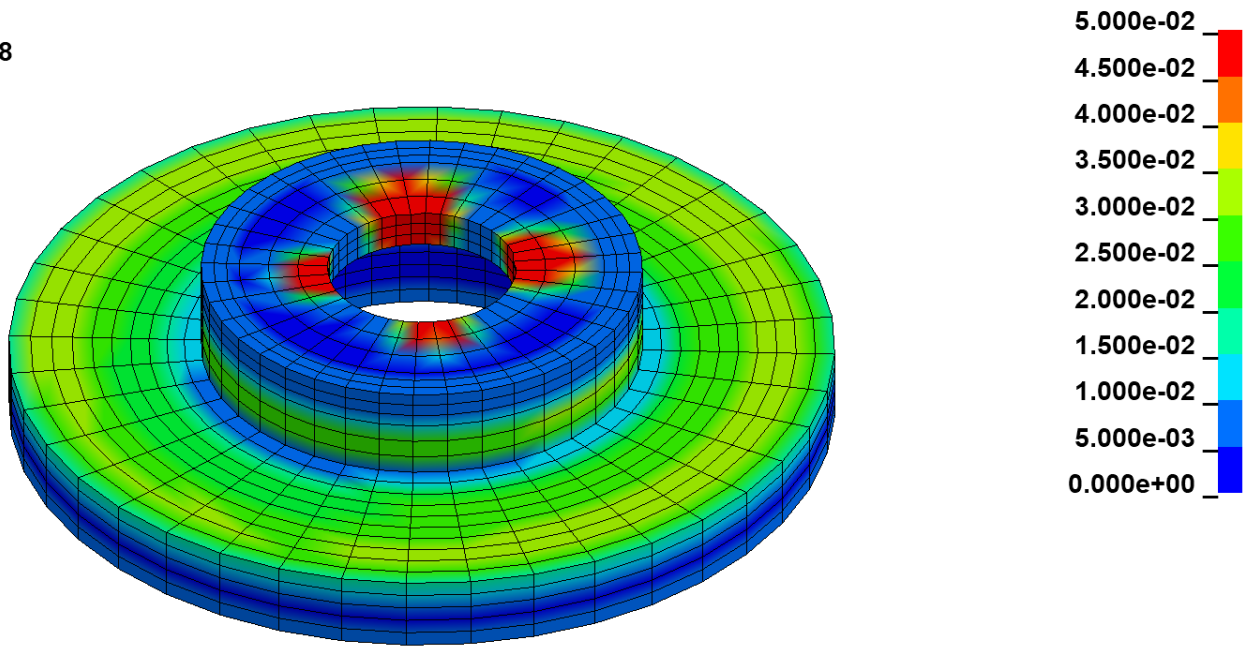


Рисунок 3.5 - Поле температур для пластичного материала с температурным расширением при  $t = 1$  с

## Заключение

В работе была исследована контактная задача с учетом трения. В начале работы основное внимание уделено понятиям *термомеханика* и *контакт с трением*. Также представлены основные сведения о тормозной системе автомобиля, тормозном диске и дефектах, которым он подвержен.

Далее был представлен обзор метода конечных элементов, в частности, метод множителей Лагранжа. Были рассмотрены две модельные задачи: модельная задача о сжатии упругого слоя и модельная задача о стержне, зажатом между двумя стенками. В первой задаче было приведено сравнение результатов аналитического и численного решения, погрешность составила не более 1.5%. Во второй задаче был продемонстрирован перенос тепла в контактной задаче термомеханики.

Далее был представлен вывод общих уравнений термомеханической контактной задачи, которые позволяют решать рассматриваемую задачу для любого типа материала, нагружения, а также типа контакта. Было продемонстрировано решение задачи о контакте тормозного диска с колодкой с помощью метода конечных элементов. Задача решена для различных типов материалов и результаты согласуются со здравым смыслом.

Таким образом выполнены все поставленные задачи и достигнута цель работы.

## Список литературы

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Springer, 2006. 521 p.
4. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.
5. Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2011. 44 с.
6. Мусхелешвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1996. 708 с.
7. Taylor R.L. Finite element solution of contact problems: From 1974 to 2004 // Сайт Civil and Environmental Engineering UC Berkeley. URL: <http://faculty.ce.berkeley.edu/rlt/presentations/hughes.pdf> (дата обращения: 19.04.2017).
8. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
9. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев: Наукова думка, 1965. 204 с.
10. Wang K., Tang J. Analysis of Thermal-Mechanical Coupling of Automotive Disc Brake Based on Numerical Simulation Method // The Open Mechanical Engineering Journal. 2015. №9. Pp. 28-33.
11. Belhocine A., Bouchetare M. Thermomechanical Modelling of Disc Brake Contact Phenomena // FME Transactions. 2013. №41. Pp. 59-65.
12. Belhocine A., Bouchetare M. Simulation of fully coupled thermomechanical analysis of disc brake rotor // WSEAS transactions on applied and theoretical mechanics. July 2012. Issue 3, № 7. Pp. 169-181.
13. Rozenwald D. Simulation of thermomechanical coupled problems including large structural transformations // Proceedings of European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering. 2000. 19 p.

14. Mandel J. Thermodynamics and plasticity // Proceedings of The International Symposium on Foundations of Continuum Thermodynamics. 1973. Pp. 283-304.
15. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. Springer Berlin Heidelberg, 2004. 579 p.
16. Truesdell C., Toupin R.A. The classical field theories. Springer Berlin Heidelberg, 1960. 858 p.