

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Механика и процессы управления»

Работа допущена к защите
Заведующий кафедрой, д. ф.-м. н., профессор
_____ Д. А. Индейцев
«__» _____ 2018 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ДИНАМИКИ БИНАРНОГО МАЯТНИКА

по направлению 15.03.03 Прикладная механика
по образовательной программе
15.03.03_03 Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг

Выполнил
студент 43602/1 группы

С.М. Стояновский

Руководитель,
ассистент каф. МПУ

А.С. Смирнов

Санкт-Петербург

2018

Оглавление

Реферат	3
Введение	4
1. Уравнения движения бинарного маятника	6
1.1 Вывод уравнений движения бинарного маятника.....	6
1.2 Проверка корректности введенной диссипативной функции	9
1.3 Приведение уравнений движения к безразмерному виду	10
2. Симметричный случай и консервативный режим	13
2.1 Уравнения движения для симметричного случая	13
2.2 Интеграл энергии и фазовые портреты	14
2.3 Численное интегрирование изученных режимов	17
3. Эволюция движения бинарного маятника	23
3.1 Проверка устойчивости консервативного режима	23
3.2 Зависимость эволюции движения от наличия диссипации	27
Заключение.....	34
Список литературы	36

РЕФЕРАТ

36 страниц, 21 рисунок

**БИНАРНЫЙ МАЯТНИК, ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, ДИССИПАЦИЯ,
ЭВОЛЮЦИОННАЯ ДИНАМИКА, УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ,
ЛАГРАНЖЕВА МЕХАНИКА**

В данной работе рассмотрена диссипативная колебательная система с тремя степенями свободы – бинарный маятник. Проведено аналитическое и численное исследование уравнений движения. Изучены различные режимы колебаний бинарного маятника. Проведен анализ влияния рассеяния механической энергии на эволюцию движения колебательной системы.

THE ABSTRACT

36 pages, 21 pictures

**BINARY PENDULUM, DYNAMICAL SYSTEM, DISSIPATION,
TIME EVOLUTION, EQUATIONS OF MOTION, LAGRANGIAN MECHANICS**

Dissipative oscillatory 3 degrees of freedom system is considered. Analytical and numerical research of equations of motion is carried out. Study on different modes of oscillation is undertaken. Investigation into effect of mechanical energy loss on the evolution of oscillatory motion is conducted.

Введение

Уже более четырех веков, начиная с юношеских эмпирических изысканий и фундаментальных работ Г. Галилея, математический маятник является одной из ключевых физических моделей аналитической механики. Простота и, в то же время, богатство данной модели стали причиной многочисленных теоретических исследований и практических приложений, среди главных результатов которых стоит упомянуть такие понятия современной механики как устойчивость, резонанс, изохронность, интеграл механической энергии, диссипативность [1, 2].

Естественным развитием изучения математического маятника стали многочисленные и разнообразные маятниковые системы со многими степенями свободы [3]. Среди них особое место занимают многозвенные маятники, т.е. соединенные в цепь шарнирами математические маятники, и в особенности – двойной математический маятник [4]. В этом контексте хочется отметить, что более сложные нелинейные осцилляторы гораздо реже объединяются в системы из нескольких подобных. Попытка восполнить малочисленность моделей такого рода стала одной из целей данной работы.

Из многих представляющих исследовательский интерес вариаций модели математического маятника, в настоящей работе будет рассмотрен математический маятник переменной длины [5]. Одной из его простейших реализаций является эвольвентный маятник, нить которого намотана на бобину или вал круглого поперечного сечения. Подобная бобина с двумя подвешенными эвольвентными маятниками – по одному с каждой стороны – стала объектом представленного далее исследования, и ниже будет именоваться **бинарным маятником**.

Ключевой интерес подобная система представляет с точки зрения эволюционной динамики при наличии в ней диссипации. Маятниковые системы неоднократно становились плацдармом для работ в этой пока что недостаточно широко развитой ветви современной механики [6,7]. Отдельно внимание следует обратить на эволюцию траектории сферического маятника при учете внутренней диссипации в нити, как на наглядный пример перехода диссипативной колебательной системы в консервативный режим осцилляций с прекращением рассеивания энергии – в случае сферического маятника в режим конического вращения [8].

Бинарный маятник также обладает консервативными режимами колебаний, природа которых будет детально разобрана позже. Поэтому в основу данной работы главным образом легли следующие вопросы:

- Способна ли такая система при некоторых начальных условиях вследствие работы сил внутренней диссипации выйти на консервативный режим, в котором эта диссипация прекратится?
- Обладает ли такой режим устойчивостью по отношению к начальным условиям и/или параметрам объекта?

Согласно очень общим, но достаточно строгим рассуждениям П. Апеля, любая материальная система стремится избежать воздействия на нее сил трения [9]. Но какими путями? Самой глобальной задачей данного исследования является попытка внести вклад в разрешение этого фундаментального вопроса.

1. Уравнения движения бинарного маятника

1.1. Вывод уравнений движения бинарного маятника

Рассмотрим бобину, составленную из цилиндров радиусов r_1, r_2 , закрепленную на оси, при вращении вокруг которой наблюдается вязкое трение с коэффициентом диссипации b . На каждый цилиндр намотана невесомая нерастяжимая нить, на свободном конце которой находится точечная масса. Нити намотаны в противоположных направлениях, массы на свободных концах равны соответственно m_1, m_2 . Длины нитей в неотклоненном положении равны l (Рис.1.1, 1.2).

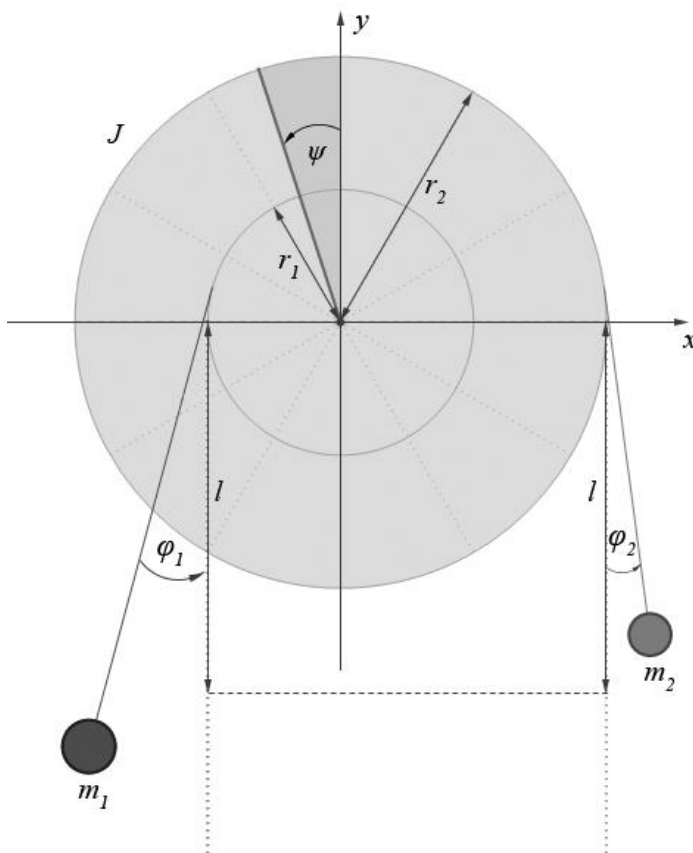


Рис.1.1 Объект исследования, вид спереди

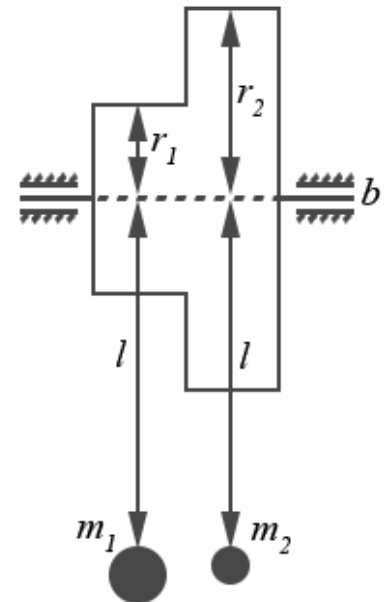


Рис.1.2 Объект исследования, вид сбоку

Расстояние вдоль оси между грузами примем пренебрежимо малым относительно радиусов цилиндров и длин нитей. В таком случае задачу приближенно можно рассматривать как плоскую. Положение такой колебательной системы однозначно определяется набором из трех углов: углов отклонения подвесов от вертикали φ_1, φ_2 и углом поворота бобины ψ . Для них выбрано положительное направление отсчета против часовой стрелки.

Запишем выражения для декартовых координат масс:

$$x_1 = -r_1 \left(\cos \varphi_1 + \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \sin \varphi_1 \right) \quad y_1 = -r_1 \left(\sin \varphi_1 - \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \cos \varphi_1 \right) \quad (1.1.1)$$

$$x_2 = r_2 \left(\cos \varphi_2 + \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \sin \varphi_2 \right) \quad y_2 = r_2 \left(\sin \varphi_2 - \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \cos \varphi_2 \right) \quad (1.1.2)$$

Соответственно, получаем кинетические энергии каждого из грузов:

$$T_1 = \frac{m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)}{2} = \frac{m_1 r_1^2}{2} \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right)^2 + \dot{\psi}^2 \right) \quad (1.1.3)$$

$$T_2 = \frac{m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} = \frac{m_2 r_2^2}{2} \left(\dot{\varphi}_2^2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right)^2 + \dot{\psi}^2 \right) \quad (1.1.4)$$

Тогда кинетическая энергия системы с учетом момента инерции бобины:

$$T = \frac{m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right)^2 + \frac{m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right)^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) \quad (1.1.5)$$

Теперь обратимся к потенциальной энергии:

$$П_1 = m_1 g y_1 = -m_1 g r_1 \left(\sin \varphi_1 - \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \cos \varphi_1 \right) \quad (1.1.6)$$

$$П_2 = m_2 g y_2 = m_2 g r_2 \left(\sin \varphi_2 - \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \cos \varphi_2 \right) \quad (1.1.7)$$

Поскольку жесткостью на кручение осевое закрепление бобины не обладает, то потенциальной энергии, связанной непосредственно с ней, в системе нет, и общая потенциальная энергия системы выражается следующим образом:

$$П = -m_1 g r_1 \left(\sin \varphi_1 - \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \cos \varphi_1 \right) + m_2 g r_2 \left(\sin \varphi_2 - \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \cos \varphi_2 \right) \quad (1.1.8)$$

В связи с неконсервативностью системы для записи системы уравнений Лагранжа II рода, учитывающей трение, необходимо ввести диссипативную функцию, известную также как функция Рэля [10]:

$$S = \frac{b \dot{\psi}^2}{2} \quad (1.1.9)$$

Теперь можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi_2} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_2} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \psi} - \frac{\partial S}{\partial \dot{\psi}} \end{cases} \quad (1.1.10)$$

Произведем подстановку из (1.1.5), (1.1.8) и (1.1.9) и получим:

$$\begin{cases} \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \left(\ddot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) + \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - 2\dot{\psi}) - \frac{g}{r_1} \sin \varphi_1 \right) = 0 \\ \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \left(\ddot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - 2\dot{\psi}) + \frac{g}{r_2} \sin \varphi_2 \right) = 0 \\ \ddot{\psi} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) + b \dot{\psi} + m_1 r_1^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) - \frac{g}{r_1} \cos \varphi_1 \right) + \\ + m_2 r_2^2 \left(\dot{\varphi}_2^2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \frac{g}{r_2} \cos \varphi_2 \right) = 0 \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Тривиальные частные решения $\varphi_1 = \psi + \frac{l}{r_1}$ и $\varphi_2 = \psi - \frac{l}{r_2}$ первых двух уравнений системы соответствуют полному накручиванию соответствующих нитей на цилиндры, т.е. этими решениями обозначена граница применимости составленной модели. Эти частные решения не нуждаются в дополнительном рассмотрении, что позволяет сократить первые два уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) + \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - 2\dot{\psi}) - \frac{g}{r_1} \sin \varphi_1 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - 2\dot{\psi}) + \frac{g}{r_2} \sin \varphi_2 = 0 \\ \ddot{\psi} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) + b \dot{\psi} + m_1 r_1^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) - \frac{g}{r_1} \cos \varphi_1 \right) + \\ + m_2 r_2^2 \left(\dot{\varphi}_2^2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \frac{g}{r_2} \cos \varphi_2 \right) = 0 \end{cases} \quad (1.1.12)$$

Таким образом мы получили систему уравнений движения бинарного маятника (1.1.12).

1.2. Проверка корректности введенной диссипативной функции

Если приведенная выше диссипативная функция (1.1.9) составлена верно, то она должна характеризовать скорость рассеяния энергии системы. Для того, чтобы проверить, выполняется ли это условие, запишем начала полную энергию системы $E = \Pi + T$:

$$E = -m_1 g r_1 \left(\sin \varphi_1 - \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \cos \varphi_1 \right) + m_2 g r_2 \left(\sin \varphi_2 - \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \cos \varphi_2 \right) + \frac{m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2}{2} \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right)^2 + \frac{m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2}{2} \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right)^2 + \frac{\dot{\psi}^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) \quad (1.2.1)$$

Возьмем производную по времени:

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -m_1 g r_1 \left(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \sin \varphi_1 - (\dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) \cos \varphi_1 \right) + \\ & + m_2 g r_2 \left(\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \sin \varphi_2 - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}) \cos \varphi_2 \right) + \\ & + m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \left(\ddot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) + \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) \right) + \\ & + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 \left(\varphi_1 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \left(\ddot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}) \right) + \\ & + \dot{\psi} \ddot{\psi} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

В качестве вспомогательного шага перепишем систему (1.1.12) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) + \dot{\varphi}_1 (\dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) = \dot{\varphi}_1 \dot{\psi} + \frac{g}{r_1} \sin \varphi_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \dot{\varphi}_2 (\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}) = \dot{\varphi}_2 \dot{\psi} - \frac{g}{r_2} \sin \varphi_2 \\ \ddot{\psi} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + J) = -m_1 r_1^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) - \frac{g}{r_1} \cos \varphi_1 \right) - \\ \quad - m_2 r_2^2 \left(\dot{\varphi}_2^2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \frac{g}{r_2} \cos \varphi_2 \right) - b \dot{\psi} \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Теперь выполним подстановку выделенных выражений из (1.2.3) в формулу для производной полной энергии по времени (1.2.2):

$$\begin{aligned}
 \dot{E} = & -m_1 g r_1 \left(\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \sin \varphi_1 - (\dot{\varphi}_1 - \dot{\psi}) \cos \varphi_1 \right) + \\
 & + m_2 g r_2 \left(\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \sin \varphi_2 - (\dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}) \cos \varphi_2 \right) + \\
 & + m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) \left(\dot{\varphi}_1 \dot{\psi} + \frac{g}{r_1} \sin \varphi_1 \right) + \\
 & + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 \left(\varphi_1 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) \left(\dot{\varphi}_2 \dot{\psi} - \frac{g}{r_2} \sin \varphi_2 \right) + \\
 & - m_1 \dot{\psi} r_1^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 \left(\varphi_1 - \psi - \frac{l}{r_1} \right) - \frac{g}{r_1} \cos \varphi_1 \right) - \\
 & - m_2 \dot{\psi} r_2^2 \left(\dot{\varphi}_2^2 \left(\varphi_2 - \psi + \frac{l}{r_2} \right) + \frac{g}{r_2} \cos \varphi_2 \right) - b \dot{\psi}^2
 \end{aligned} \tag{1.2.4}$$

Раскрытие скобок и приведение подобных в полученном выражении дает искомое закономерное соотношение:

$$\dot{E} = -b \dot{\psi}^2 = -2S \tag{1.2.5}$$

Как и ожидалось, введенная диссипативная функция S характеризует мощность рассеивания механической энергии.

1.3. Приведение уравнений движения к безразмерному виду

Чтобы подготовить систему уравнений (1.1.12) к дальнейшему исследованию, включающему в себя такие шаги, как построение фазовых портретов и численное интегрирование, для которых предпочтительно использование безразмерных величин, нам понадобится ввести ряд обозначений. Также следует указать на физический смысл каждого введенного обозначения.

Поскольку нарушение баланса моментов сил тяжестей, приложенных к точечным массам с обеих сторон бобины, неизбежно ведет к полному сматыванию нити, момент на которой меньше, в рамках данной работы

бинарный маятник рассматривается в предположении, что баланс моментов соблюден, т.е. $m_1 r_1 = m_2 r_2$.

$$\rho = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (1.3.1)$$

Безразмерный параметр ρ характеризует степень асимметричности бинарного маятника. При $\rho = 1$ верны равенства $r_1 = r_2$ и $m_1 = m_2$, следовательно маятник тогда симметричен.

$$\delta = \frac{l}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (1.3.2)$$

Безразмерный параметр δ накладывает ограничения на максимальный угол поворота бобины ψ_{\max} , при котором происходит полное сматывание одной из нитей, а также характеризует среднюю по двум боковым маятникам степень влияния изменения длины нитей – вследствие наматывания нити на бобину – на движение этих маятников.

$$k^2 = \frac{g}{\sqrt{r_1 r_2}} \quad (1.3.3)$$

Параметр k имеет размерность Гц (с^{-1}) и является усредненной частотной характеристикой колебательной системы. Для разрешения проблемы наличия у параметра k размерности вводится безразмерное время τ .

$$\tau = k t \quad (1.3.4)$$

Введем также обозначения для производных по безразмерному времени:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi}{\partial (k t)} = \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\dot{\varphi}}{k} \\ \varphi'' &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial (k t)^2} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{k^2} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Теперь продолжим описание параметров.

$$\mu = \frac{J}{r_1 r_2 \sqrt{m_1 m_2}} \quad (1.3.6)$$

Безразмерный параметр μ отражает то, насколько бобина инертна в сравнении с подвешенными на него массами.

$$\beta = \frac{b}{k r_1 r_2 \sqrt{m_1 m_2}} \quad (1.3.7)$$

Безразмерный параметр β , очевидно, характеризует скорость диссипации.

Разделив все уравнения в системе (1.1.12) на $k^2 r_1 r_2 \sqrt{m_1 m_2}$ и воспользовавшись обозначениями (1.3.1-7), получим систему:

$$\begin{cases} \varphi_1''(\varphi_1 - \psi - \rho\delta) + \varphi_1'(\varphi_1' - 2\psi') - \rho \sin \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2''\left(\varphi_2 - \psi + \frac{\delta}{\rho}\right) + \varphi_2'(\varphi_2' - 2\psi') + \frac{\sin \varphi_2}{\rho} = 0 \\ \psi''\left(\rho + \frac{1}{\rho} + \mu\right) + \beta\psi' + \frac{\varphi_1'^2}{\rho}(\varphi_1 - \psi - \rho\delta) + \\ + \rho\varphi_2'^2\left(\varphi_2 - \psi + \frac{\delta}{\rho}\right) + \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

В итоге была получена система безразмерных уравнений движения бинарного маятника (1.3.8). Следует отметить, что данная система является существенно нелинейной, и при линеаризации системы (1.3.8), связь между боковыми осцилляторами пропадает, а также отделяется уравнение, описывающее вращение бобины.

$$\begin{cases} \delta\varphi_1'' + \varphi_1 = 0 \\ \delta\varphi_2'' + \varphi_2 = 0 \\ \psi''\left(\rho + \frac{1}{\rho} + \mu\right) + \beta\psi' = 0 \end{cases} \quad (1.3.9)$$

Аналитическое же решение исходной системы, или даже слабо-нелинейной модели с компонентами порядка малости не выше третьего, является задачей крайне затруднительной, если вообще осуществимой. Поэтому дальнейшее исследование будет состоять в аналитическом рассмотрении более простых частных случаев и численном интегрировании системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (1.3.8).

2. Симметричный случай и консервативный режим

2.1. Уравнения движения для симметричного случая

Ввиду большого числа степеней свободы системы и количества свободных параметров $(\rho, \delta, k, \mu, \beta)$, для дальнейшего аналитического рассмотрения был взят более простой частный случай симметричного бинарного маятника, для которого выполнены равенства $r_1 = r_2 = r$, $m_1 = m_2 = m$.

Запишем, чему будут равны введенные в предыдущем разделе параметры для этого случая:

$$\rho = 1 \quad \delta = \frac{l}{r} \quad k = \sqrt{\frac{g}{r}} \quad \mu = \frac{J}{mr^2} \quad \beta = \frac{b}{kmr^2} \quad (2.1.1)$$

Система уравнений движения примет вид:

$$\begin{cases} \varphi_1''(\varphi_1 - \psi - \delta) + \varphi_1'(\varphi_1' - 2\psi') - \sin \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2''(\varphi_2 - \psi + \delta) + \varphi_2'(\varphi_2' - 2\psi') + \sin \varphi_2 = 0 \\ \psi''(\mu + 2) + \beta\psi' + \varphi_1'^2(\varphi_1 - \psi - \delta) + \varphi_2'^2(\varphi_2 - \psi + \delta) + \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 = 0 \end{cases} \quad (2.1.2)$$

Нетрудно видеть, что при симметричных начальных условиях такая система входит в консервативный режим, в котором у нее, в сущности, остается одна степень свободы:

$$\left. \begin{cases} \varphi_1(\tau) = -\varphi_o \square \varphi_1'(\tau) = 0 \\ \varphi_2(\tau) = \varphi_o \square \varphi_2'(\tau) = 0 \\ \psi(\tau) = 0 \square \psi'(\tau) = 0 \end{cases} \right|_{\tau = 0} \Rightarrow \left. \begin{cases} \varphi_1(\tau) = -\varphi(\tau) \square \varphi_1'(\tau) = \varphi'(\tau) \\ \varphi_2(\tau) = \varphi(\tau) \square \varphi_2'(\tau) = -\varphi'(\tau) \\ \psi(\tau) = 0 \square \psi'(\tau) = 0 \end{cases} \right|_{\tau > 0} \quad (2.1.3)$$

Выполним проверку подстановкой в (2.1.2):

$$\begin{cases} -\varphi''(-\varphi - \delta) + \varphi'^2 + \sin \varphi = 0 \\ \varphi''(\varphi + \delta) + \varphi'^2 + \sin \varphi = 0 \\ \varphi'^2(-\varphi - \delta) + \varphi'^2(\varphi + \delta) + \cos \varphi - \cos \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi''(\varphi + \delta) + \varphi'^2 + \sin \varphi = 0 \\ \varphi''(\varphi + \delta) + \varphi'^2 + \sin \varphi = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad (2.1.4)$$

Получается, вместо системы уравнений (2.1.2) движение системы теперь может быть описано одним уравнением относительно φ :

$$\varphi''(\varphi + \delta) + \varphi'^2 + \sin \varphi = 0 \quad (2.1.5)$$

Данный режим является консервативным вследствие отсутствия вращения бобины вокруг оси закрепления. Массы боковых маятников при этом движутся по противоположенным эвольвентам бобины.

2.2. Интеграл энергии и фазовые портреты

Поскольку описанный в предыдущем подразделе режим консервативен, мы можем записать интеграл энергии аналогично (1.2.1) с учетом (2.1.3):

$$E = -mgr \left(-\sin \varphi - \left(-\varphi - \frac{l}{r} \right) \cos \varphi \right) + \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left(-\varphi - \frac{l}{r} \right)^2 + \\ + mgr \left(\sin \varphi - \left(\varphi + \frac{l}{r} \right) \cos \varphi \right) + \frac{mr^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left(\varphi + \frac{l}{r} \right)^2 \quad (2.2.1)$$

Выразим отсюда $\dot{\varphi}^2$:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\frac{E}{mr} - 2g \left(\sin \varphi - \left(\varphi + \frac{l}{r} \right) \cos \varphi \right)}{r \left(\varphi + \frac{l}{r} \right)^2} \quad (2.2.2)$$

Обозначим за E_0 полную энергию системы в начальный момент времени, тогда при начальных условиях как в (2.1.3):

$$E_0 = 2mgr \left(\sin \varphi_0 - \left(\varphi_0 + \frac{l}{r} \right) \cos \varphi_0 \right) \quad (2.2.3)$$

В случае отсутствия рассеяния энергии системы, в любой момент времени выполняется равенство $E = E_0$. Из этих соображений подставим полученное выражение (2.2.3) в формулу (2.2.2):

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g \left(\sin \varphi_0 - \left(\varphi_0 + \frac{l}{r} \right) \cos \varphi_0 - \sin \varphi + \left(\varphi + \frac{l}{r} \right) \cos \varphi \right)}{r \left(\varphi + \frac{l}{r} \right)^2} \quad (2.2.4)$$

Теперь приведем полученное уравнение фазовых траекторий к безразмерному виду с учетом обозначений (1.3.4), (1.3.5), (2.1.1):

$$\varphi' = \pm \frac{\sqrt{2 \left(\sin \varphi_0 - (\varphi_0 + \delta) \cos \varphi_0 - \sin \varphi + (\varphi + \delta) \cos \varphi \right)}}{(\varphi + \delta)} \quad (2.2.5)$$

Принимая во внимание нитевую конструкцию боковых маятников, нужно отметить, что рассмотрение составленной модели с начальными условиями вида (2.1.3) имеет смысл только в пределах $\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \varphi_{\max}$, т.к. при бóльших углах строго необходимо учитывать провисание нитей (Рис.2.1).

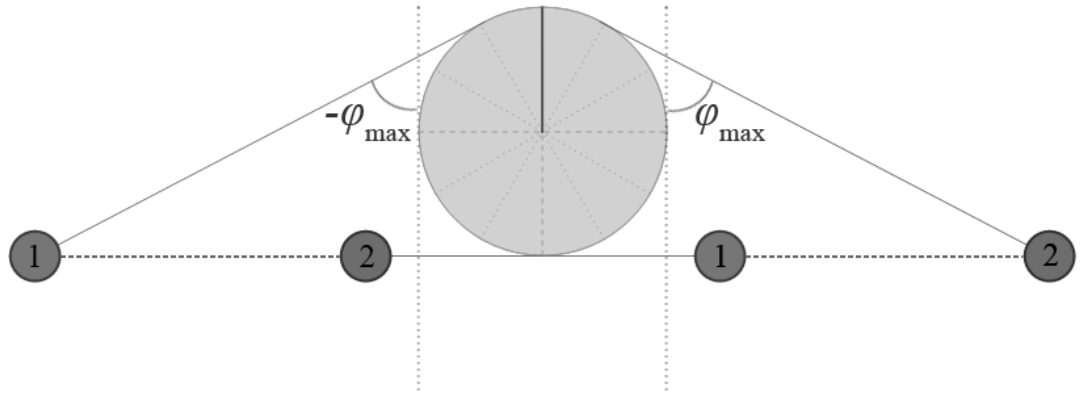


Рис.2.1 Максимальные начальные отклонения

Условием осуществимости $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ в свою очередь является неравенство $\delta > \frac{\pi}{4}$, обеспечивающее достаточную длину нити. Значение φ_{\max} может быть найдено из соображений сохранения энергии, если приравнять ее в крайних точках траекторий масс:

$$2mgr(\sin \varphi_{\max} - (\varphi_{\max} + \delta) \cos \varphi_{\max}) = 2mgr \left(\sin \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \cos \frac{\pi}{2} \right) \quad (2.2.6)$$

Это приводит нас к трансцендентному уравнению относительно φ_{\max} :

$$\varphi_{\max} = \operatorname{tg} \varphi_{\max} - \sec \varphi_{\max} - \delta \quad (2.2.7)$$

Искомое значение φ_{\max} будет первым положительным корнем полученного уравнения, приблизительные численные значения которого при различных значениях безразмерного параметра δ приведены в Табл.2.1.

δ	2	3	5	7	10	15	20	30
φ_{\max}	0.91	1.09	1.25	1.33	1.40	1.45	1.48	1.51

Табл.2.1 Численные решения трансцендентного уравнения

По графику зависимости $\varphi_{\max}(\delta)$, видно, что с увеличением δ значение φ_{\max} стремится к $\frac{\pi}{2}$ (Рис.2.2). Это объясняется тем, что с ростом длины нити при постоянном радиусе бобины вклад ее наматывания при колебаниях становится все менее значительным, а отрезки эвольвент, которыми являются траектории масс, все более симметричными.

Для представленного в Табл.2.1 и на Рис.2.2 диапазона значений δ были построены фазовые портреты (Рис.2.3, 2.4).

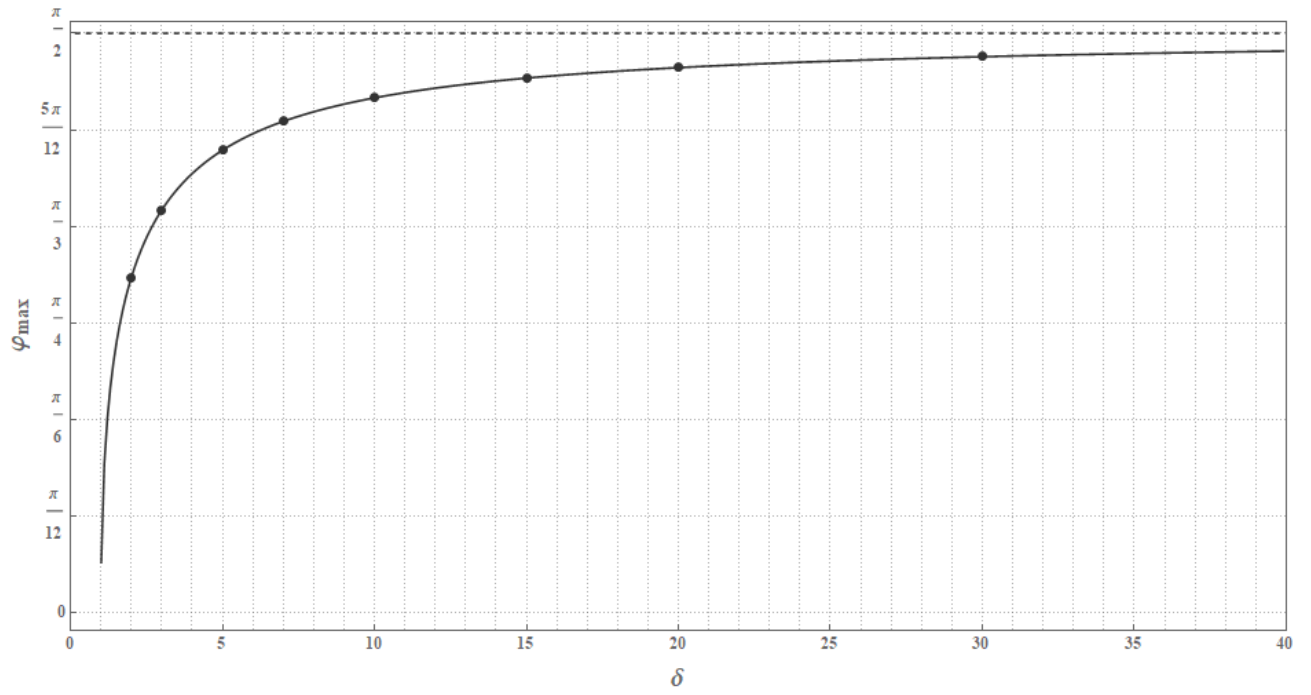


Рис.2.2 Зависимость $\varphi_{\max}(\delta)$

$$\varphi_0: \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{12} \right]$$

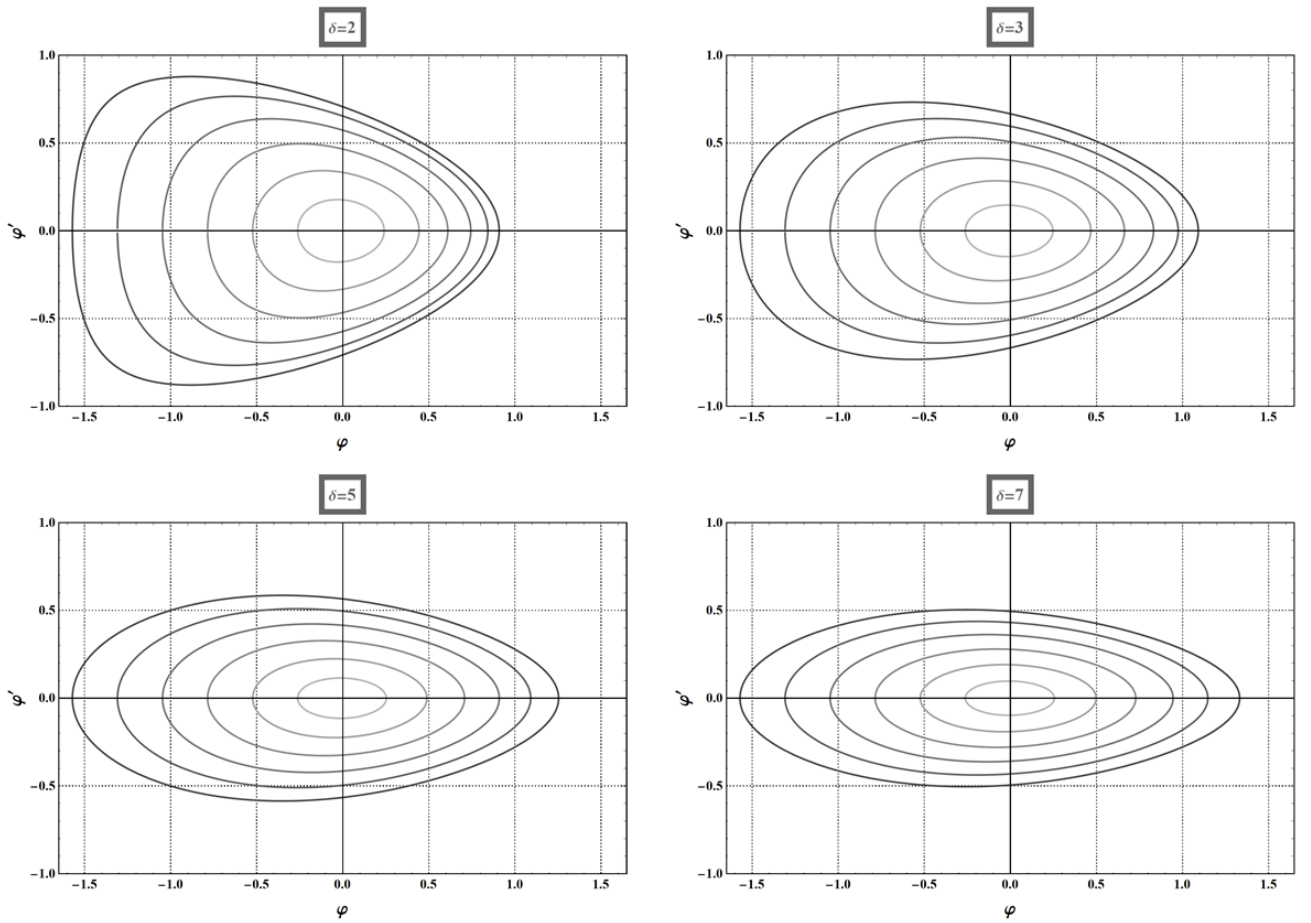


Рис.2.3 Фазовые портреты для $\delta \in \{2,3,5,7\}$

Отметим наблюдаемую на *Рис.2.3* значительную асимметричность фазовых траекторий при соразмерности длин подвесов с радиусом бобины.

$$\varphi_0: \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{12} \right]$$

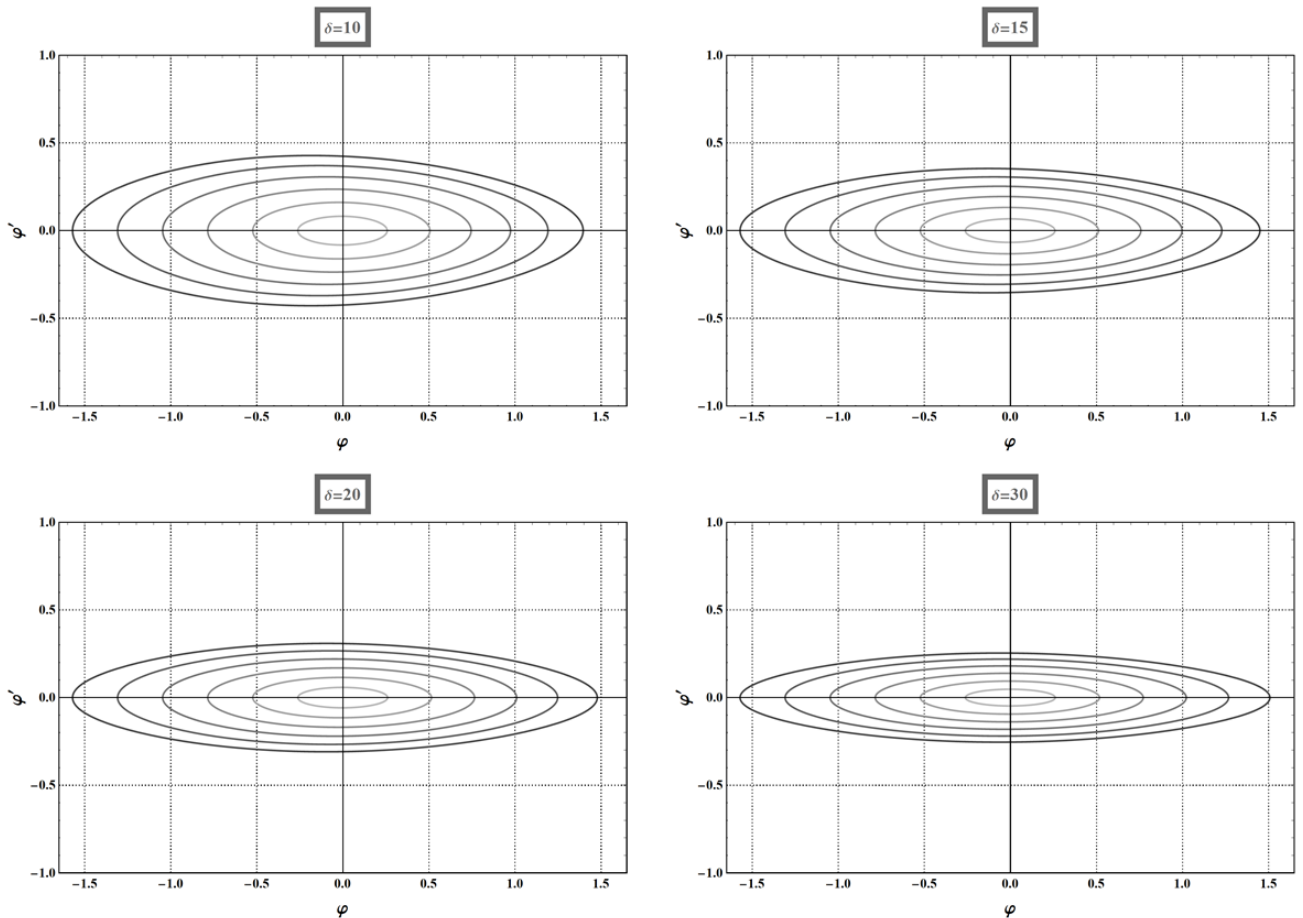


Рис.2.4 Фазовые портреты для $\delta \in \{10,15,20,30\}$

Как и следовало ожидать, для значительно превышающих радиус бобины длин нитей фазовые траектории на *Рис.2.4* приближаются к симметричным.

2.3. Численное интегрирование изученных режимов.

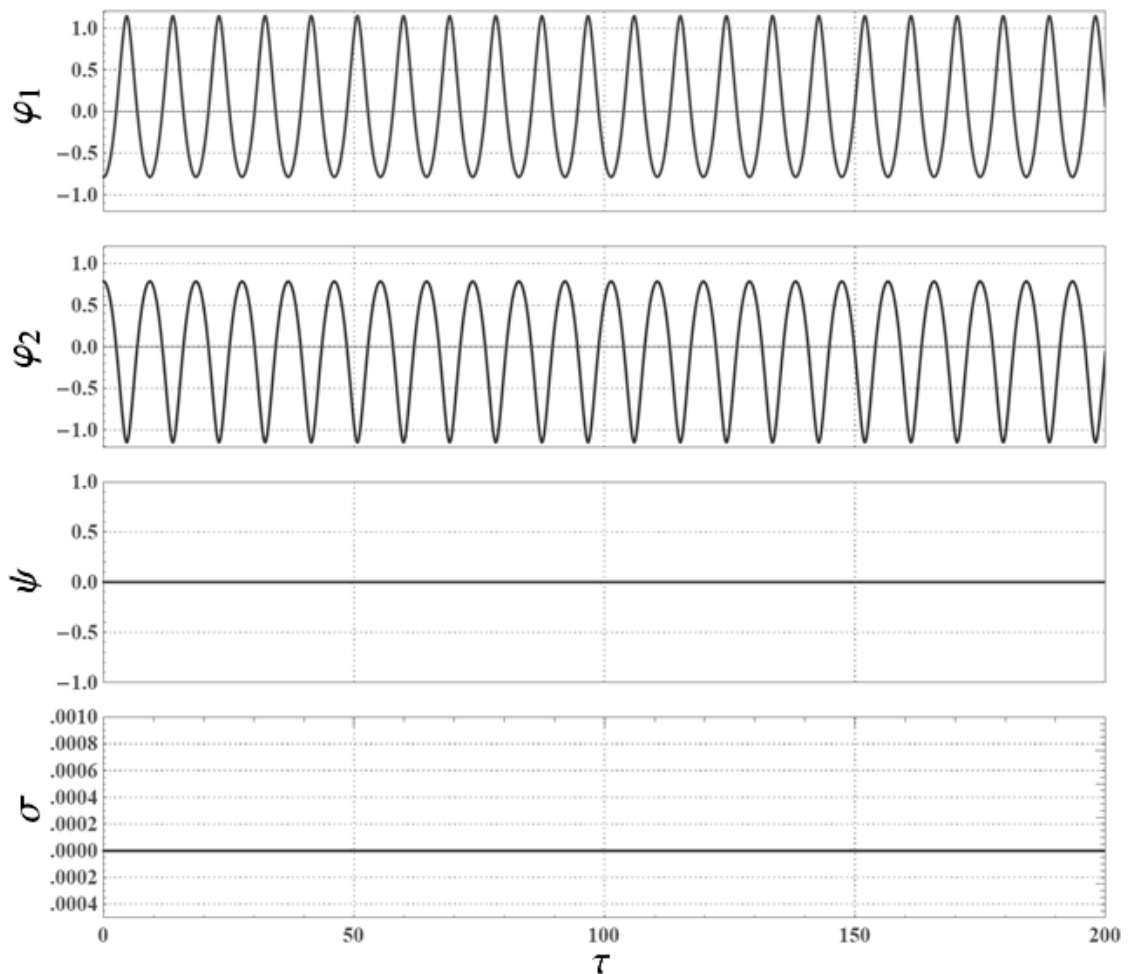
Численное интегрирование дифференциальных уравнений (далее ЧИ) в данном и последующих разделах производилось в пакете компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 11. Для этого использовался имплементированный в пакете метод LSODA – численный метод решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, заключающийся в применении в зависимости от жесткости системы уравнений метода Адамса или метода Гира, также известный как BDF (backward differentiation formula – “формула дифференцирования вспять”).

Введем новое обозначение:

$$\sigma = \frac{S}{k^2 r_1 r_2 \sqrt{m_1 m_2}} = \frac{b \dot{\psi}^2}{2k^2 r_1 r_2 \sqrt{m_1 m_2}} = \frac{\beta \dot{\psi}'^2}{2} \quad (2.3.1)$$

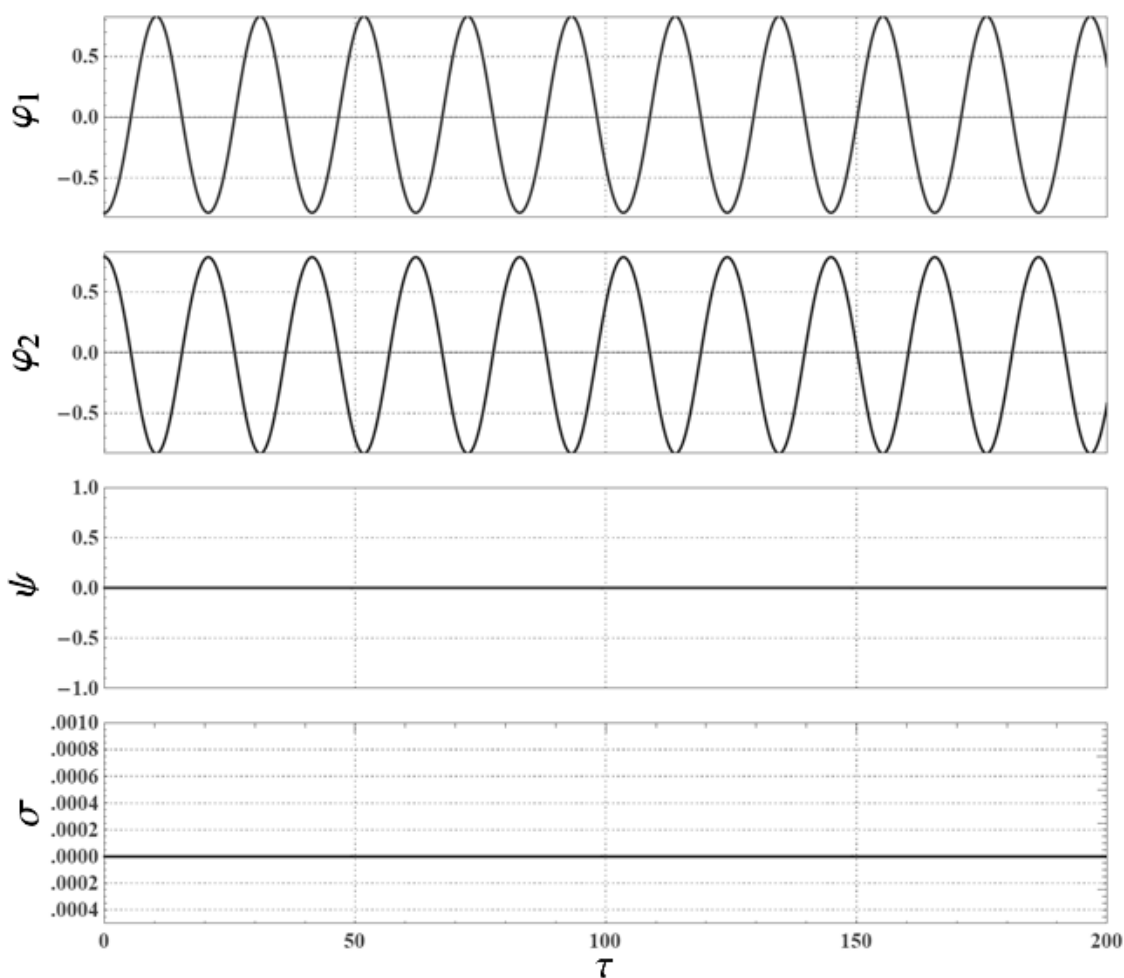
В сущности, σ есть безразмерная диссипативная функция, график зависимости которой от безразмерного времени $\sigma(\tau)$ будет рассматриваться в числе результатов ЧИ наряду с $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Это позволит следить за скоростью рассеяния энергии системы в зависимости от ее поведения.

На *Рис.2.5, 2.6* приведены результаты ЧИ уравнений (2.1.2) для $\delta = 2$ и $\delta = 10$ при одинаковых начальных отклонениях $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. На данных и последующих подобных графиках с результатами ЧИ все необходимые данные указаны на рисунке, в связи с чем нумерация для них не будет сопровождаться описанием.



$$\begin{aligned} r_1=1\text{М} \quad r_2=1\text{М} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=1\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=2\text{М} \quad b=1\text{Вт/с}^2 \\ \rho=1. \quad \delta=2. \quad k=3.132 \quad \mu=1. \quad \beta=0.319 \\ \varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{4} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{4} \quad \psi_0=0 \end{aligned}$$

Рис.2.5



$$\begin{aligned}
 r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=10\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=10\text{м} \quad b=5\text{ВТ/с}^2 \\
 \rho=1. \quad \delta=10. \quad k=3.132 \quad \mu=10. \quad \beta=1.596 \\
 \varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{4} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{4} \quad \psi_0=0
 \end{aligned}$$

Рис.2.6

Сравнивая Рис.2.5 и 2.6, отметим, что асимметричность фазовых траекторий отчетливо видна на графиках $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ при $\delta = 2$ и почти не заметна при $\delta = 10$. Также отметим, что на консервативность режима, как и следовало ожидать, не повлияло изменение связанных с вращением бобины параметров μ и β .

Возможно, колебательная система, описываемая уравнениями (2.1.2), имеет еще не строго консервативный, но слабо-диссипативный “кососимметричный” режим колебаний, который, к сожалению, не поддается такому же простому аналитическому выводу, но интуитивно предсказуем из соображений «энергетической симметрии». Возникает он предположительно в том случае, когда массы начинают свое движение из

положений с равными координатами по оси y , т.е. их потенциальные, а значит и полные при рассматриваемых начальных условиях, энергии равны. Начальные условия в таком случае связаны соотношением

$$y_{1o} = -r(\sin \varphi_{1o} - (\varphi_{1o} - \delta) \cos \varphi_{1o}) = r(\sin \varphi_{2o} - (\varphi_{2o} + \delta) \cos \varphi_{2o}) = y_{2o} \quad (2.3.2)$$

упрощая которое получаем

$$(\varphi_{1o} - \delta) \cos \varphi_{1o} - \sin \varphi_{1o} = \sin \varphi_{2o} - (\varphi_{2o} + \delta) \cos \varphi_{2o} \quad (2.3.3)$$

Если зафиксировать, не умаляя общности, значение φ_{2o} , то относительно φ_{1o} аналогично (2.2.7) мы приходим к трансцендентному уравнению

$$\varphi_{1o} = \delta + \operatorname{tg} \varphi_{1o} + \sec \varphi_{1o} (\sin \varphi_{2o} - (\varphi_{2o} + \delta) \cos \varphi_{2o}) \quad (2.3.4)$$

Рассмотрим его для $\varphi_{2o} = \frac{\pi}{6}$, $\delta = 4$ и $\varphi_{2o} = -\frac{\pi}{12}$, $\delta = 8$, дабы с помощью ЧИ при различных начальных условиях проверить эвристическое утверждение о слабости диссипации при возникающих колебаний.

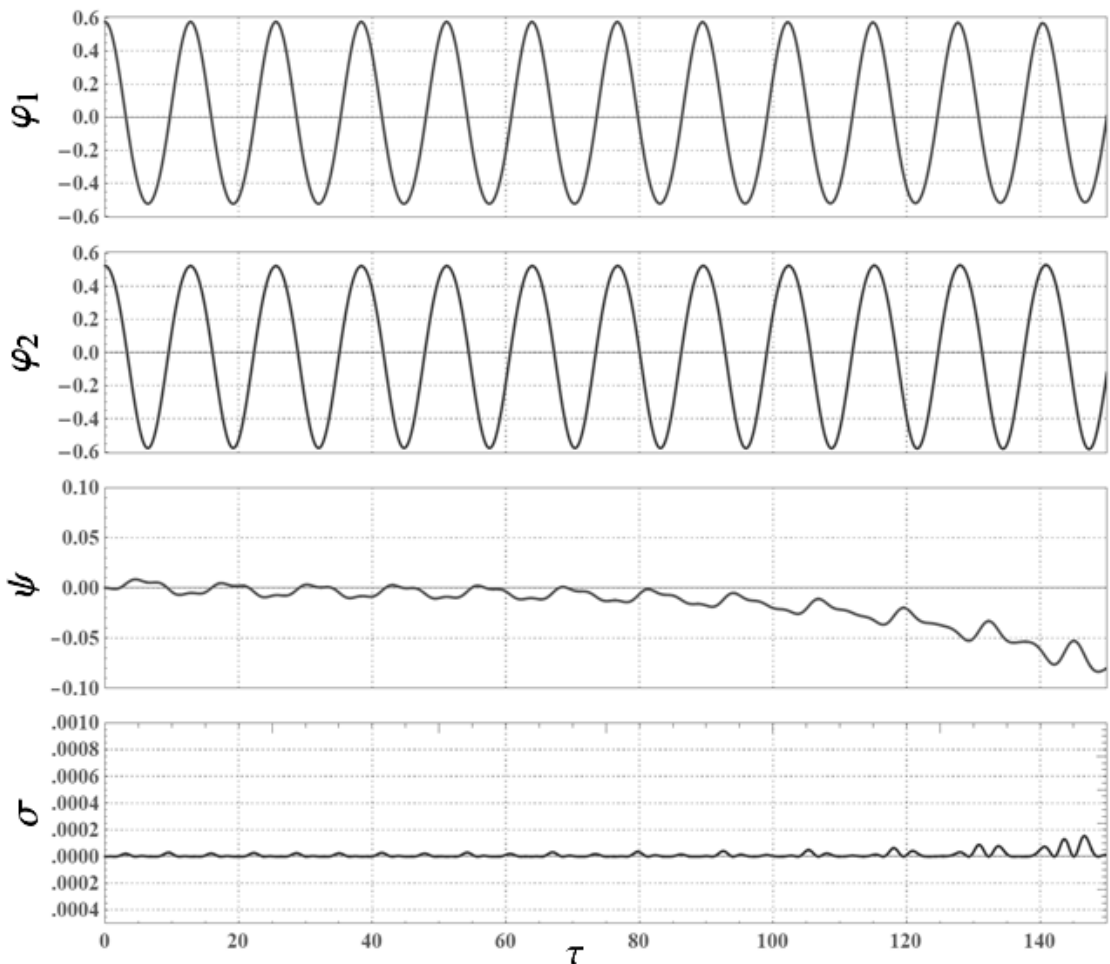
$$\varphi_{2o} = \frac{\pi}{6}, \delta = 4: \quad \varphi_{1o} = 4 + \operatorname{tg} \varphi_{1o} + \sec \varphi_{1o} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + 4 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (2.3.5)$$

В данном случае нас снова интересует первый положительный корень трансцендентного уравнения, приблизительно равный $\varphi_{1o} = 0.575$.

$$\varphi_{2o} = -\frac{\pi}{12}, \delta = 8: \quad \varphi_{1o} = 8 + \operatorname{tg} \varphi_{1o} + \sec \varphi_{1o} \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \left(-\frac{\pi}{12} + 8 \right) \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \quad (2.3.6)$$

Поскольку боковые маятники должны быть отклонены в одном направлении, на этот раз нам нужен первый отрицательный корень, приблизительно равный $\varphi_{1o} = -0.256$.

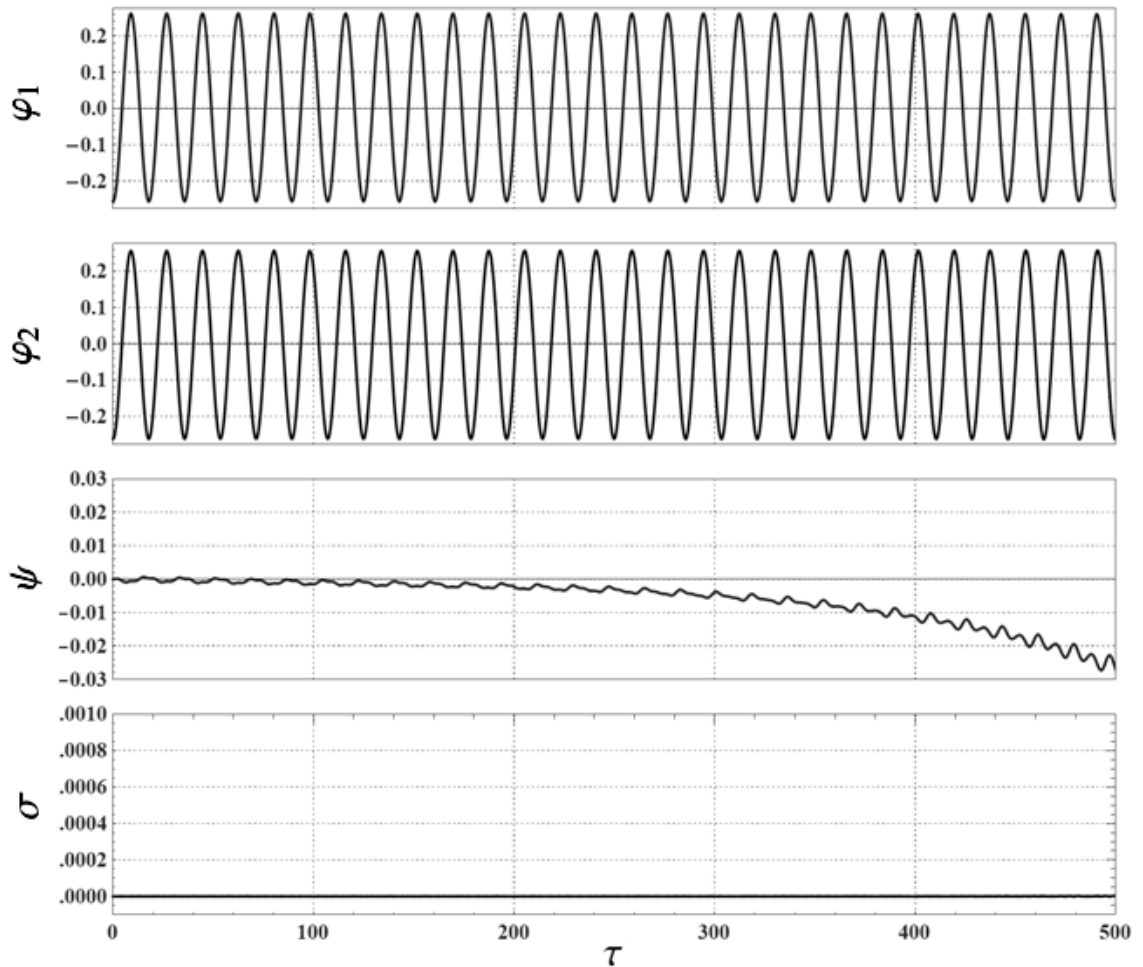
Для ЧИ случая (2.3.5) φ_{1o} брался с точностью до 10^{-10} . Такая точность необходима ввиду того, что заведомо содержащаяся в системе при использовании численного решения энергетическая асимметрия приводит к более значительному проявлению в системе диссипации при вращении бобины. Поэтому для наблюдения приблизительно упомянутой слабой диссипации на протяжении хотя бы десятка периодов необходимо задать достаточно точные начальные условия. Результаты ЧИ представлены соответственно на *Рис.2.5*.



$$\begin{aligned}
 r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=10\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=4\text{м} \quad b=5\text{ВТ/с}^2 \\
 \rho=1. \quad \delta=4. \quad k=3.132 \quad \mu=10. \quad \beta=1.596 \\
 \varphi_{1_0}=0.575277 \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_0=0
 \end{aligned}$$

Рис.2.5

На Рис.2.5 видим, что на протяжении приблизительно первых десяти периодов колебания оказываются слабо-диссипативными. Если бы начальные условия можно было задать с произвольной точностью, то значение ψ продолжало бы незначительные колебания около нуля. Для проверки этой гипотезы выполним ЧИ случая (2.3.6) взяв φ_{1_0} сначала с точностью до 10^{-3} , а затем до 10^{-10} (Рис.2.6, 2.7). Также возьмем бóльшие длины нитей при том же радиусе бобины, т.к. тогда начальные координаты масс по оси y , определяющие их запасы энергии, становятся чувствительнее к начальным значениям $\varphi_{1_0}, \varphi_{2_0}$, повышая показательность испытания зависимости продолжительности колебаний значения ψ около нуля от точности задания начальных условий.

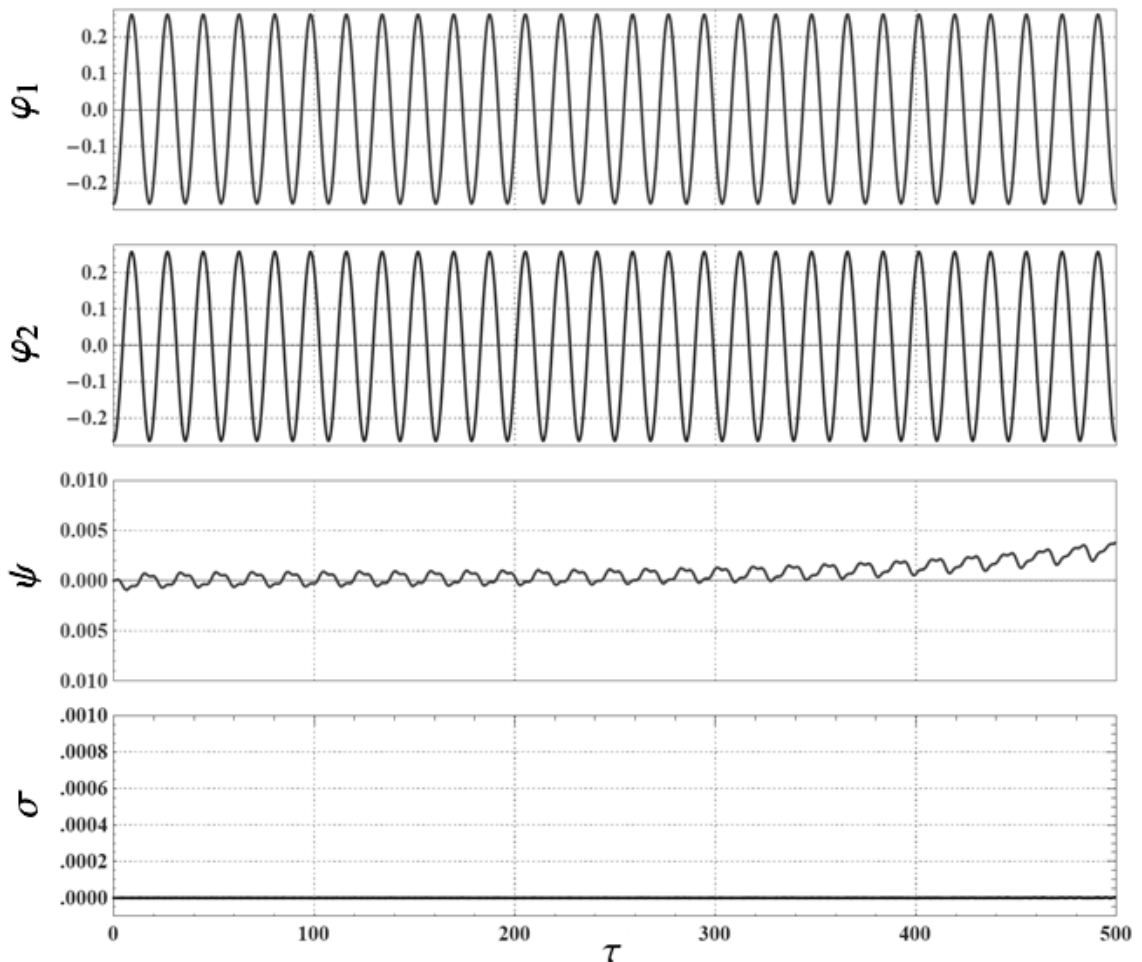


$$\begin{aligned}
 r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=10\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=8\text{м} \quad b=5\text{Вт}/\text{с}^2 \\
 \rho=1. \quad \delta=8. \quad k=3.132 \quad \mu=10. \quad \beta=1.596 \\
 \varphi_{1_0}=-0.256 \quad \varphi_{2_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \psi_0=0
 \end{aligned}$$

Рис.2.6

Отметим, что на Рис.2.6 возрастание угла ψ происходит не том же направлении, что на Рис.2.7, а значит логично предположить, что в связи с непрерывностью системы по всем координатам между взятыми значениями φ_{1_0} существует такое, при котором значение ψ неограниченно долго слабо колеблется около нуля.

Вероятно, применение соображений “энергетической симметрии” может помочь найти еще менее очевидные режимы с малым рассеянием энергии для общего, несимметричного случая бинарного маятника.



$$r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=10\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=8\text{м} \quad b=5\text{Вт/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=8. \quad k=3.132 \quad \mu=10. \quad \beta=1.596$$

$$\varphi_{1_0}=-0.25618 \quad \varphi_{2_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \psi_0=0$$

Рис.2.6

3. Эволюция движения бинарного маятника

3.1. Проверка устойчивости консервативного режима

Рассмотрим поведение системы при внесении малой асимметрии в начальные условия или в параметры бинарного маятника. Если исследованный в предыдущей части работы консервативный режим устойчив, то эта малая асимметрия со временем будет нивелирована, и в своем стремлении сократить влияния на себя сил трения система придет к симметричным колебаниям без рассеяния механической энергии.

Введем ряд вспомогательных понятий для описания эволюции движения рассматриваемой системы:

- Обозначим за $\tau_{\text{пер}}$ безразмерное время переходного процесса до установления некоторого определенного режима колебаний. Величину $\tau_{\text{пер}}$ будем определять приблизительно для каждого рассмотренного случая в зависимости от наблюдаемого поведения системы.
- За $\tau_{\text{инт}}$ обозначим правую безразмерно-временную границу промежутка ЧИ.
- Примем n_1 и n_2 равными числу прохождения соответственно φ_1 и φ_2 через ноль на промежутке $[\tau_{\text{пер}}; \tau_{\text{инт}}]$. Тогда назовем “частотами” колебаний боковых маятников следующие величины:

$$v_1 = \frac{n_1}{2(\tau_{\text{инт}} - \tau_{\text{пер}})} \quad v_2 = \frac{n_2}{2(\tau_{\text{инт}} - \tau_{\text{пер}})} \quad (3.1.1)$$

- Будем вычислять среднее за рассмотренное время установившихся колебаний значение угла поворота бобины:

$$\psi_{\text{ср}} = \frac{\int_{\tau_{\text{пер}}}^{\tau_{\text{инт}}} \psi d\tau}{\tau_{\text{инт}} - \tau_{\text{пер}}} \quad (3.1.2)$$

- Тогда можем также рассматривать средние длины нитей:

$$l_{1\text{ср}} = l + \psi_{\text{ср}} r_1 \quad l_{2\text{ср}} = l - \psi_{\text{ср}} r_2 \quad (3.1.3)$$

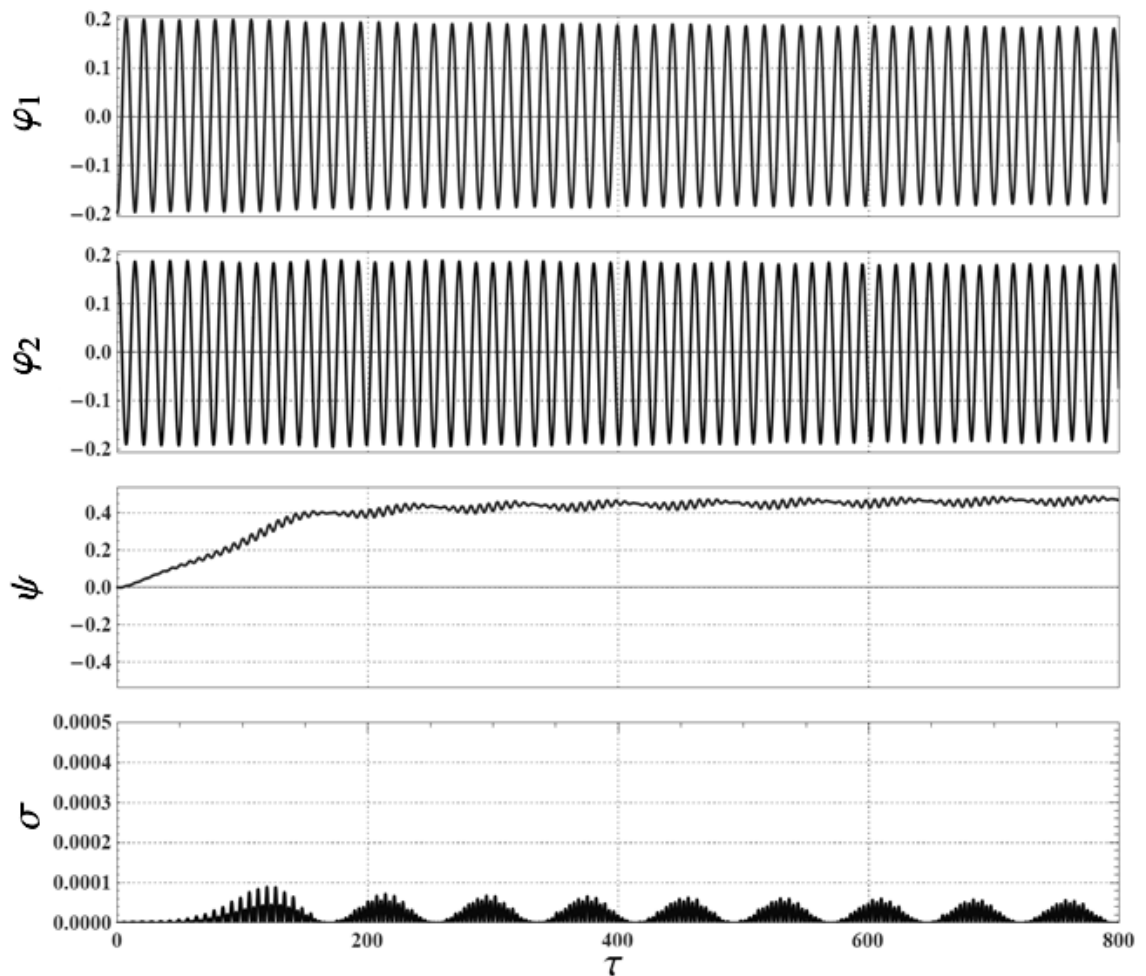
Избавимся от размерностей, разделив на $\sqrt{r_1 r_2}$, и введем обозначения:

$$\lambda_1 = \frac{l_{1\text{ср}}}{\sqrt{r_1 r_2}} = \delta + \frac{\psi_{\text{ср}}}{\rho} \quad \lambda_2 = \frac{l_{2\text{ср}}}{\sqrt{r_1 r_2}} = \delta - \rho \psi_{\text{ср}} \quad (3.1.4)$$

- Наконец введем следующие безразмерные величины:

$$\gamma_1 = \lambda_1 v_1^2 \quad \gamma_2 = \lambda_2 v_2^2 \quad (3.1.5)$$

Мотивацией для введения γ_1, γ_2 стало сходство боковых эвольвентных маятников с обычным математическим маятником, для которого верно равенство $\nu = \sqrt{\frac{g}{l}}$, откуда $g = l\nu^2$. Коль скоро величина ускорения свободного падения g для всех земных маятников с высокой степенью точностью одинакова, то и значение $l\nu^2$ тоже. Безразмерными аналогами данного произведения и являются γ_1, γ_2 , приблизительное равенство значений которых между собой будет проверяться в результатах ЧИ. Сначала разберем случай разных начальных углов отклонения и возьмем для них близкие по модулю значения $\varphi_{1o} = -\frac{\pi}{16}, \varphi_{2o} = \frac{\pi}{17}$ (Рис.3.1).



$$r_1=1\text{M} \quad r_2=1\text{M} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=1\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=5\text{м} \quad b=1\text{Вт}/\text{с}^2$$

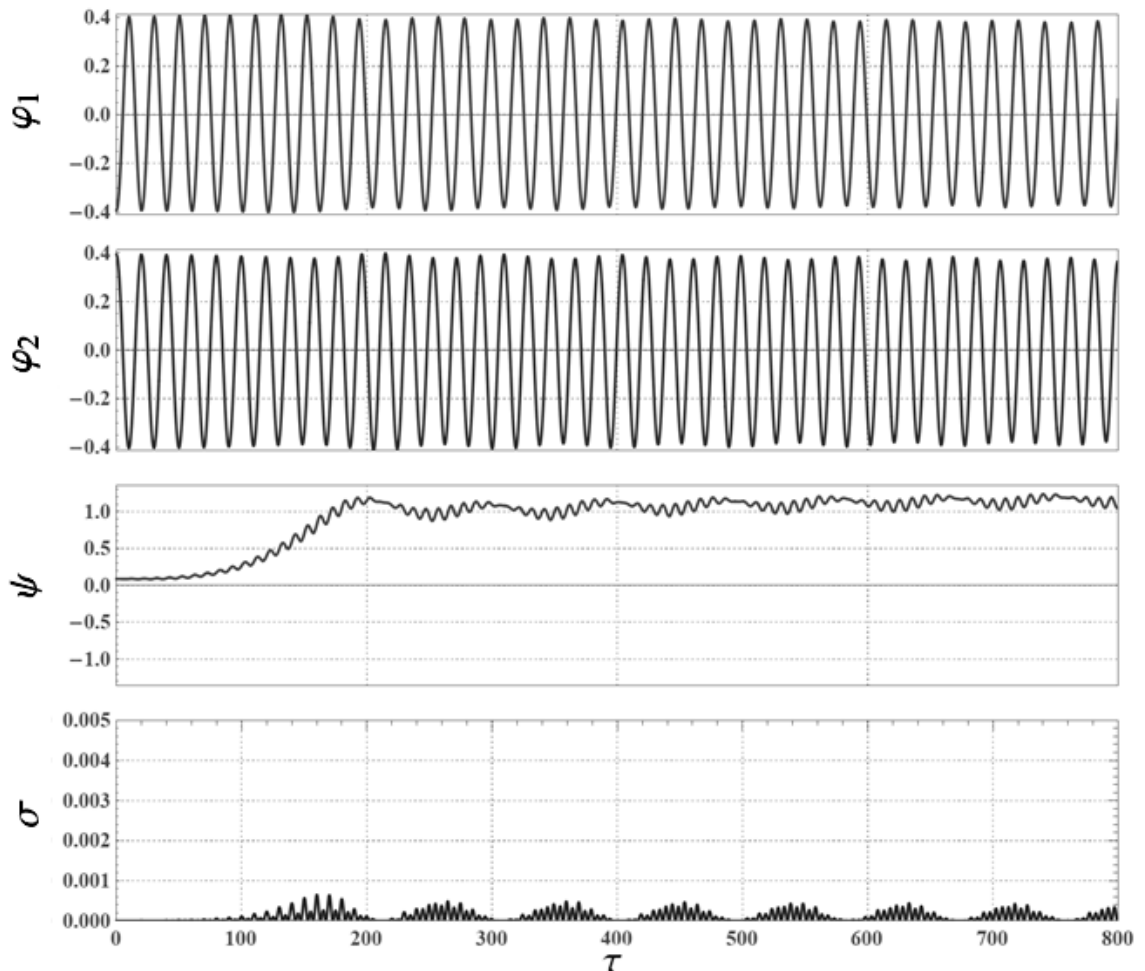
$$\rho=1. \quad \delta=5. \quad k=3.132 \quad \mu=1. \quad \beta=0.319 \quad \tau_{\text{пер}}=200$$

$$\varphi_{1o}=-\frac{\pi}{16} \quad \varphi_{2o}=\frac{\pi}{17} \quad \psi_o=0$$

Рис.3.1

По результатам ЧИ наблюдается уход системы от симметричных колебаний и возрастание угла поворота бобины, но возрастание это не является неограниченным. Начиная приблизительно с $\tau_{пер} = 200$ значение ψ приобретает постоянную составляющую и незначительно колеблется около нее, достаточно медленно рассеивая механическую энергию системы. Причем в этом установившемся режиме $\gamma_1 \approx 0.0254$, $\gamma_2 \approx 0.0256$, т.е. оказывается $\gamma_1 \approx \gamma_2$.

Теперь рассмотрим асимметрию, обусловленную малым, но ненулевым значением $\psi_0 = \frac{\pi}{36}$, приводящую к разнице длин нитей в начальный момент, при равных по модулю начальных углах $\varphi_{10} = -\frac{\pi}{8}$, $\varphi_{20} = \frac{\pi}{8}$ (Рис.3.2).



$$r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=5\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=10\text{м} \quad b=1\text{Вт}/\text{с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=10. \quad k=3.132 \quad \mu=5. \quad \beta=0.319 \quad \tau_{пер}=250$$

$$\varphi_{10}=-\frac{\pi}{8} \quad \varphi_{20}=\frac{\pi}{8} \quad \psi_0=\frac{\pi}{36}$$

Рис.3.2

Бинарный маятник снова демонстрирует отсутствие стремления купировать асимметрию, и в целом поведение маятника слабо отличается от представленного на *Рис.3.1*. Однако, примечательным является факт сохранения закономерности приближительного равенства $\gamma_1 \approx \gamma_2$, а именно $\gamma_1 \approx 0.0258$, $\gamma_2 \approx 0.0248$. Причем закономерность сохранилась даже при том, что были взяты бóльшие длины нитей и более инертная бобина.

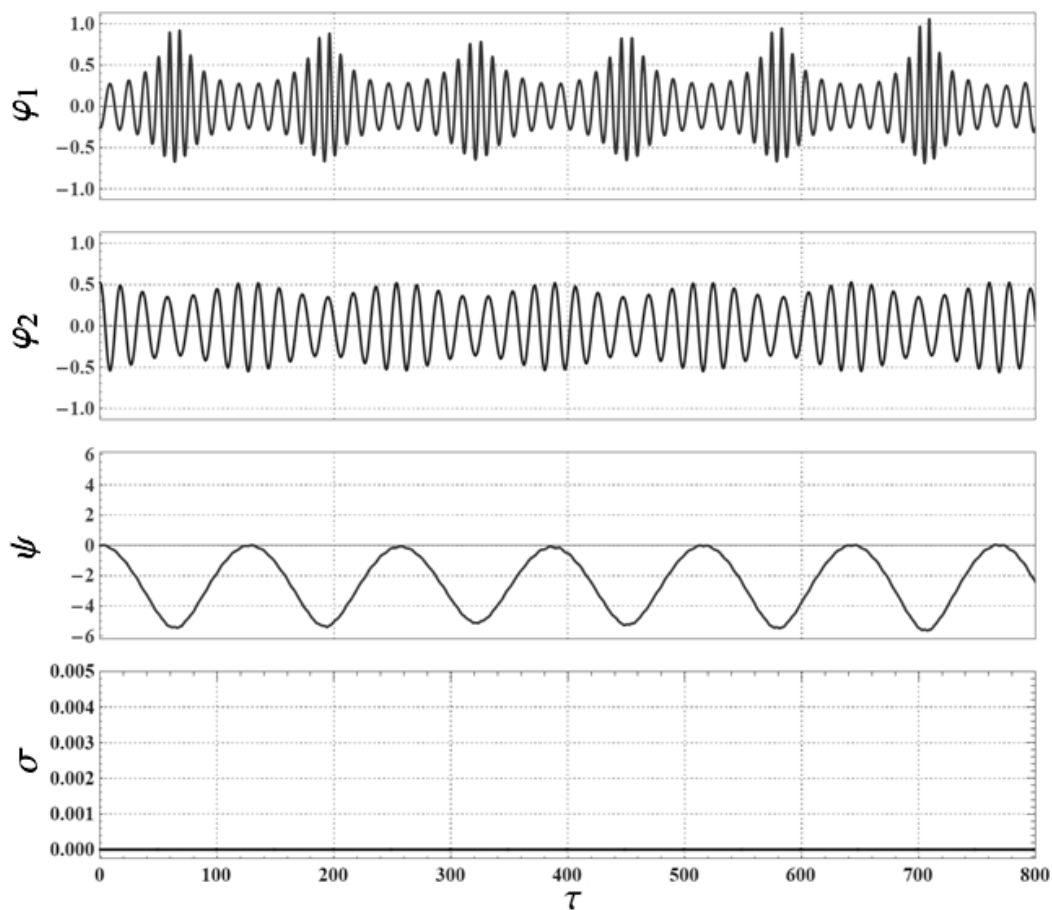
Что касается описанного в предыдущей части работы слабо-диссипативного “кососимметричного” режима, его неустойчивость не вызывает сомнений, т.к. система не удерживается в нем даже при незначительной ошибке в задании начальных условий, порождаемой заведомо приближительной природой решений трансцендентных уравнений.

3.2. Зависимость эволюции движения от наличия диссипации

Будем рассматривать поведение бинарного маятника при одинаковых начальных условиях в отсутствие трения на оси бобины и при его наличии. В отличие от предыдущего раздела мы можем рассматривать значительно асимметричные начальные условия, поэтому возьмем для начала существенно отличающиеся начальные углы отклонений боковых маятников $\varphi_{1o} = -\frac{\pi}{12}$, $\varphi_{2o} = \frac{\pi}{6}$.

Для начала рассмотрим случай отсутствия диссипации на оси (*Рис.3.3, 3.4*). Как видно на *Рис.3.3* в системе в таком случае наблюдаются сложные биения, наверняка не являющиеся периодическими в строгом смысле этого слова, но однозначно обладающие некоторой периодической природой. Эта периодичность также хорошо просматривается на *Рис.3.4* по траекториям движения грузов боковых маятников.

Поскольку в устанавливаемом режиме значение угла ψ значительно колеблется, а вместе с ним и длины нитей, то рассматривать для этого случая значения γ_1, γ_2 нецелесообразно.



$$r_1=1\text{M} \quad r_2=1\text{M} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=8\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=7.2\text{M} \quad b=0\text{ВТ/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=7.2 \quad k=3.132 \quad \mu=8. \quad \beta=0.$$

$$\varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_0=0$$

Рис.3.3

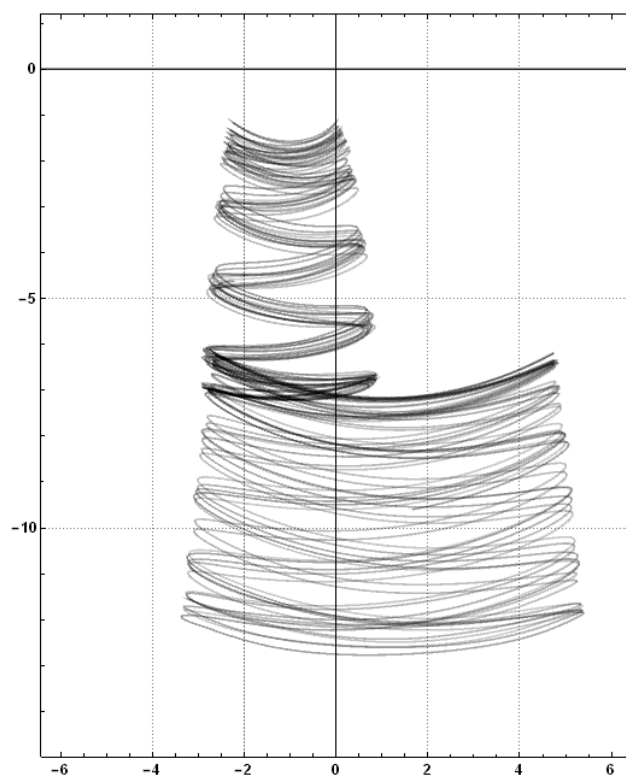
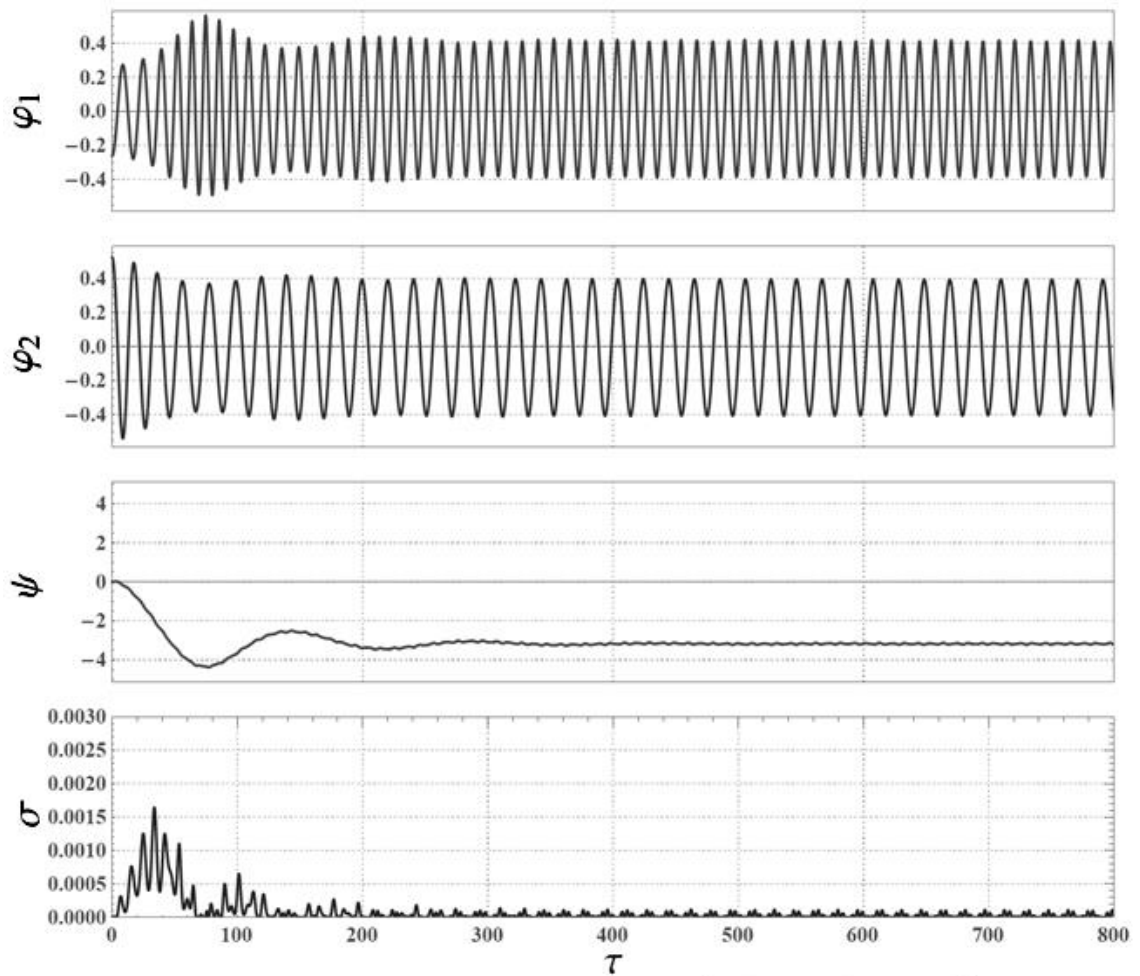


Рис.3.4 Траектории движения грузов в отсутствие диссипации

Теперь при тех же начальных условиях будем наблюдать поведение системы при наличии в ней диссипации (Рис.3.5).



$$r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=8\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=7.2\text{м} \quad b=0.7\text{Вт/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=7.2 \quad k=3.132 \quad \mu=8. \quad \beta=0.223 \quad \tau_{\text{пер}}=400$$

$$\varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_0=0$$

Рис.3.5

В этом случае биения в системе уже не наблюдаются, а эволюция движения схожа с рассмотренной в предыдущем разделе – угол ψ приобретает некоторую постоянную составляющую и слабо колеблется около нее, медленно рассеивая механическую энергию. Несмотря на то, что сделанное в начале исследования предположение о симметричной природе устанавливающегося в системе режима колебаний оказалось неверным, наблюдаемое поведение хорошо согласуется с рассуждениями П. Аппеля о стремлении механических систем минимизировать работу сил трения.

Устанавливающийся режим колебаний также хорошо виден по траекториям движения масс (Рис.3.6), причем $\gamma_1 \approx 0.0259$, $\gamma_2 \approx 0.0247$.

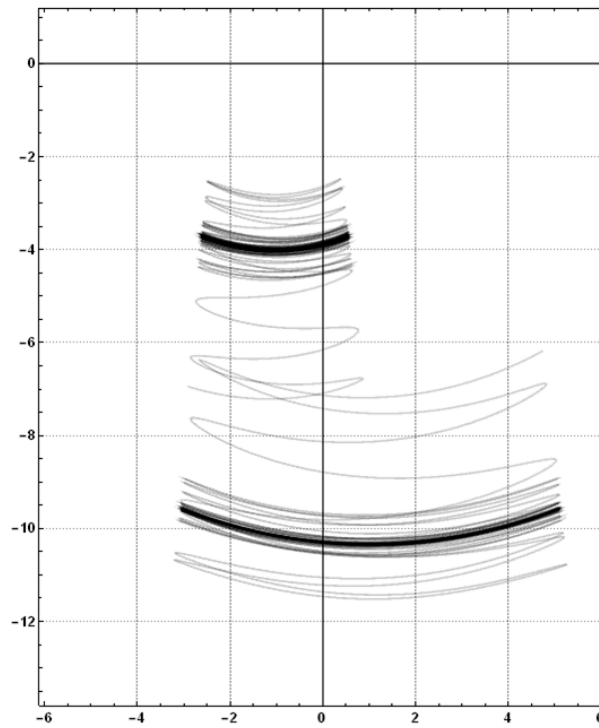
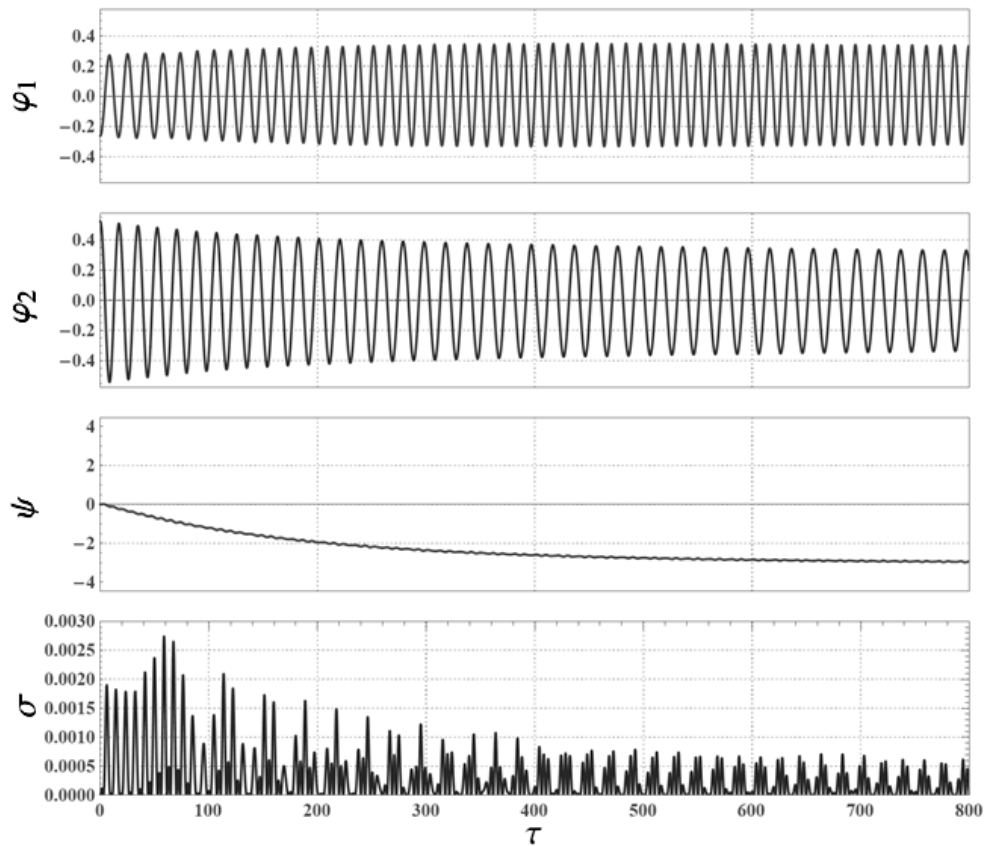


Рис.3.6 Траектории движения грузов при наличии диссипации

Для лучшего понимания характера влияния диссипации на движение системы разберем случай большего трения на оси вращения (Рис.3.7).



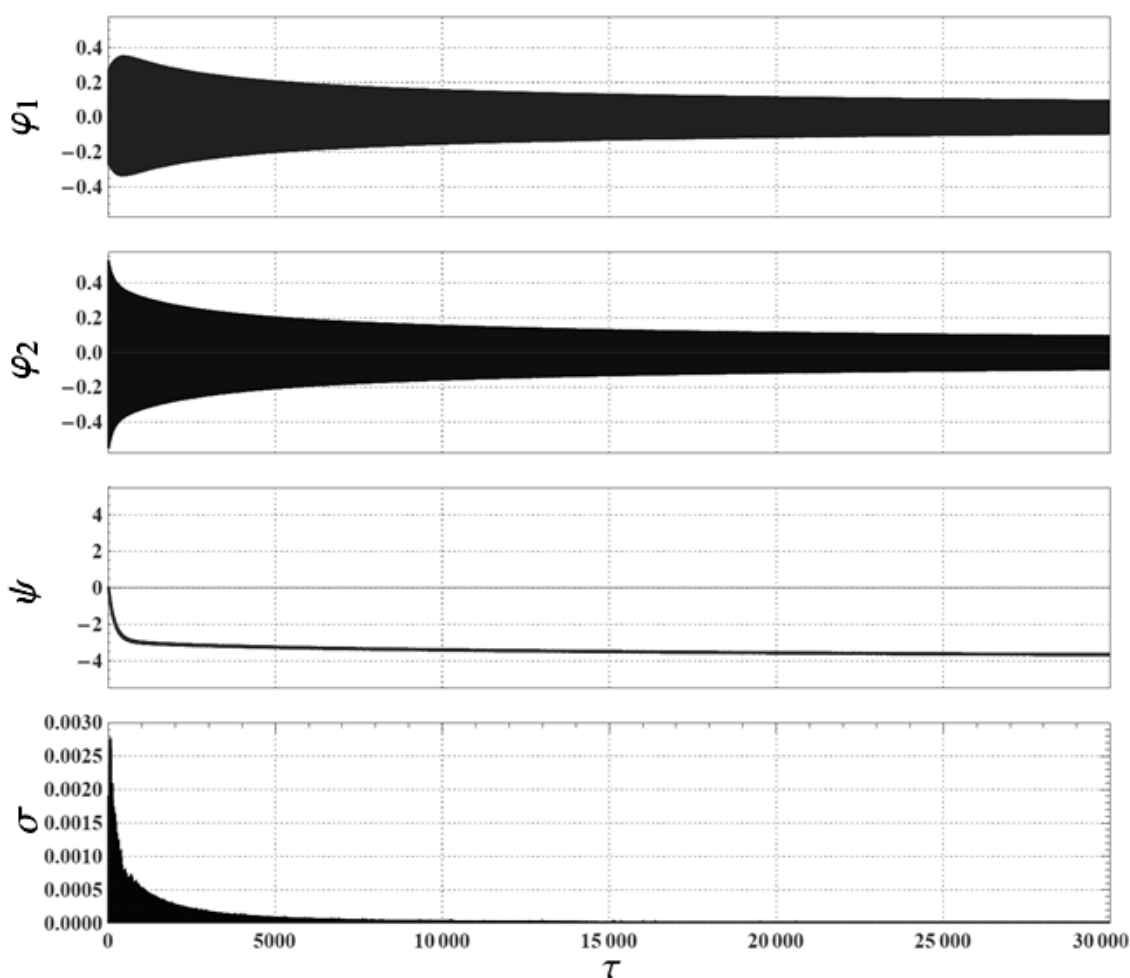
$$r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=8\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=7.2\text{м} \quad b=10\text{Вт/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=7.2 \quad k=3.132 \quad \mu=8. \quad \beta=3.193 \quad \tau_{\text{пер}}=400$$

$$\varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_0=0$$

Рис.3.7

Как видим, в этом случае движение системы приходит в очень похожий режим, но сам переход происходит значительно более плавно. Закономерность $\gamma_1 \approx \gamma_2$ снова выполняется: $\gamma_1 \approx 0.0246$, $\gamma_2 \approx 0.0251$. Дальнейшая эволюция системы представляет из себя крайне медленное рассеяние энергии с медленным ростом составляющей ψ , около которой происходят колебания величины этого угла (Рис.3.8). Приблизительное равенство $\gamma_1 \approx \gamma_2$ при этом сохраняется. На практике при рассмотрении промежутков времени не превосходящих нескольких сотен периодов колебаний такое движение можно приближенно считать консервативным.



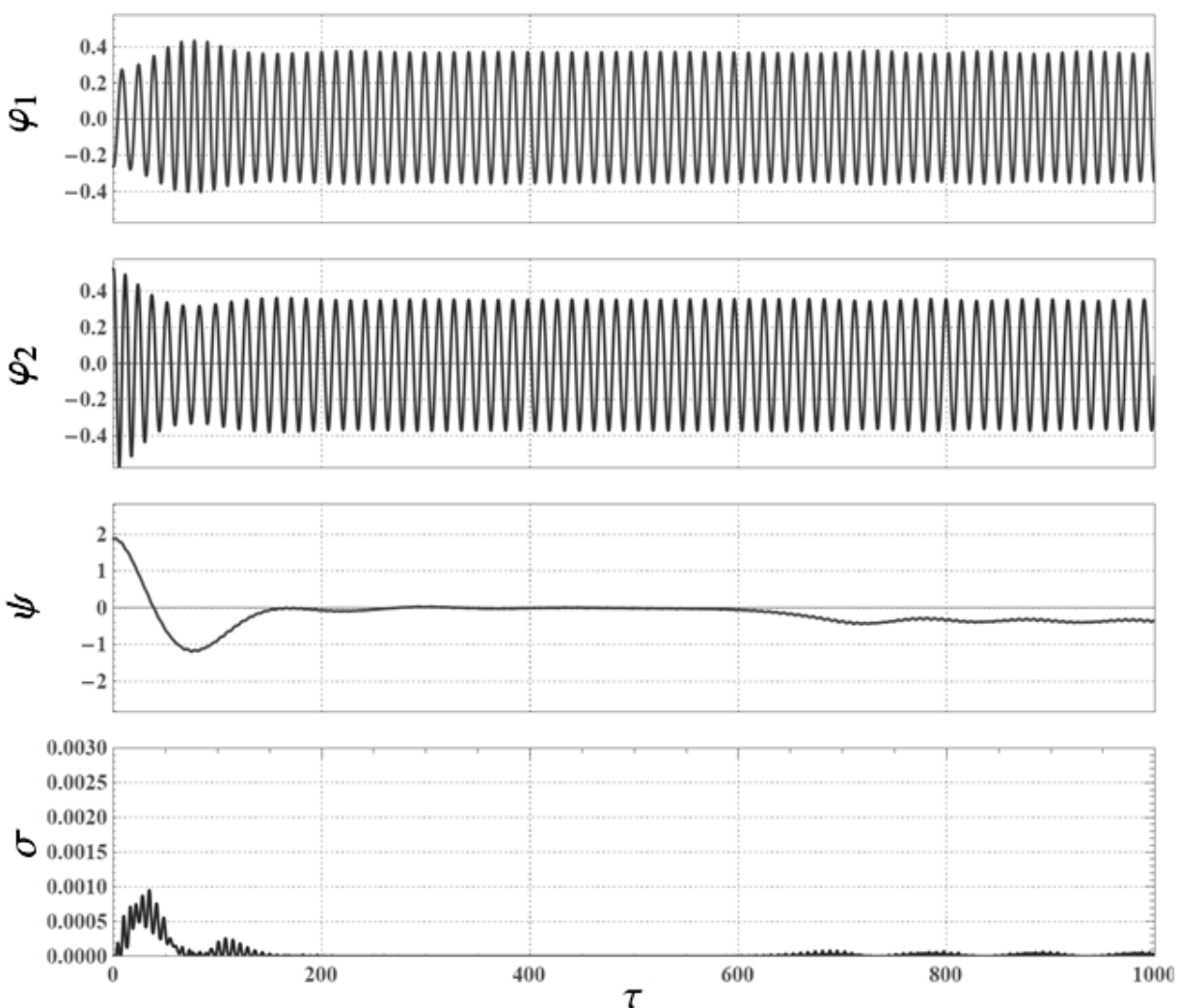
$$r_1=1\text{м} \quad r_2=1\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=8\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=7.2\text{м} \quad b=10\text{ВТ/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=7.2 \quad k=3.132 \quad \mu=8. \quad \beta=3.193 \quad \tau_{\text{пер}}=20\,000$$

$$\varphi_{1_0}=-\frac{\pi}{12} \quad \varphi_{2_0}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_0=0$$

Рис.3.8

Теперь рассмотрим интересный случай совмещенной асимметрии по начальным углам отклонения $\varphi_{1o} = -\frac{\pi}{12}$, $\varphi_{2o} = \frac{\pi}{6}$, начальным длинам нитей $\psi_o = 1.87992$ (Рис.3.9). В этом случае прежде, чем колебания устанавливаются в асимметричном режиме наблюдается достаточно продолжительный промежуток колебаний в эвристически предсказанном в предыдущей части работы почти консервативном режиме. Задержка эволюции движения на этом энергетическом плато связана именно с падением диссипации в системе почти до нуля. Но вследствие неустойчивости данного режима, систему выводит из него пусть малая, но присутствующая диссипация.



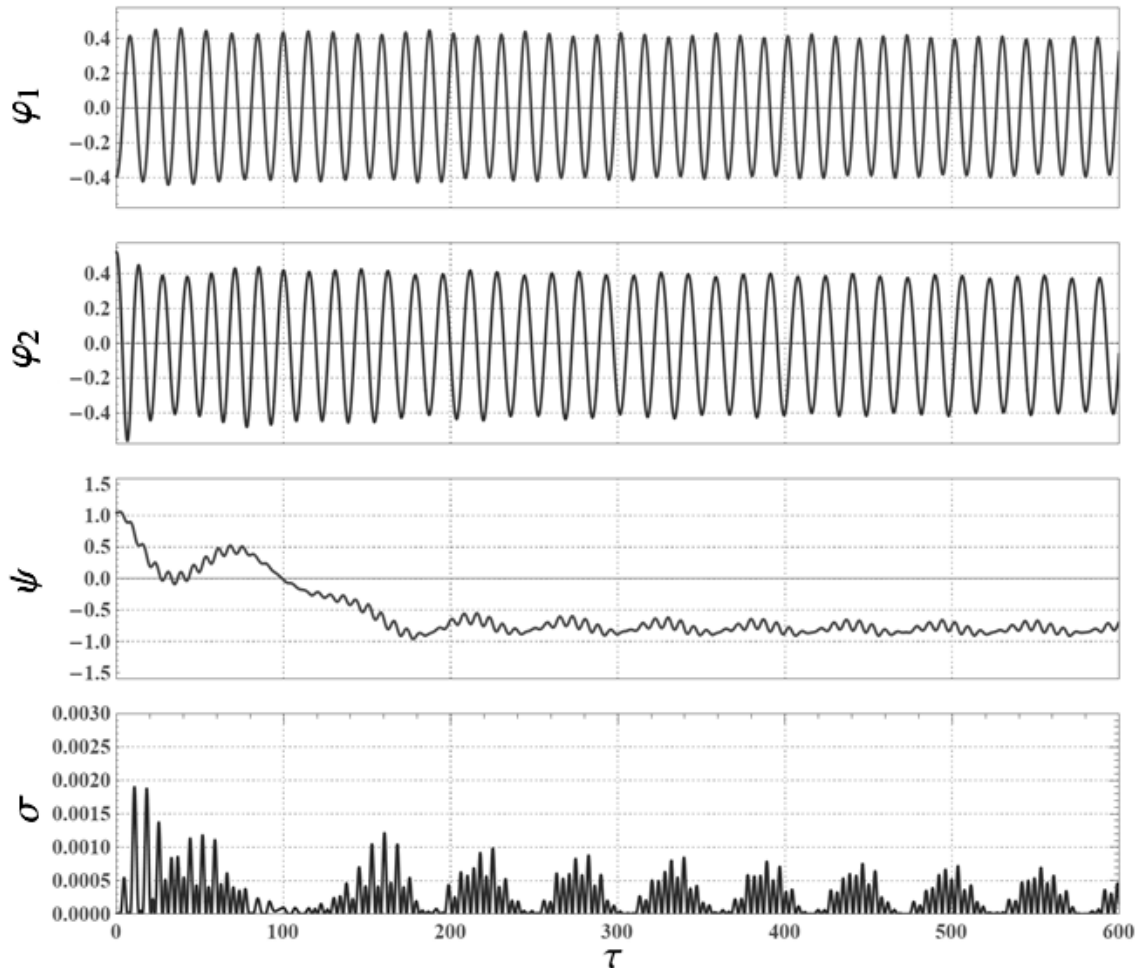
$$r_1=1\text{M} \quad r_2=1\text{M} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=1\text{кг} \quad J=10\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=5\text{M} \quad b=1\text{Вт/с}^2$$

$$\rho=1. \quad \delta=5. \quad k=3.132 \quad \mu=10. \quad \beta=0.319 \quad \tau_{\text{пер}}=800$$

$$\varphi_{1o}=-\frac{\pi}{12} \quad \varphi_{2o}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_o=1.87992$$

Рис.3.9

В заключение рассмотрим совмещенную асимметрию по начальным условиям ($\varphi_{1o} = -\frac{\pi}{8}, \varphi_{2o} = \frac{\pi}{6}, \psi_o = \frac{\pi}{3}$) с несимметричностью конструкции самого бинарного маятника, т.е. нити боковых маятников в этом случае намотаны на участки бобины разных радиусов $r_1 = 1\text{м}, r_2 = 2\text{м}$. (Рис.3.10).



$$r_1=1\text{м} \quad r_2=2\text{м} \quad m_1=1\text{кг} \quad m_2=\frac{1}{2}\text{кг} \quad J=3\text{кг}\cdot\text{м}^2 \quad l=8\text{м} \quad b=1\text{Вт}/\text{с}^2$$

$$\rho=1.414 \quad \delta=5.657 \quad k=2.634 \quad \mu=2.121 \quad \beta=0.268 \quad \tau_{\text{пер}}=250$$

$$\varphi_{1o}=-\frac{\pi}{8} \quad \varphi_{2o}=\frac{\pi}{6} \quad \psi_o=\frac{\pi}{3}$$

Рис.3.10

Система снова демонстрирует стремление к несимметричному, но очень медленно рассеивающему энергию режиму колебаний. К тому же, асимметрии разного рода и даже изменение конструкции бинарного маятника не влияют на выполняемость приблизительного равенства $\gamma_1 \approx \gamma_2$, в данном случае $\gamma_1 \approx 0.0249$, $\gamma_2 \approx 0.0244$. Как можно было догадаться, в случае симметричных начальных условий, приводящих к возникновению консервативных колебаний бинарного маятника, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.025$.

Заключение

В настоящей работе была исследована нетривиальная диссипативная колебательная система с тремя степенями свободы – бинарный маятник с трением на оси вращения. Для него была составлена система уравнений движения, проведена проверка корректности данной системы и подготовка ее к численному интегрированию.

Были изучены частные случаи симметричного движения системы, демонстрирующие отсутствие или малость рассеяния механической энергии. На основе рассуждений П. Аппеля была выдвинута гипотеза, что такие режимы могут обладать устойчивостью. Другими словами, предположение заключалось в способности бинарного маятника в своем стремлении минимизировать работу диссипативных сил купировать незначительную асимметрию, закладываемую в него начальными условиями. В ходе исследования данная гипотеза была эмпирически опровергнута. Однако согласованность поведения системы с общей закономерностью избегания механическими системами действия на них сил трения была обнаружена в отличном от предположенного виде.

Также в работе была рассмотрена зависимость эволюции динамики бинарного маятника от присутствующей на его оси диссипации в условиях асимметрии начальных отклонений и конструкции самого маятника.

В целом в связи со сложностью модели и большим числом свободных параметров, описывающих ее конфигурацию, данная работа носит скорее обзорный характер и является первым шагом в направлении понимания эволюционной механики нетривиальных диссипативных систем со многими степенями свободы.

Перспективными направлениями для продолжения исследования являются:

- более детальное исследование зависимости поведения системы от параметров, определяющих ее конфигурацию
- рассмотрение подобного исследованному двойного эвольвентного маятника с диссипацией в растяжимых нитях вместо оси бобины
- обобщение рассмотренной системы на n – арный случай с подвешенными на бобину n маятниками
- проведение аналогии между рассмотренной задачей и задачей небесной механики о двух телах с учетом диссипации энергии гравитирующих тел вследствие внутреннего гистерезиса

Несмотря на обзорный характер работы, ответы на изначально поставленные вопросы были получены, а все перечисленные этапы исследования были сопровождаемы достаточным количеством наглядных иллюстраций. В связи с этим цель настоящей работы следует считать достигнутой.

Список литературы

1. Ламб Г. Теоретическая механика. Т.2. Динамика. М., Л.: ГТТИ, 1935. – 311 с.
2. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: «Наука», 1972. – 470 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М., Ижевск: «R&C Dynamics», 2009. – 407 с.
4. Голубева О.В. Теоретическая механика. М: «Высшая школа», издание 2-е, 1968. – 487 с.
5. Магнус К. Колебания: введение в исследование колебательных систем. – М.: «Мир», 1982. – 304 с.
6. Смирнов А.С., Смольников Б.А. О соответствии эволюционной и классической моделей внутренней диссипации., СПбПУ Петра Великого 2016.
7. Смольников Б.А. Эволюционная динамика маятниковых систем. Теория Механизмов и Машин. 2008. №1. Том 6. – 235 с.
8. Смольников Б.А. Фрактальное твердое тело в задачах аналитической механики. Труды семинара А.Л.Смирнова 2008. – 167 с.
9. Аппель П. Теоретическая механика. Том 2. Динамика системы. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1960. – 487 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – Т.1. – 214 с.