



Выпускная квалификационная работа магистра
по направлению 151600 «Прикладная механика»

Развитие методов двухкомпонентной теории в нестационарных задачах теплопроводности

(при поддержке гранта РФФИ № 15-19-00182)

Выполнил студент группы 23645/1

Кудрявцев А.А.

Научный руководитель

Индейцев Д.А.

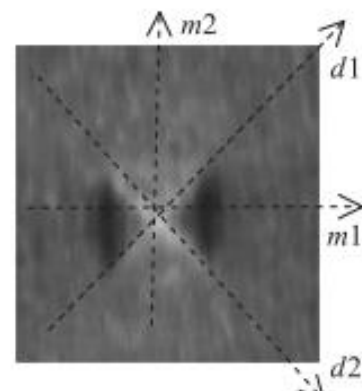
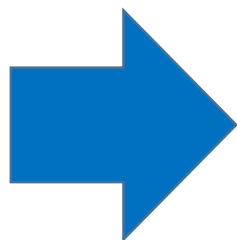
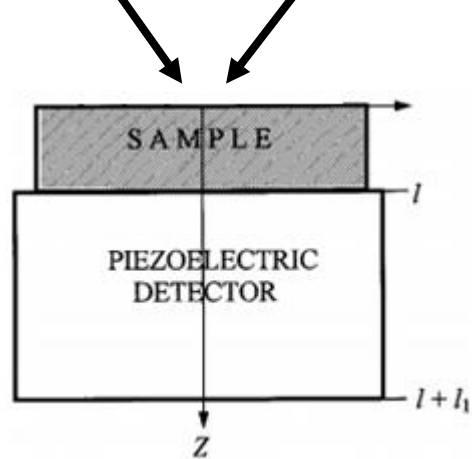
Член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук

Санкт-Петербург
2018

Мотивация исследования. Эксперимент^{1,2}

Экспериментально установлено влияние внешних механических напряжений на параметры фотоакустических сигналов внутри отпечатков Виккерса в стали У8.

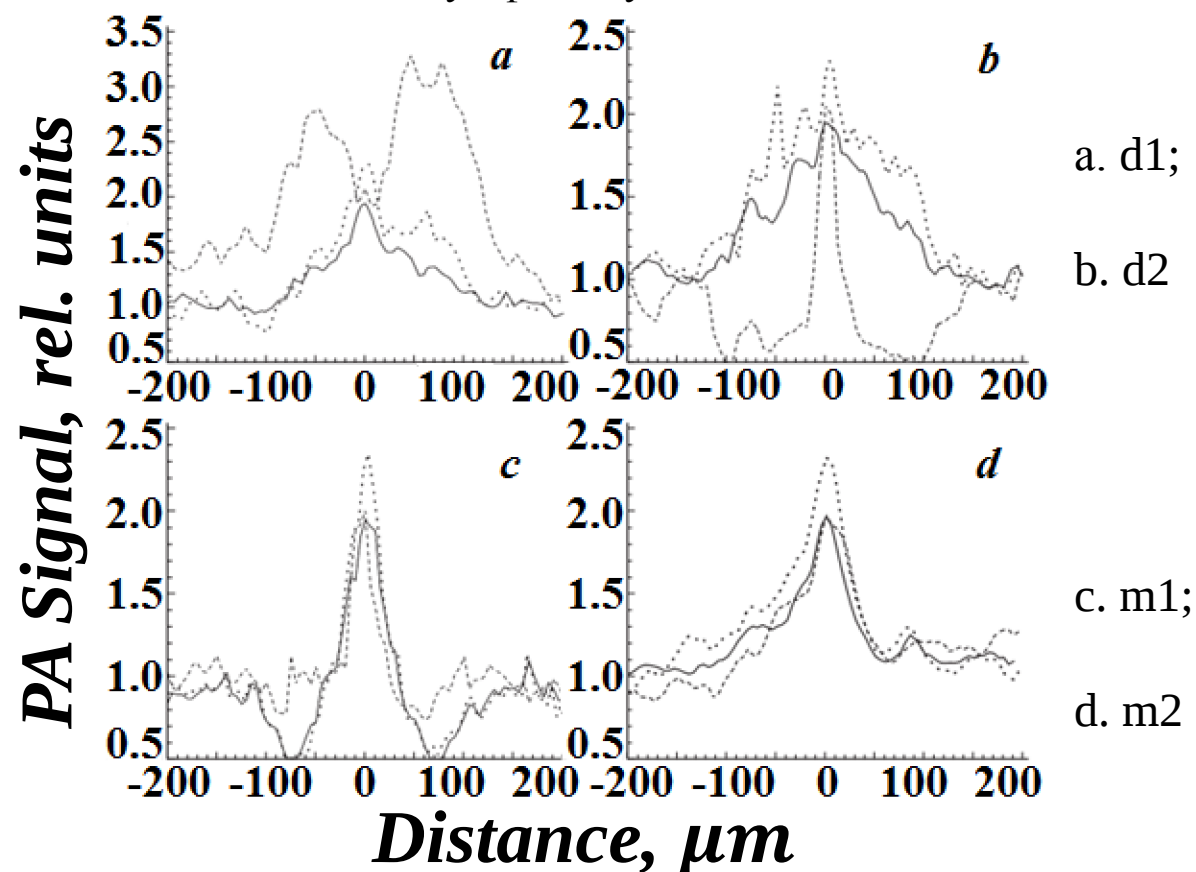
Схема процесса лазерной
диагностики



Фотоакустические
амплитудные
изображения
отпечатков
Виккерса

Результаты эксперимента

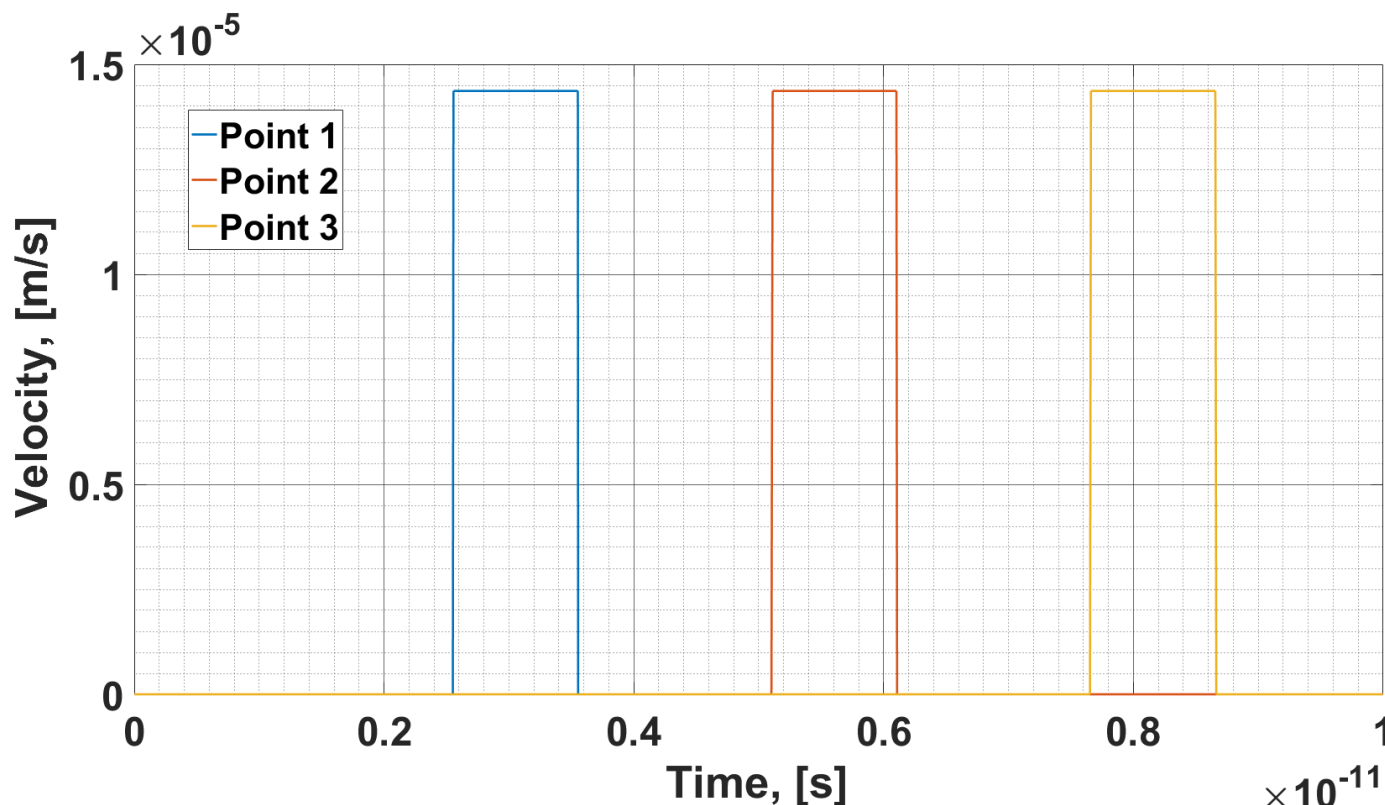
Поведение амплитуд фотоакустических сигналов вдоль:



1. Глазов А.Л. Характер изменения фотоакустических сигналов внутри отпечатка Виккерса в металлах при воздействии внешних напряжений на примерах стали и наномеди / А.Л. Глазов, Н.Ф. Морозов, К.Л. Муратиков // *Физика твердого тела*. – 2016. – Т58, вып. 9 – С.1679-1687.

2. Muratikov K.L. Photoacoustic effect in stressed elastic solids / K.L. Muratikov, A.L. Glazov, D.N. Rose, J.E. Dumar // *Journal of Applied Physics*, 2000, V88, N. 5, P.2948-2955.

Импульсный удар по полубесконечному стержню



Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{x=0} = -\frac{P_0}{E} * f(t) \\ u \big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Основные параметры сигнала

Амплитуда сигнала : $\frac{P_0}{\rho c}$

Время прихода : $\frac{x}{c}$

Длина амплитудной части : τ

Импульсный удар по полубесконечному стержню с дефектом в виде массы на свободном конце



Постановка задачи

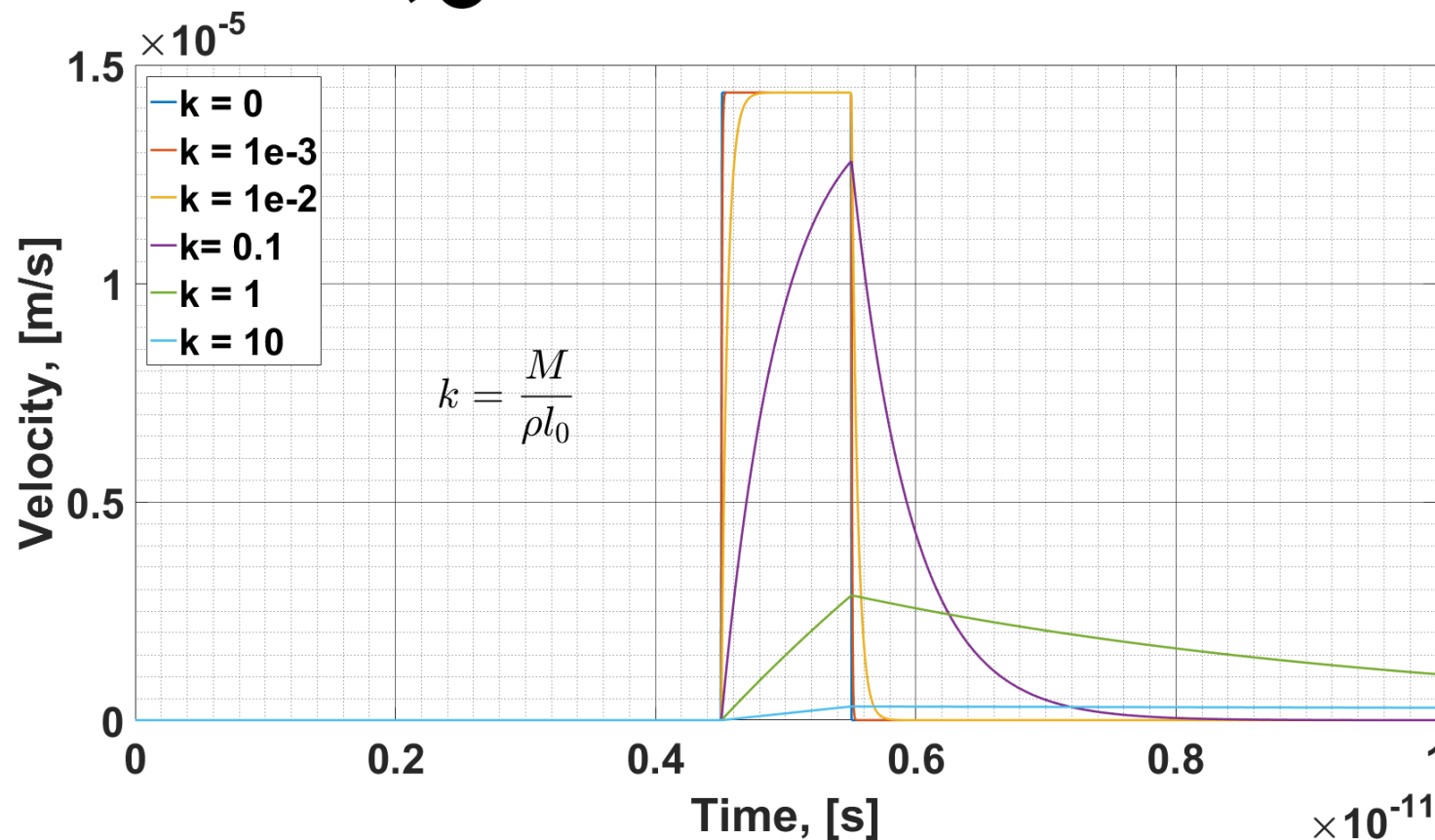
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} E \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{x=0} = M \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - P_0 * f(t) \\ u|_{x=0} = u_0 \\ u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

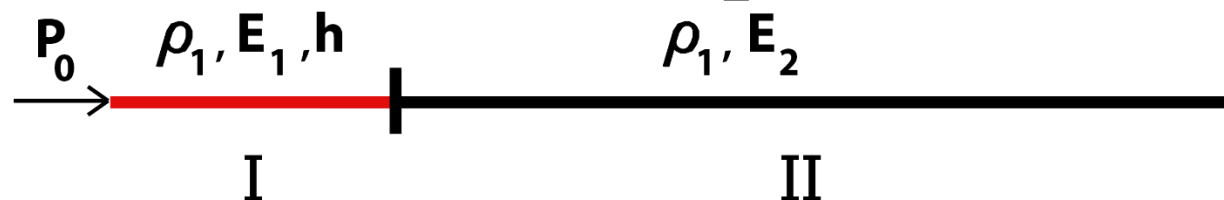
Основные параметры сигнала

Максимальная амплитуда: $\frac{P_0}{\rho c}$

Показатель экспоненты: $-\frac{\rho c}{M}$



Импульсный удар по полубесконечному стержню с дефектом в виде неоднородности материала



Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u^I}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^I}{\partial t^2} = 0$$

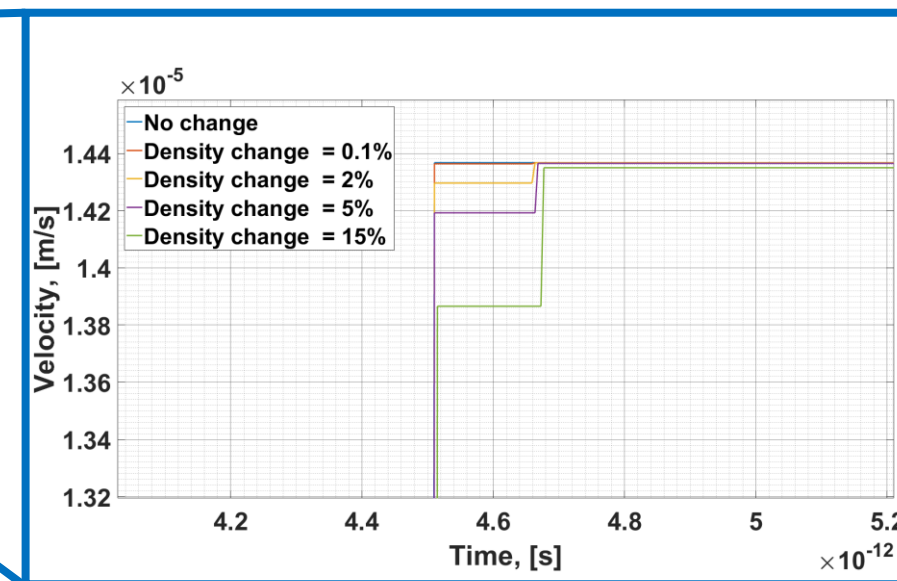
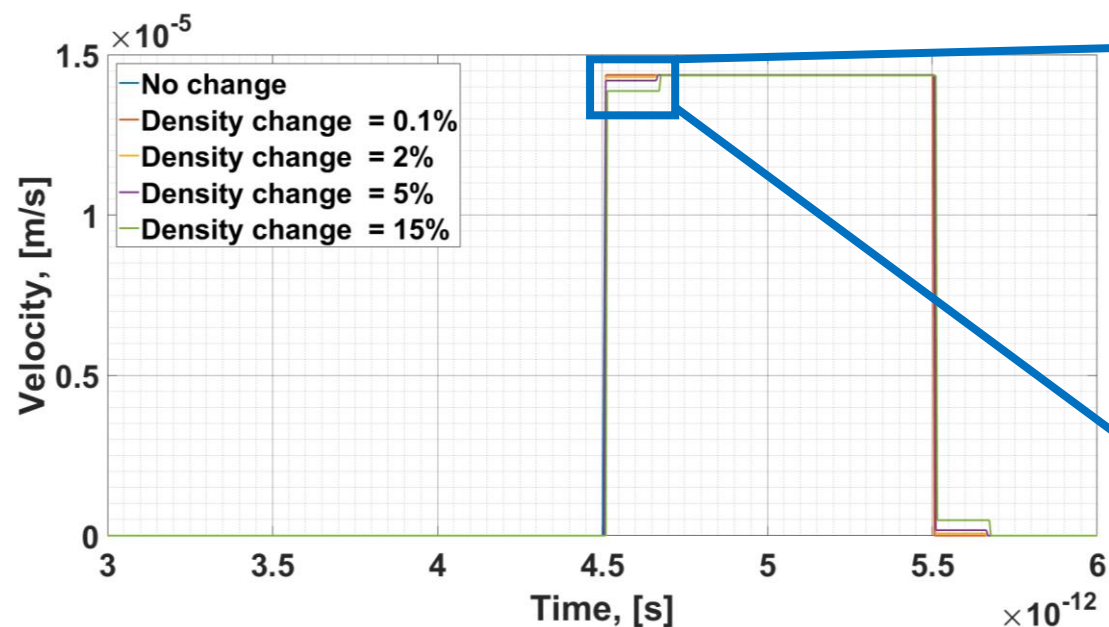
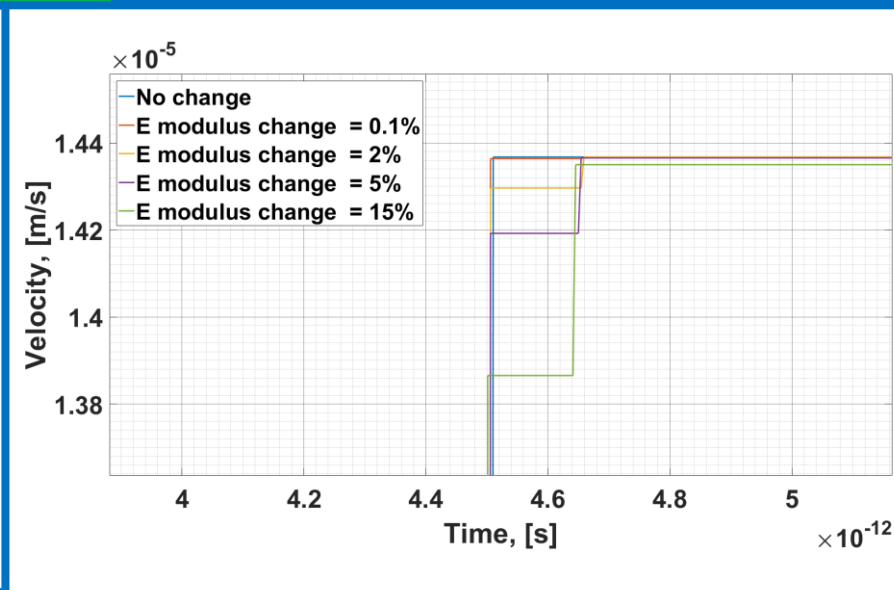
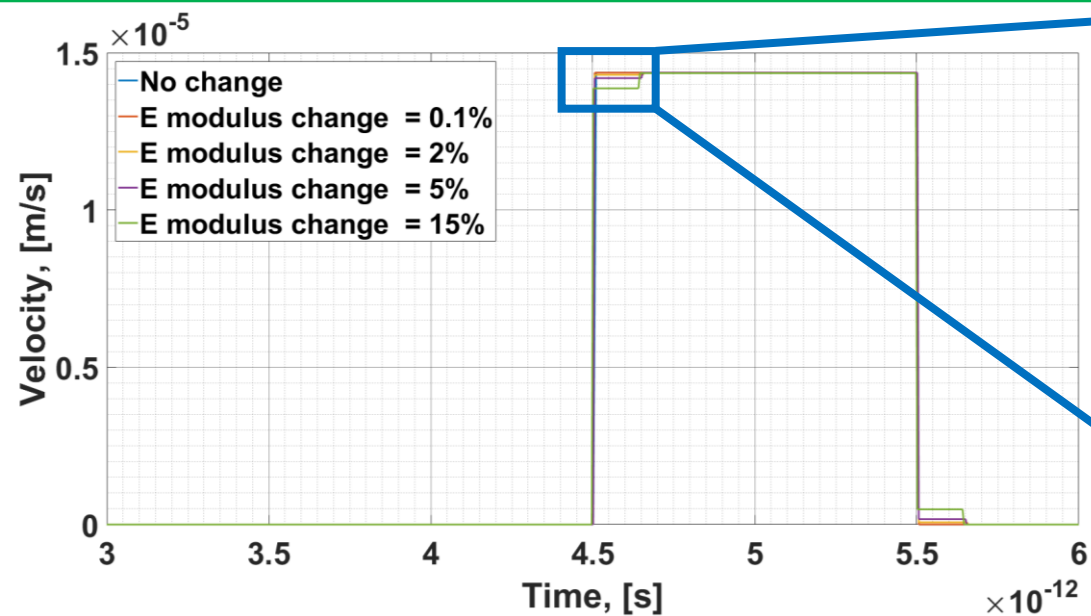
$$\frac{\partial u^I}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{P_0}{E_1} * f(t)$$

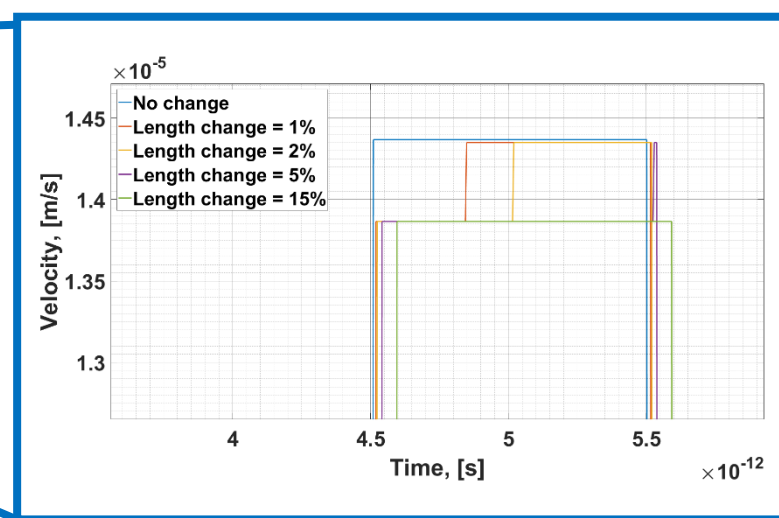
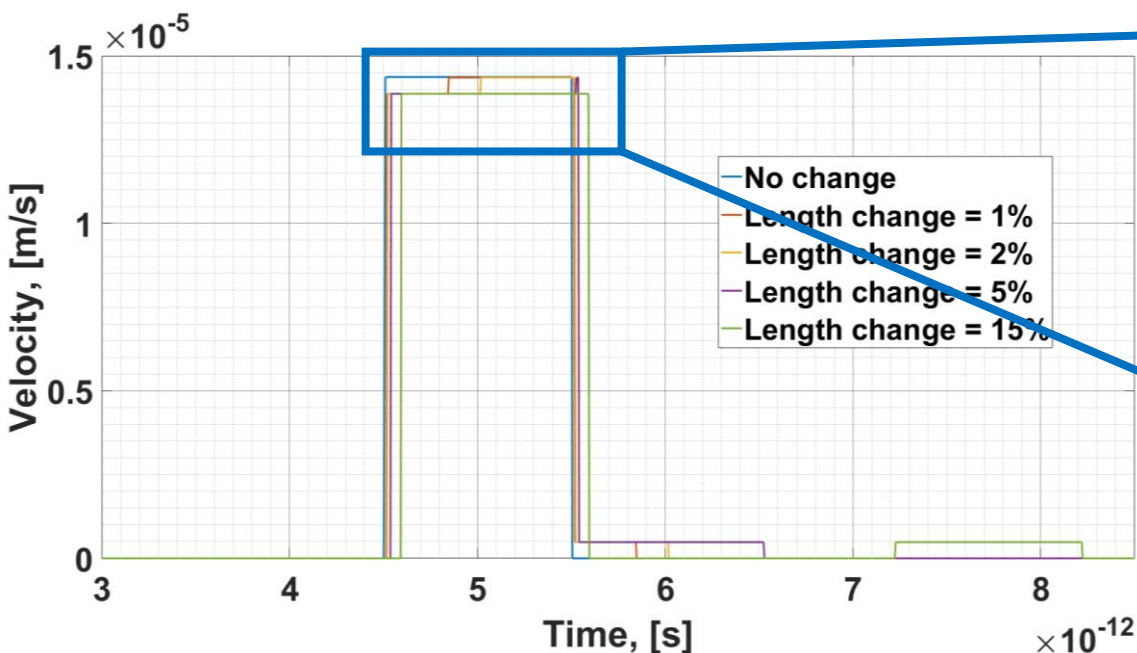
$$\frac{\partial^2 u^{II}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial t^2} = 0$$

$$u^{II} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

Условие сшивки на границе

$$\begin{cases} u^I \Big|_{x=h} = u^{II} \Big|_{x=h} \\ E_1 \frac{\partial u^I}{\partial x} \Big|_{x=h} = E_2 \frac{\partial u^{II}}{\partial x} \Big|_{x=h} \end{cases}.$$





Основные параметры сигнала

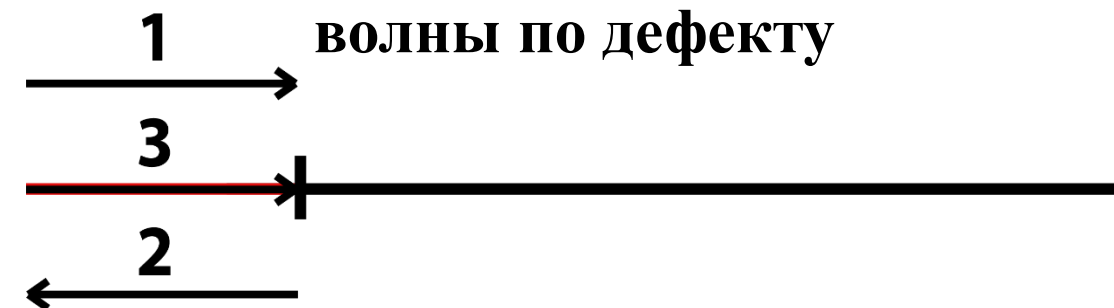
Амплитуда первой
части: $\frac{P_0}{\rho_1 c_1} \frac{2\rho_1 c_1}{(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)}$

Время прихода первой части: $\frac{x-h}{c_2} + \frac{h}{c_1}$

Амплитуда второй части: $\frac{P_0}{\rho_2 c_2} \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2}{\rho_2 c_2 + \rho_1 c_1}$

Время прихода второй части: $\frac{x-h}{c_2} + \frac{3h}{c_1}$

Схематичное отображения бега
волны по дефекту



Тепловой удар по полубесконечному стержню. Задача "Даниловской"^{3,4}.

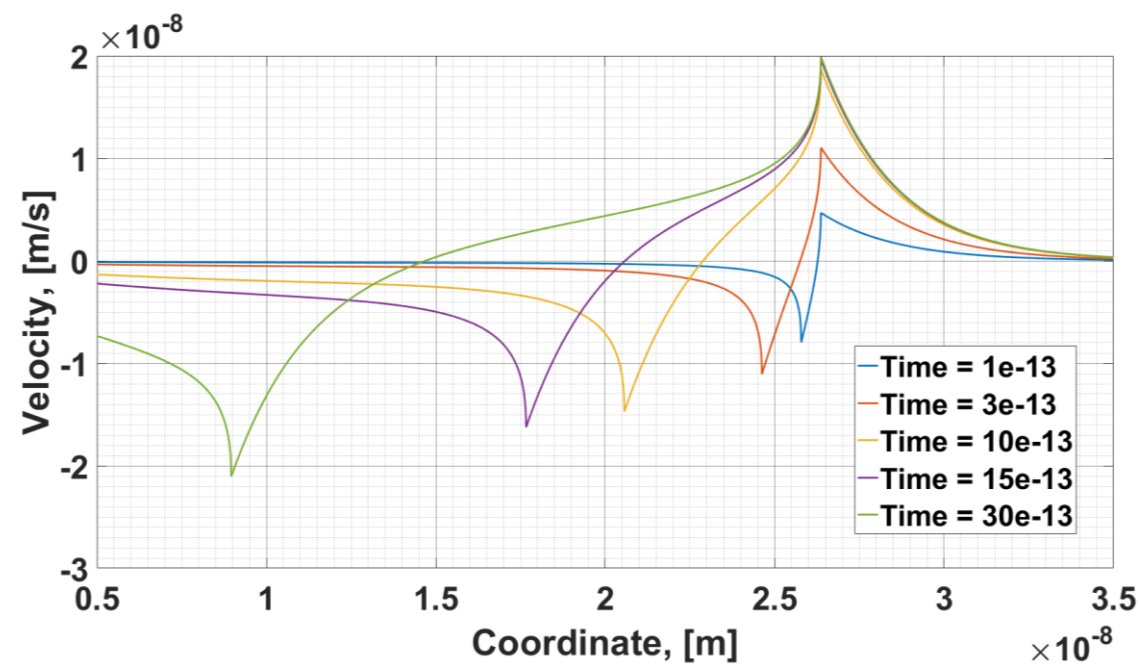
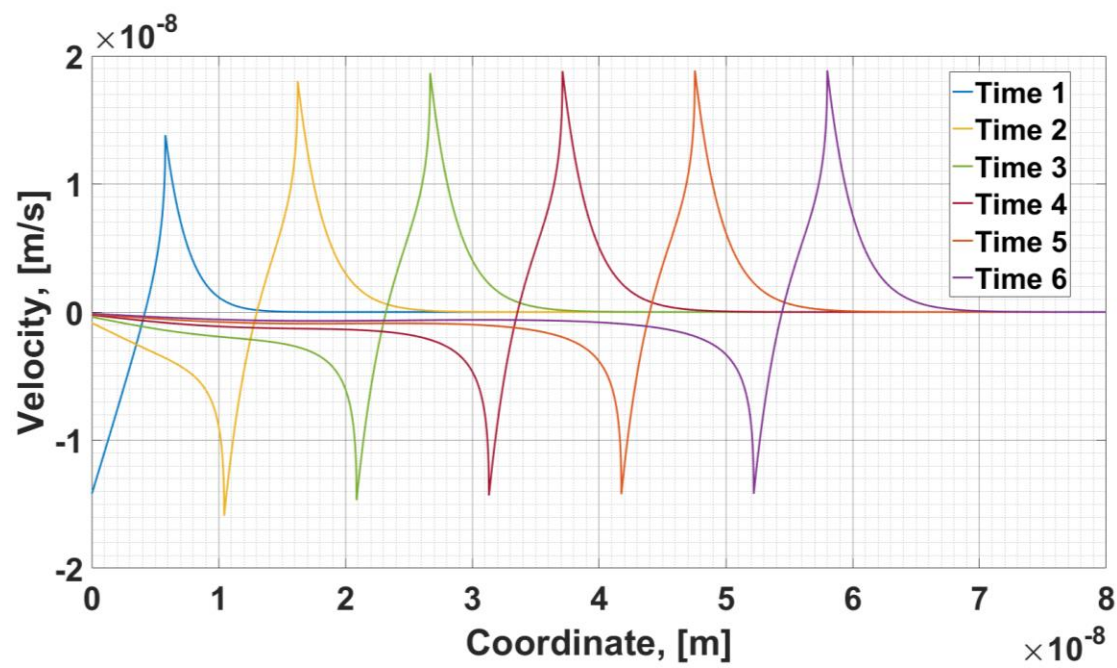
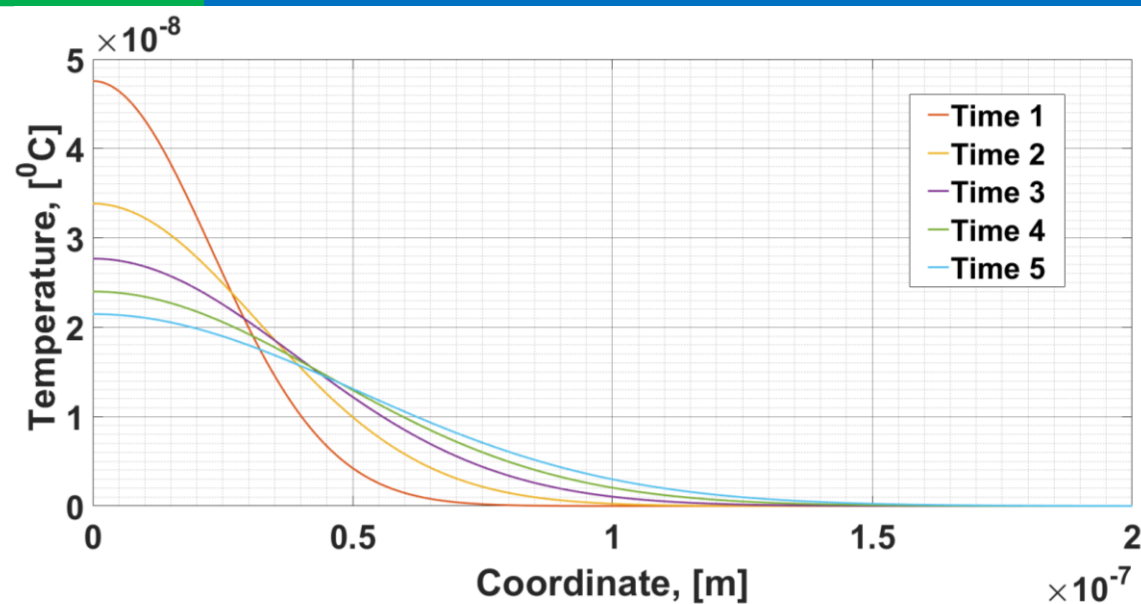
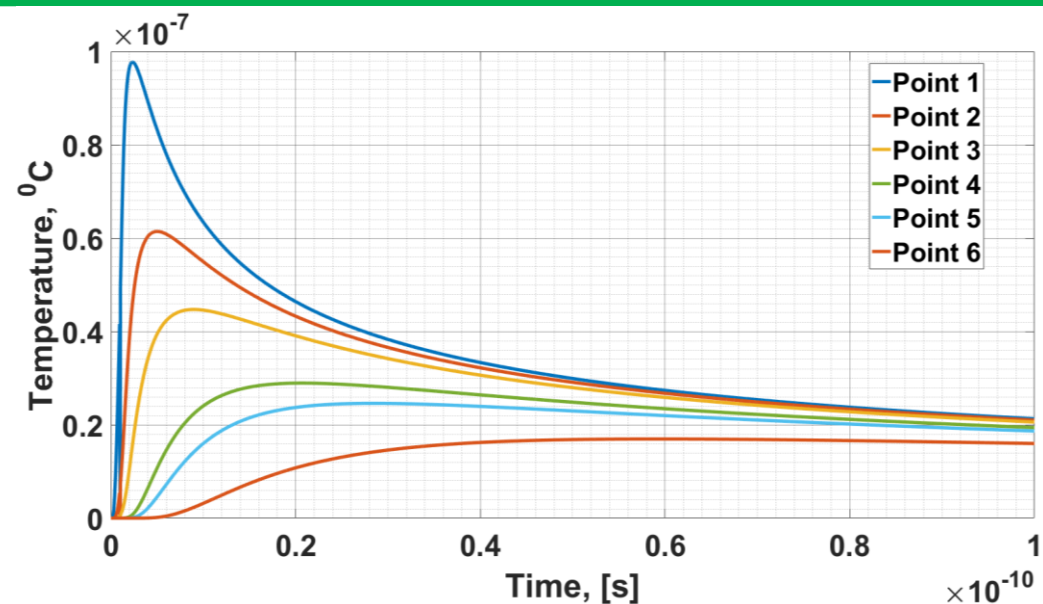


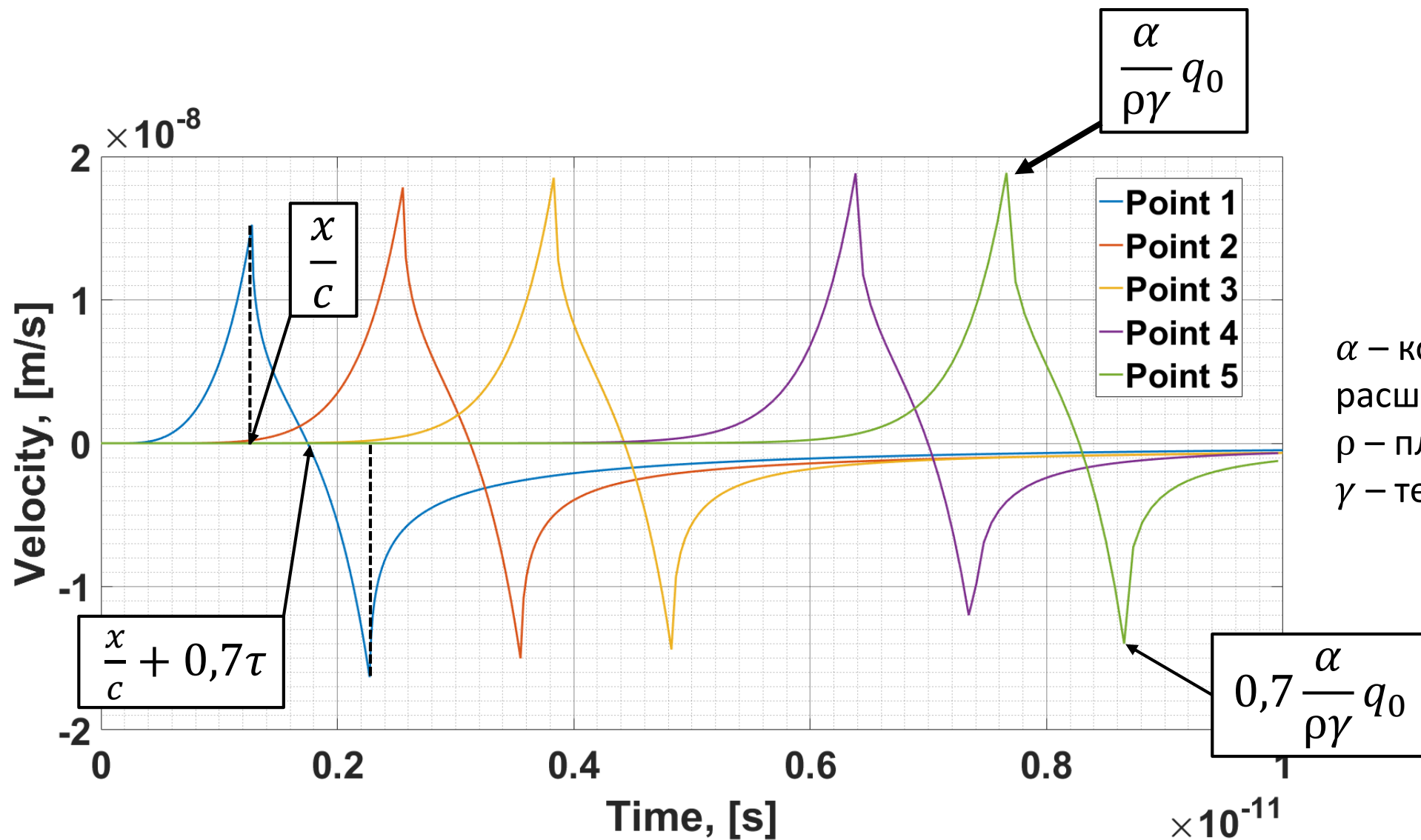
Постановка задачи

$$\begin{cases} \rho \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -F_0 * f(t) \cdot \\ \theta \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha \theta \Big|_{x=0} \cdot \\ u \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

4. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. – Прикл. мат. и мех., 1950, 14, №3, 316-318.

5. Даниловская В.И. Об одной динамической задаче термоупругости. – Прикл. мат. и мех., 1952, 16, №3, 342-344.





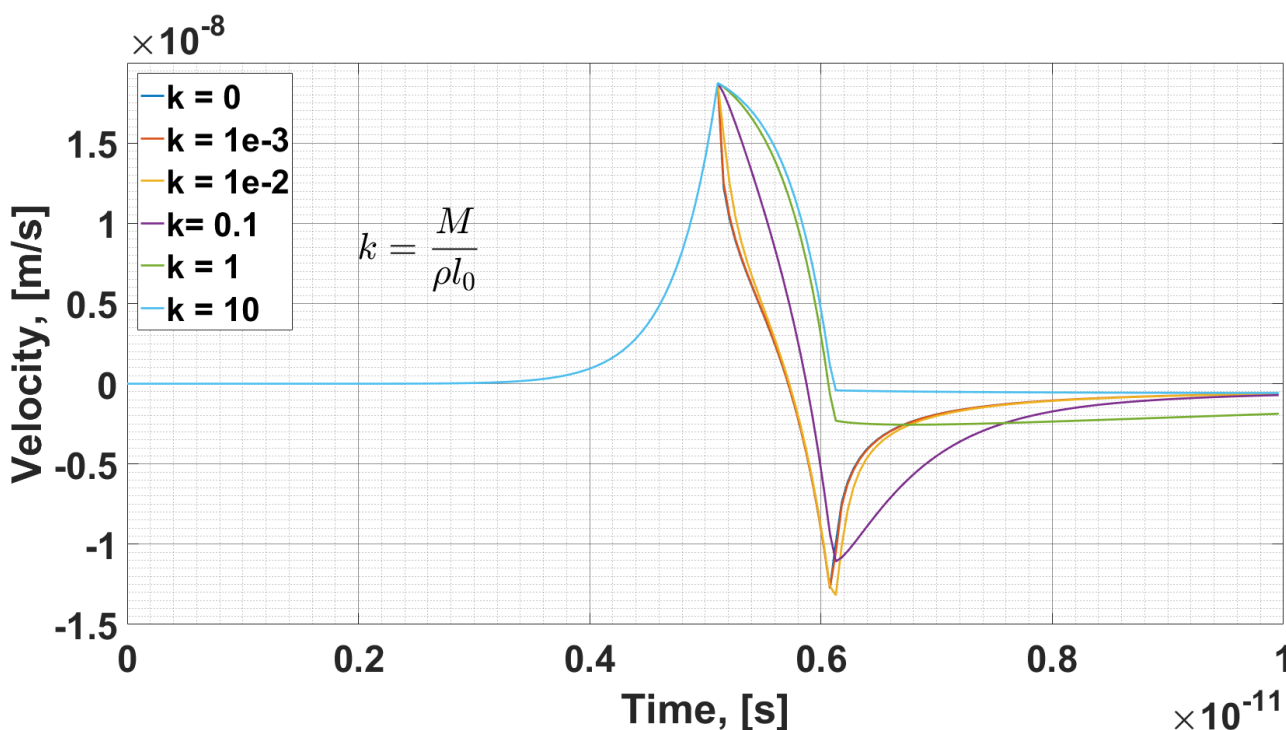
α – коэффициент теплового расширения;
 ρ – плотность материала;
 γ – теплоемкость материала.

Тепловой удар по полубесконечному стержню с дефектом в виде массы на свободном конце

Постановка задачи

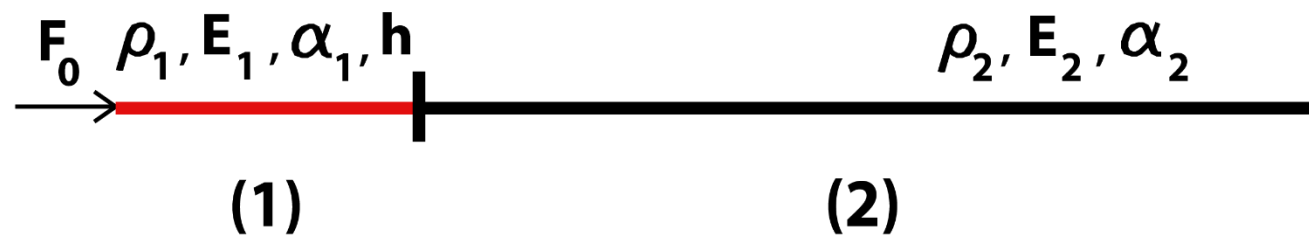
$$\rho \gamma \frac{\partial \theta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial x} \big|_{x=0} = -q_0 * f(t) \\ \theta \big|_{x=\infty} < \infty \end{cases} \cdot \begin{cases} E \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{x=0} = M \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + E \alpha \theta \big|_{x=0} \\ u \big|_{x=0} = u_0 \\ u \big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$



Максимум амплитуды первого пика **не меняется** при изменении массы, но растяжка результирующего импульса и сглаживание второго пика позволяет определить его отличие от импульса без дефекта.

Тепловой удар по полубесконечному стержню с дефектом в виде неоднородности материала



Постановка задачи

$$\rho_1 \gamma_1 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 \theta^{(1)}}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{F_0 f(p)}{\lambda_1}$$

$$\rho_2 \gamma_2 \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 \theta^{(2)}}{\partial x^2}$$

$$\theta^{(2)} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 \hat{\theta}^{(1)} \\ u^{(1)} \Big|_{x=h} = u^I \Big|_{x=h} + u^{II} \Big|_{x=h} \end{cases}$$

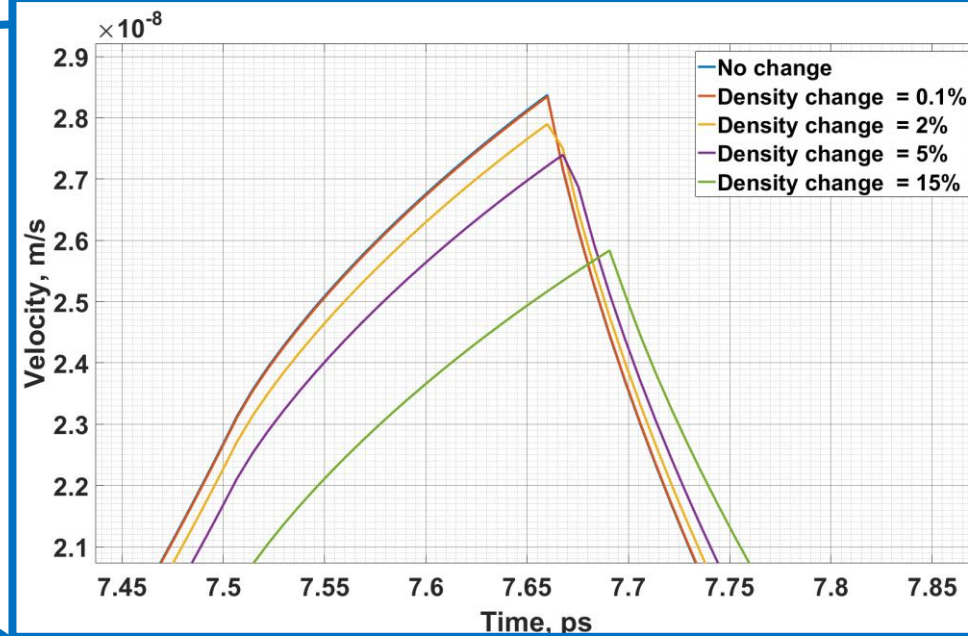
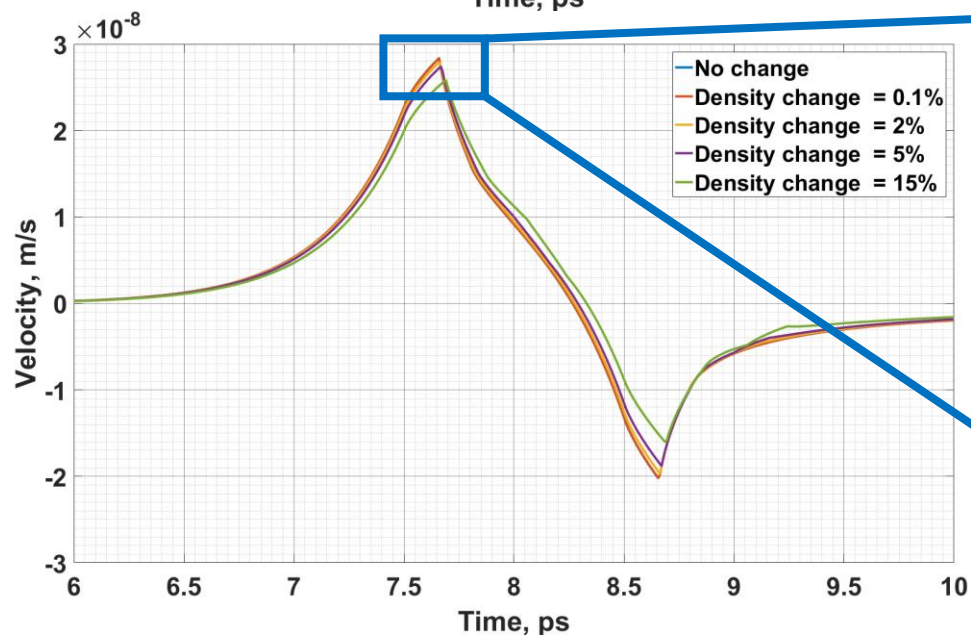
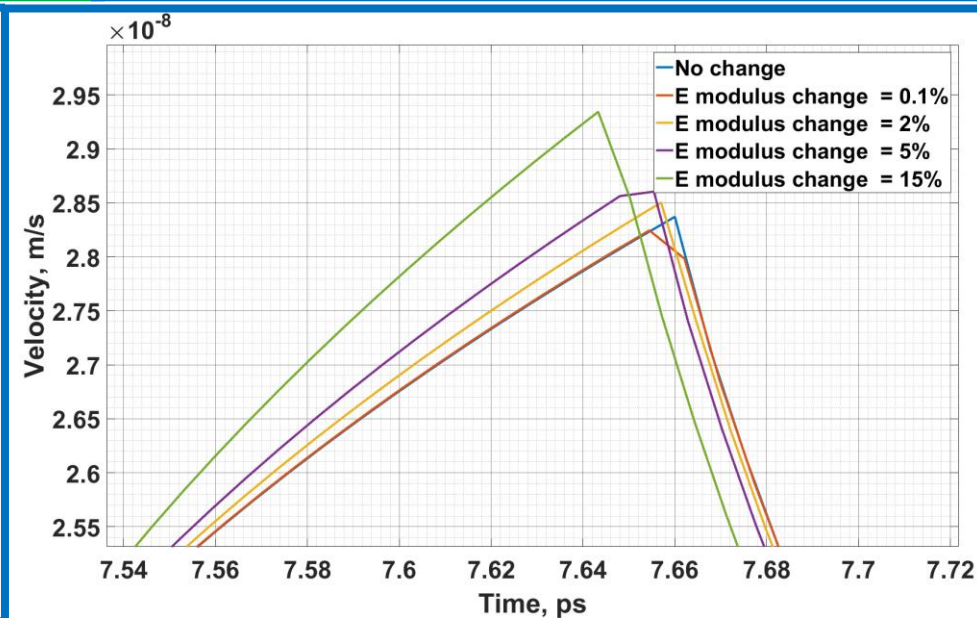
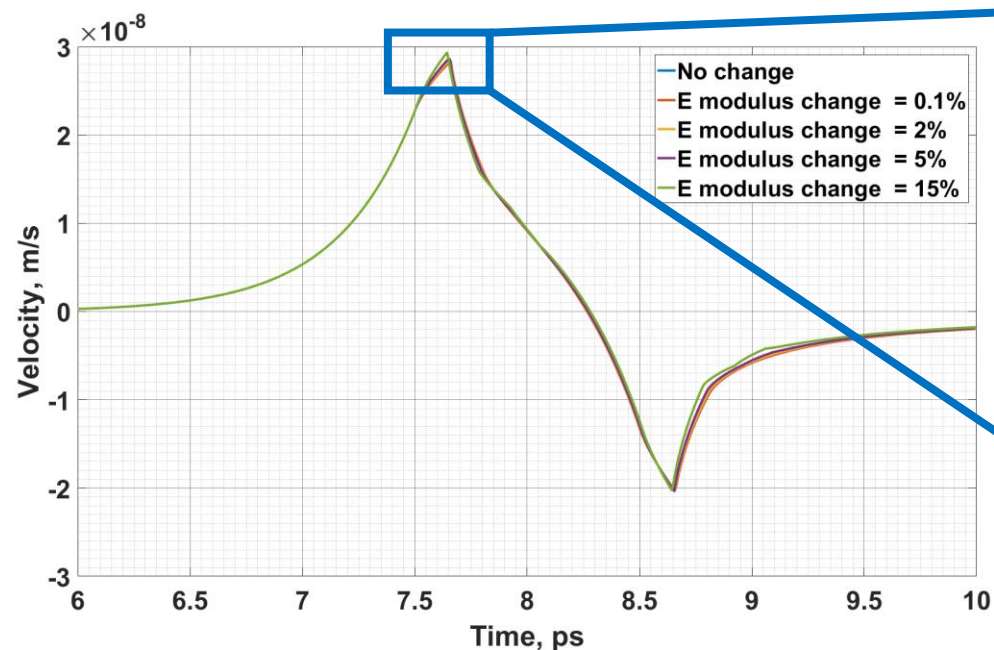
$$u^{(2)} = u^I + u^{II}.$$

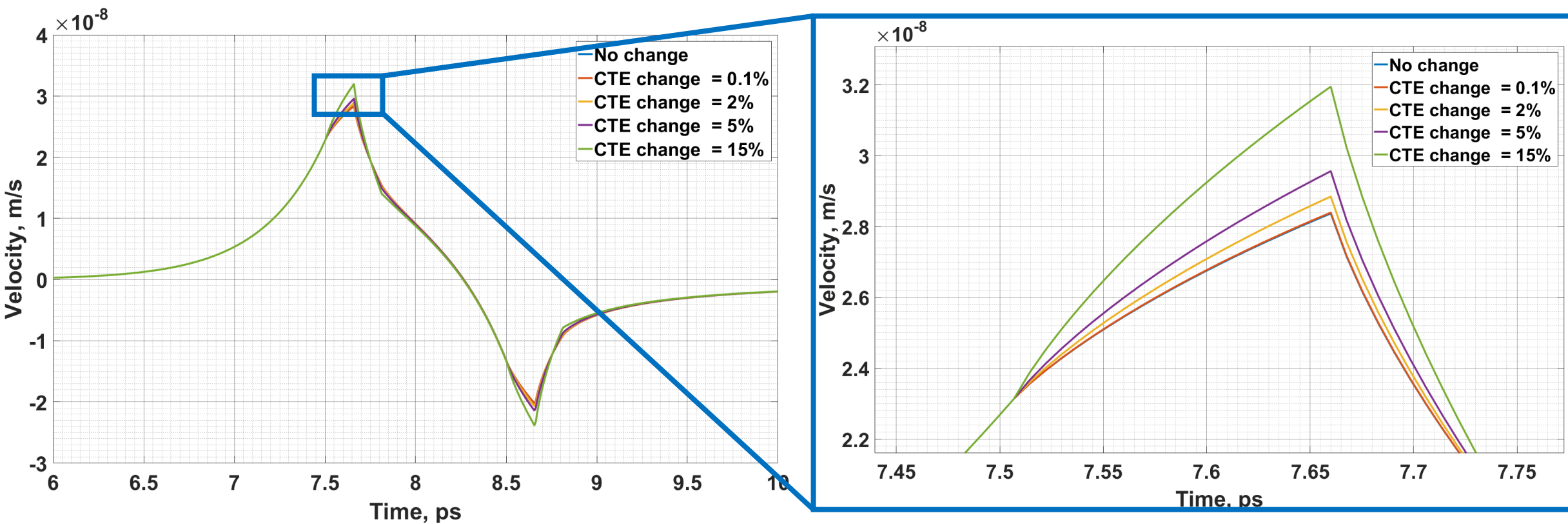
Условие сшивки на границе

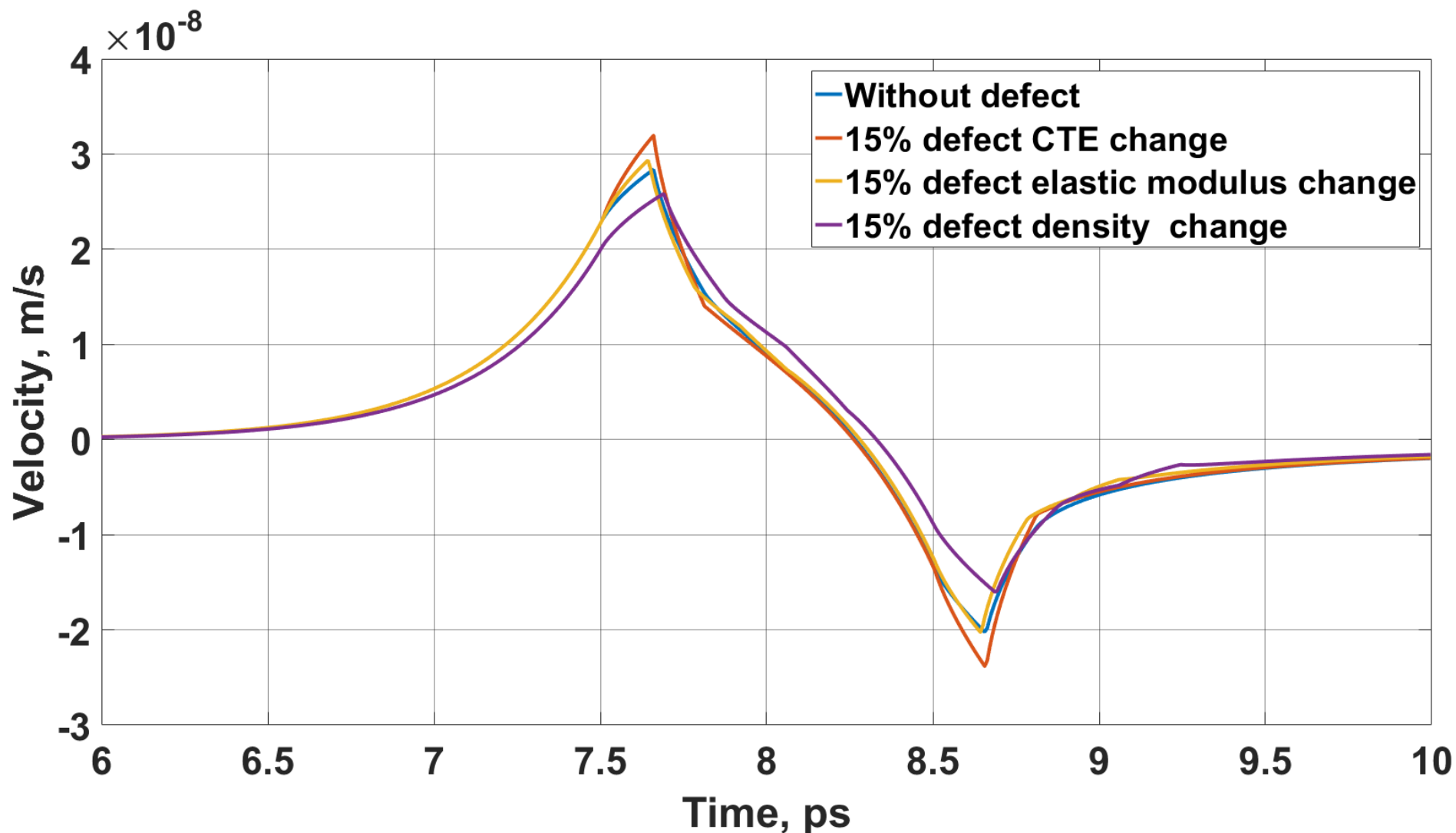
$$\lambda_1 \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=h} = \lambda_2 \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial x} \Big|_{x=h}$$

$$\theta^{(1)} \Big|_{x=h} = \theta^{(2)} \Big|_{x=h}$$

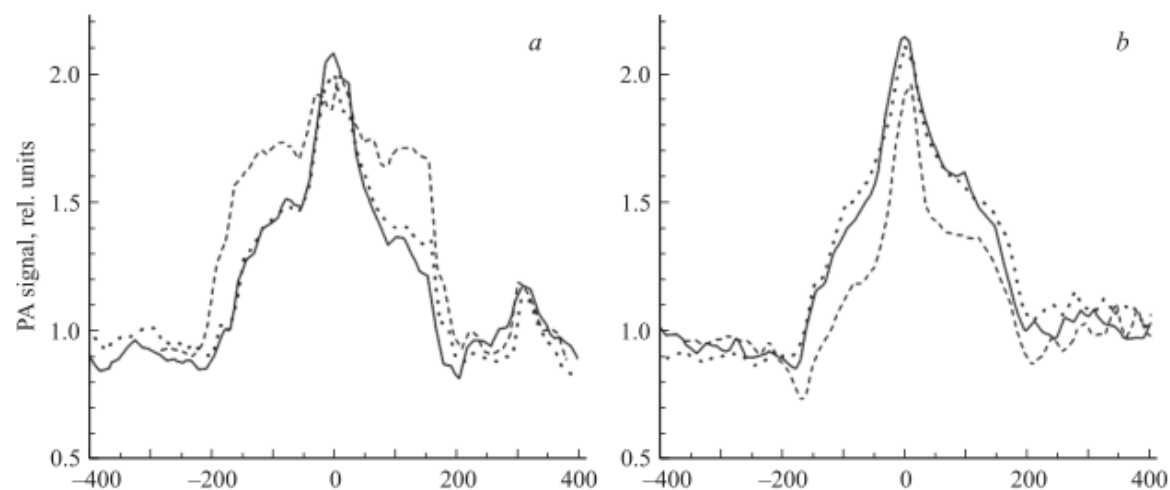
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \alpha_1 \hat{\theta}^{(1)} \\ u^{(1)} \Big|_{x=h} = u^I \Big|_{x=h} + u^{II} \Big|_{x=h} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial u^{II}}{\partial x} \Big|_{x=h} = \frac{E_1}{E_2} \left(\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} - \alpha_1 \hat{\theta}^{(1)} \right) \Big|_{x=h} \\ u^{II} \Big|_{x \rightarrow \infty} < \infty \end{cases}$$







При изменении КТР амплитуда максимальна, а фаза не меняется



Установлено, что наличие механических напряжений существенно увеличивает результирующий сигнал^{5,6}.

$$\alpha = \alpha(\sigma)$$

Эмпирическое соотношение⁷ между коэффициентом линейного расширения α и модулем Юнга E :

$$\alpha \approx \frac{k_B}{d_{b-b}^3 E}$$

где α – коэффициент линейного расширения, k_B – коэффициент Больцмана, d_{b-b} – **длина межатомной связи в материале**, E – модуль упругости материала.

Связь между изменением α и напряжением σ ⁸:

$$\alpha = \alpha_0 + c\sigma,$$

где α_0 – коэффициент линейного температурного расширения для ненапряженного материала, c – коэффициент связи, определяемый соотношением:

$$c = \frac{1}{E^2} \frac{\partial E}{\partial T}$$

5. Глазов А.Л. Характер изменения фотоакустических сигналов внутри отпечатка Виккерса в металлах при воздействии внешних напряжений на примерах стали и наномеди / А.Л. Глазов, Н.Ф. Морозов, К.Л. Муратиков // *Физика твердого тела*. – 2016. – Т.58, вып. 9 – С.1679-1687.

6. Muratikov K.L. Photoacoustic effect in stressed elastic solids / K.L. Muratikov, A.L. Glazov, D.N. Rose, J.E. Dumar // *Journal of Applied Physics*, 2000, V88, N. 5, P.2948-2955.

7. Черняева Т.П.. Корреляция между упругостью и другими свойствами циркония // Т.П. Черняева, В.М. Грицина, Е.А. Михайлов, А.В. Остапов // *Вопросы атомной науки и техники*. – 2009. - № 4. – С.206-217.

8. Кунин Н.Ф. Влияние напряжений на тепловое расширение деформированного металла // Н.Ф. Кунин, В.Н. Кунин // *Физика металлов и металловедение*. – 1957. – Т.5, № 1. – С.173-174.

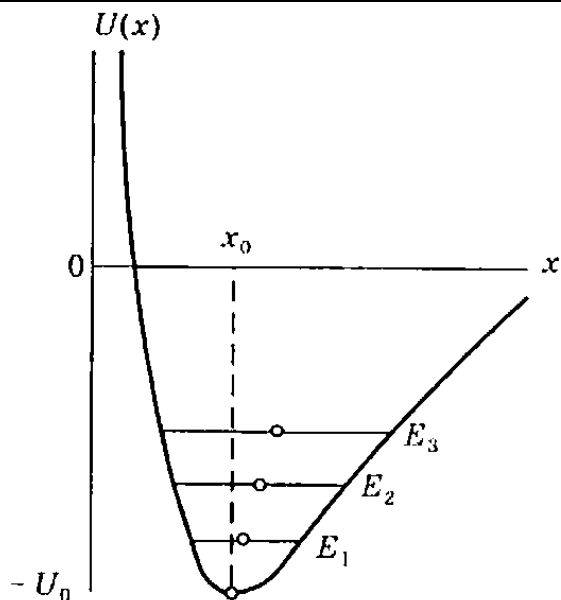
Классическое определение коэффициента теплового расширения⁹

Коэффициент объемного теплового расширения

$$\alpha_V = \frac{1}{V_0} \frac{dV}{d\theta}$$

Коэффициент линейного теплового расширения

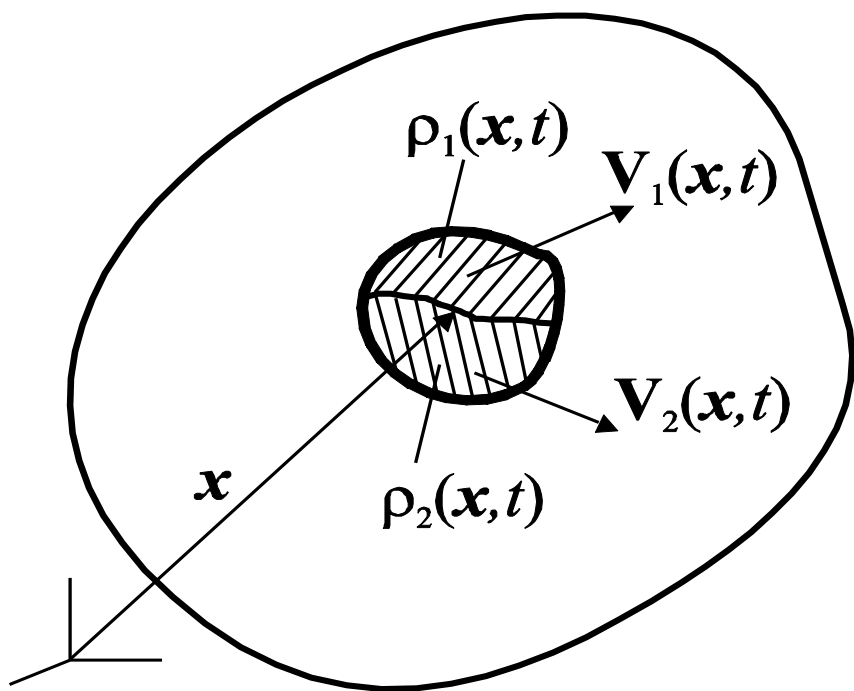
$$\alpha_l = \frac{1}{L_0} \frac{dL}{d\theta}$$



$$U(x) = -U_0 + a(x - x_0)^2 - b(x - x_0)^3 + \dots,$$
$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)_{x=x_0}, \quad b = -\frac{1}{6} \left(\frac{d^3 U}{dx^3} \right)_{x=x_0}.$$

$$\alpha_l = \frac{3bk_B}{4a^2}$$

Двухкомпонентная модель¹⁰



Полный тензор напряжений и массовая плотность
полной внешней силы

$$\underline{\tau}_m = \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_2, \underline{\tau}_1 = \underline{\tau}_{11}(\varepsilon_1, \dots), \underline{\tau}_2 = \underline{\tau}_2(\varepsilon_2, \dots),$$

$$\rho_m \underline{F}_m = \rho_1 \underline{F}_1 + \rho_2 \underline{F}_2$$

$$\rho_m(\underline{x}, t) = \rho_1(\underline{x}, t) + \rho_2(\underline{x}, t)$$

$$\rho_m(\underline{x}, t) \underline{V}_m(\underline{x}, t) = \rho_1(\underline{x}, t) \underline{V}_1(\underline{x}, t) + \rho_2(\underline{x}, t) \underline{V}_2(\underline{x}, t)$$

Закон сохранения массы

Для материала в целом

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \underline{V}_m) = 0$$

Для каждой компоненты

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \underline{V}_1) = \chi$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \underline{V}_2) = -\chi$$

χ – функция скоростей производства массовых плотностей

Общее уравнение динамики

Для материала в целом

$$\nabla \cdot \underline{\tau}_m + \rho_m \underline{F}_m = \rho_1 \frac{d\underline{V}_1}{dt} + \rho_2 \frac{d\underline{V}_2}{dt} + \chi(\underline{V}_1 - \underline{V}_2)$$

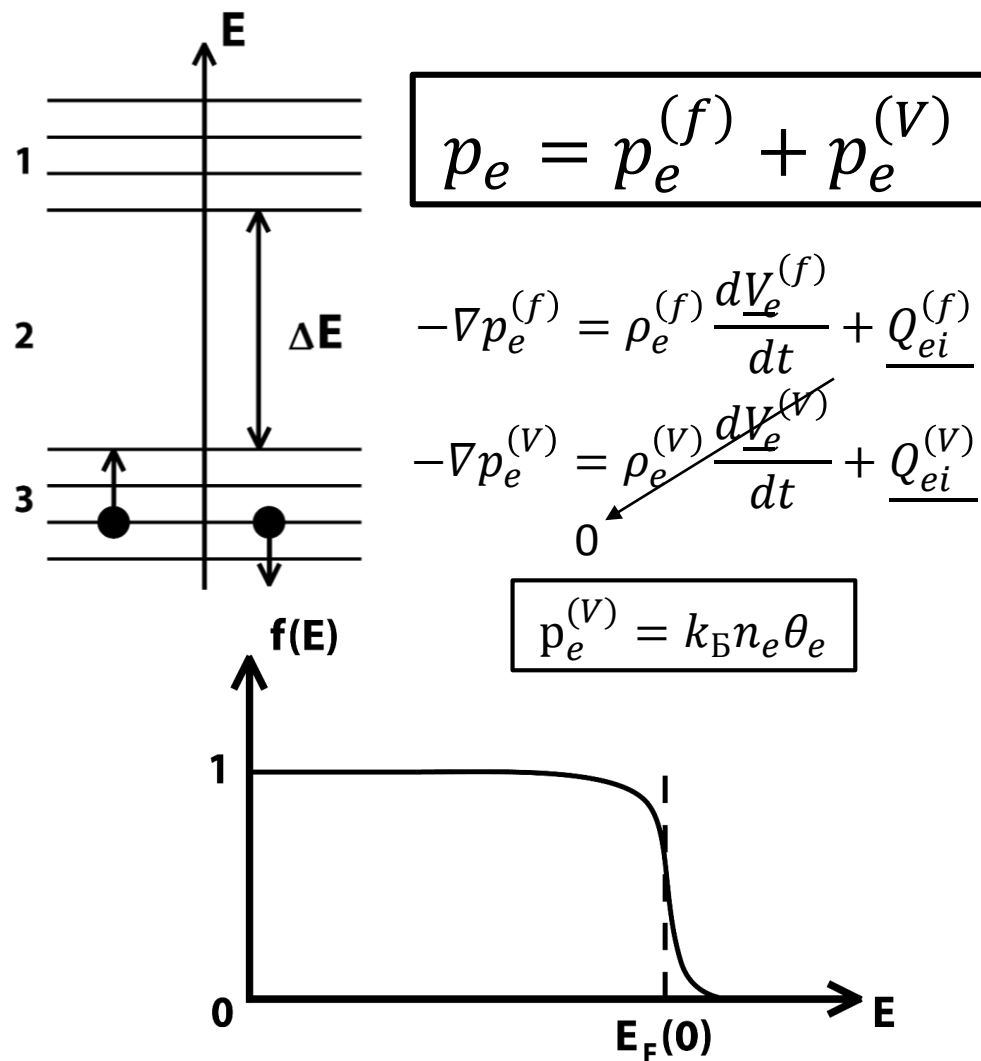
Для каждой компоненты

$$\nabla \cdot \underline{\tau}_1 + \rho_1 \underline{F}_1 + Q = \rho_1 \frac{d\underline{V}_1}{dt} + \chi \underline{V}_1$$

$$\nabla \cdot \underline{\tau}_2 + \rho_2 \underline{F}_2 - Q = \rho_2 \frac{d\underline{V}_2}{dt} - \chi \underline{V}_2$$

Двухкомпонентная модель:

электронный газ кристаллическая решетка



$$\check{n}_e^{(V)} = -n_e^0 \varepsilon_i^0, \text{ где } \varepsilon_i^0 - \text{объемная деформация решетки.}$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma_m}} = \rho_i \dot{V}_i \\ \underline{\underline{\sigma_m}} \cdot \underline{n} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{1}{c_{i*}^2} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \alpha_e \frac{\partial \tilde{\theta}_i}{\partial x}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} \big|_{x=0} = \alpha_e \tilde{\theta}_i \big|_{x=0} \end{cases}$$

где $\underline{\underline{\sigma_m}} = \underline{\underline{\sigma_i}} - p_e^{(V)} \underline{\underline{I}}$.

$$E_{i*} = (E_i + k_B n_e^0 \theta_i^0)$$

$$\alpha_e = \frac{K_B n_e^0}{E_{i*}}$$

	α_e	Справ. знач.
Al	$19,7 * 10^{-6}$	$23.3 * 10^{-6}$
Cu	$12 * 10^{-6}$	$16.7 * 10^{-6}$

$$n_e^{(V)} = n_e^0 (1 - \varepsilon_i^0) \rightarrow \alpha_e = \frac{K_B n_e^0}{E_{i*}} (1 - \varepsilon_i^0)$$

Выводы

1. В результате решения поставленных задач получены формулы, которые описывают поведение сигнала в задачах без дефекта, с дефектом в виде массы на свободной конце и с дефектом в виде неоднородности материала.
2. Полученные решения показывают преимущества лазерной диагностики дефекта над акустической путем сравнения чувствительности сигналов к изменению параметров дефекта. Также выявлено, что изменение коэффициента теплового расширения больше всех оказывает влияние на изменение амплитуды результирующего сигнала.
3. Получена формула коэффициента теплового расширения через концентрацию электронов. Также в рамках данной модели получена зависимость коэффициента теплового расширения от деформаций решетки.



Спасибо за внимание!