

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики

Работа допущена к защите

Заведующий кафедрой

_____ Д.А. Индейцев

«__» _____ 2018 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ И РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ГАШЕНИЯ ВИБРАЦИЙ**

по направлению 15.04.03 Прикладная механика

Выполнил

студент гр. 23645/1

<подпись>

И.Р. Муртазин

Руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

<подпись>

Л.В. Штукин

Соруководитель

ассистент

<подпись>

А.В. Лукин

Соруководитель

ассистент

<подпись>

И.А. Попов

Санкт-Петербург

2018

РЕФЕРАТ

На 65 с., 48 рисунков, 7 таблиц, 2 приложения.

ВРАЩАЮЩИЙСЯ ВАЛ, ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ, ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ, РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ, ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА, АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНИЗОТРОПНАЯ ОПОРА, АКТИВНЫЙ МАГНИТНЫЙ ПОДШИПНИК, ГАШЕНИЕ ВИБРАЦИЙ

Рассмотрены аналитические и численные методы расчета изгибных колебаний вращающихся валов. Для определения критических скоростей вращения были построены диаграммы Кэмпбелла с применением распределенных моделей деформируемого вала, описываемых уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами. Исследованы как свободные, так и вынужденные колебания вала, вызванные наличием эксцентриситета. Верифицированные методики были применены к реально существующей экспериментальной установке. Была решена обратная задача по определению величины эксцентриситета барабана. Предложены и рассмотрены методы гашения вибраций вала с помощью управляемых (активных) магнитных подшипников.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 Верификация численных методов расчета динамики упругих вращающихся тел.....	7
1.1 Вывод уравнений	7
1.2 Свободные колебания. Задача на собственные значения. Построение диаграммы Кэмпбелла.....	10
1.2.1 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Аналитическое решение с помощью метода продолжения по параметру (<i>MATCONT-MATLAB</i>).....	11
1.2.1.1 Описание метода.....	11
1.2.1.2 Получение частотного уравнения с параметром Ω	12
1.2.2 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью <i>bvp4c</i>	13
1.2.2.1 Описание метода.....	13
1.2.2.2 Нахождение начального приближения	13
1.2.3 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Численное решение в <i>COMSOL</i> и <i>ANSYS</i>	20
1.2.4 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Результаты и выводы.....	20
1.2.5 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью <i>bvp4c</i>	25
1.2.6 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Численное решение в <i>ANSYS</i>	26
1.2.7 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Результаты и выводы .	27
1.3 Вынужденные колебания	28
1.3.1 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью <i>bvp4c</i>	28
1.3.2 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Численное решение в <i>ANSYS</i>	29
1.3.3 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Результаты и выводы.....	30
1.3.4 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью <i>bvp4c</i>	31
1.3.5 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Численное решение в <i>ANSYS</i>	32
1.3.6 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Результаты и выводы .	32
2 Численное моделирование экспериментальной установки	34
2.1 Определение свойств пружины	36
2.2 Моделирование экспериментальной установки	38

2.3	Свободные колебания. Задача на собственные значения. Построение диаграммы Кэмпбелла.....	40
2.4	Вынужденные колебания. Сравнение с экспериментальными данными.....	41
3	Нелинейная динамика вращающегося вала с управляемой магнитной опорой	46
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	51
	СПИСОК ИСТОЧНИКОВ	52
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	54
	Б.1 Равножесткая модель	54
	Б.2 Разножесткая модель.....	56

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию изгибных колебаний вращающегося ротора с распределенными характеристиками, находящегося в однородном магнитном поле. Несмотря на то, что сами электромагнитные явления не являются содержанием работы, производится проверка гипотезы о возникновении дополнительного силового фактора, имеющего электромагнитную природу, который гипотетически может вызывать движение объекта в безвоздушном космическом пространстве. Суть этих явлений заключается во взаимодействии внешнего магнитного поля с токами, которые наводятся во вращающейся рамке.

В свою очередь, основным направлением работы является изучение нежелательных изгибных колебаний в системе из-за наличия распределенного по участку вала эксцентриситета, а также разработке оптимального алгоритма гашения вибраций.

Обеспечение упругой устойчивости вращающихся валов и роторов является одной из важных и не полностью решенных задач прикладной механики в области машиностроения [1], [2]. Неизбежное наличие геометрических и материальных несовершенств в конструкции приводит к возникновению изгибных колебаний, способных вызвать выход системы из строя и её разрушение [2], [3], [4].

В настоящей работе сделан акцент на исследование динамики вращающегося вала с учетом распределенных упругих, инерционных, а также эксцентриситетных характеристик [1], [5]. Также была рассмотрена упрощенная модель вала (модель Джеффкотта), описанная в приложении А, к которой, как будет показано далее, может быть редуцирована распределенная модель.

В первой части работы построена математическая модель пространственных движений вала с учетом распределенных характеристик, описываемая системой уравнений в частных производных, в общем случае, с переменными коэффициентами [4]. Исследована необходимость учета влияния инерции вала на поворот в зависимости от геометрических и материальных параметров системы. Была рассмотрена задача на собственные значения для случаев однородного и неоднородного по длине вала [6], [7], [8]. Построены диаграммы Кэмпбелла и определены критические скорости оборотов вала. Исследована задача об изгибных колебаниях вала, вызванных наличием эксцентриситета [5].

Все вышеуказанные задачи решены также в конечно-элементной постановке с применением модулей расчета динамики деформируемых вращающихся тел («Rotordynamics»), реализованных в программных системах *COMSOL* и *ANSYS* [9], [10], [11]. Сопоставление аналитических и численных решений позволило верифицировать методы детального расчета реальных конструкций вращающихся валов и роторов.

Во второй части работы на основе верифицированных методов решения задач было проведено численное моделирование экспериментальной установки. Как было упомянуто выше, помимо имеющегося вынуждающего эксцентриситетного воздействия, предметом исследования является оценка чувствительности объекта на некоторый дополнительный силовой фактор. Поскольку исследование чувствительности установки к нагрузке может быть проведено безотносительно к ее природе, то был использован механический аналог рассматриваемой силы.

В третьей части представлен обзор дальнейших исследований. Рассматривается алгоритм оптимального гашения изгибных вибраций вала с помощью активного магнитного подшипника (Active magnetic bearing) [12], установленного на одном из концов вала.

Подготовлена нелинейная распределенная динамическая модель управляемого объекта, приведенная с помощью метода модальной декомпозиции к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследование полученных уравнений предполагается выполнить численно, а также с помощью методов возмущений [13].

Цели работы:

1. Расчетно-экспериментальная оценка первой критической скорости вращения вала.
2. Определение величины эксцентриситета на экспериментальной установке.
3. Оценка чувствительности экспериментальной установки к величине добавочной силы.

Решаемые задачи:

1. Разработка детальной математической модели изгибных колебаний вращающегося вала, учитывающую распределенность характеристик.
2. Верификация численных методов решения задач на основе описанной модели.
3. Адаптация численных методов под рассматриваемый объект.
4. Анализ полученных расчетных и экспериментальных результатов, выявление недостатков и составление плана дальнейших исследований.

1 Верификация численных методов расчета динамики упругих вращающихся тел

1.1 Вывод уравнений

Вывод уравнений для вала с распределенной массой и жесткостью описан в [5]. Модифицируем вывод уравнений с учетом геометрической и физико-механической неоднородности по длине вала.

При выводе уравнений используются некоторые допущения:

1. Не рассматривается сила тяжести
2. Не рассматриваются сдвиговые деформации
3. Используется модель балки Бернулли-Эйлера:

$u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$ – прогибы в двух плоскостях, $\theta_x = \frac{\partial u}{\partial s}$, $\theta_y = \frac{\partial v}{\partial s}$ – соответствующие углы поворота, $M_{xs} = E(s)J(s) \frac{\partial \theta_x}{\partial s}$, $M_{ys} = E(s)J(s) \frac{\partial \theta_y}{\partial s}$ – изгибающие моменты.

Необходимо определить правило знаков, пусть оно будет таким, как показано на рисунке 1.

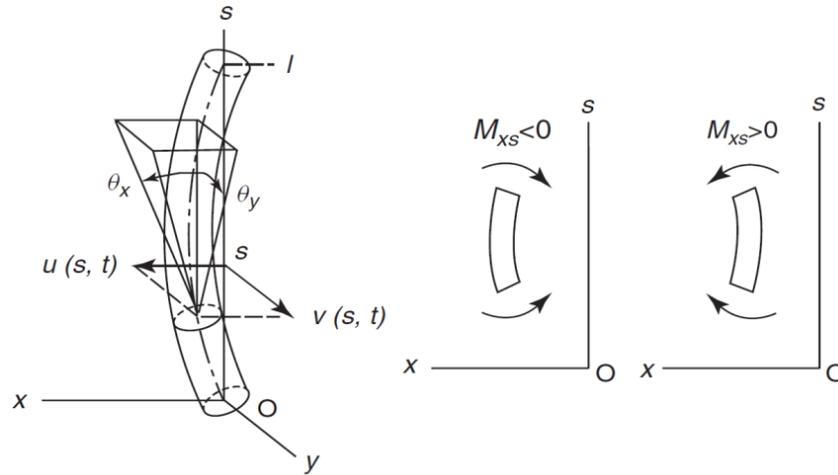


Рисунок 1. Кинематика вала и правило знаков

Запишем приращения полярного и диаметрального моментов инерции:

$$dI_p = (\rho(s)F(s)ds) \frac{R^2(s)}{2}, dI_d \approx \frac{dI_p}{2} = (\rho(s)F(s)ds) \frac{R^2(s)}{4}$$

Из-за наличия эксцентриситета геометрический центр вала C не совпадает с центром тяжести G . Таким образом, можно записать приращение момента импульса и уравнения равновесия в соответствии с рисунком 2.

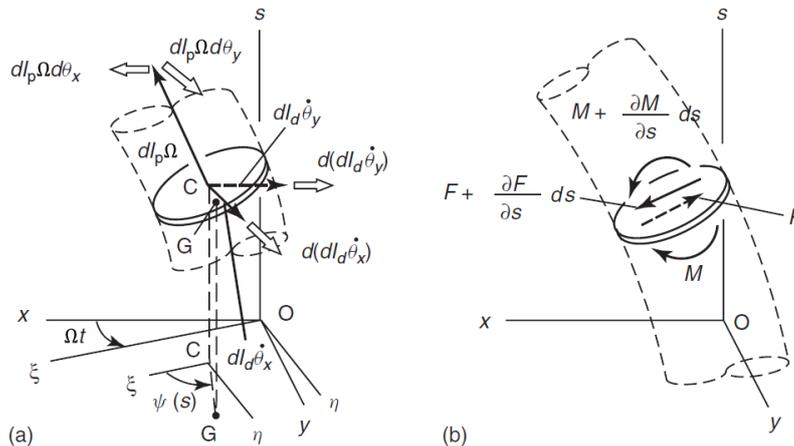


Рисунок 2. а) приращение момента импульса б) направления сил и моментов

Здесь x, y, s – глобальная система координат, ξ, η, s – подвижная система координат, Ω – угловая скорость вращения вала.

Также добавим демпфирование в систему: b – коэффициент демпфирования. Положим: u_G, v_G – движение центра тяжести, F_x, F_y – проекции силы.

Запишем второй закон Ньютона:

Трансляционное движение:

$$\begin{cases} (\rho(s)F(s)ds) \frac{\partial^2 u_G}{\partial t^2} = -F_x + \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial s} ds \right) - b \frac{\partial u}{\partial t} ds \\ (\rho(s)F(s)ds) \frac{\partial^2 v_G}{\partial t^2} = -F_y + \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial s} ds \right) - b \frac{\partial v}{\partial t} ds \end{cases}$$

Можно сократить на дифференциал ds :

$$\begin{cases} \rho(s)F(s) \frac{\partial^2 u_G}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial F_x}{\partial s} \\ \rho(s)F(s) \frac{\partial^2 v_G}{\partial t^2} + b \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial F_y}{\partial s} \end{cases}$$

Вращательное движение:

$$\begin{cases} \frac{d(dI_d \dot{\theta}_x) + dI_p \Omega d\theta_y}{dt} = -M_{xs} + \left(M_{xs} + \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} ds \right) + F_x ds \\ \frac{-d(dI_d \dot{\theta}_y) + dI_p \Omega d\theta_x}{dt} = M_{ys} - \left(M_{ys} + \frac{\partial M_{ys}}{\partial s} ds \right) - F_y ds \end{cases}$$

Преобразуем с учетом $\theta_x = \frac{\partial u}{\partial s}, \theta_y = \frac{\partial v}{\partial s}$:

$$\begin{cases} \frac{d \left(dI_d \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right) + dI_p \Omega d \left(\frac{\partial v}{\partial s} \right)}{dt} = \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} ds + F_x ds \\ \frac{-d \left(dI_d \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \right) + dI_p \Omega d \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)}{dt} = -\frac{\partial M_{ys}}{\partial s} ds - F_y ds \end{cases}$$

Преобразуем и поделим на дифференциал ds :

$$\begin{cases} \left(\frac{dI_d}{ds} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} + \left(\frac{dI_p}{ds} \right) \Omega \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} = \frac{\partial M_{xs}}{\partial s} + F_x \\ \left(\frac{dI_d}{ds} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial s \partial t^2} - \left(\frac{dI_p}{ds} \right) \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = \frac{\partial M_{ys}}{\partial s} + F_y \end{cases}$$

Помним, что:

$$dI_p = (\rho(s)F(s)ds) \frac{R^2(s)}{2}, dI_d \approx \frac{dI_p}{2} = (\rho(s)F(s)ds) \frac{R^2(s)}{4},$$

$$M_{xs} = E(s)J(s) \frac{\partial \theta_x}{\partial s}, M_{ys} = E(s)J(s) \frac{\partial \theta_y}{\partial s}$$

Подставляя данные выражения, получим:

$$\begin{cases} \rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} + \rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{2} \Omega \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} = \frac{\partial \left(E(s)J(s) \frac{\partial \theta_x}{\partial s} \right)}{\partial s} + F_x \\ \rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \frac{\partial^3 v}{\partial s \partial t^2} - \rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{2} \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} = \frac{\partial \left(E(s)J(s) \frac{\partial \theta_y}{\partial s} \right)}{\partial s} + F_y \end{cases}$$

Продифференцируем один раз по ds обе части уравнений, подставим выражения для $\frac{\partial F_x}{\partial s}$ и $\frac{\partial F_y}{\partial s}$ и запишем уравнения в перемещениях:

$$\begin{cases} \frac{\partial \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2} \right]}{\partial s} + \frac{\partial \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{2} \Omega \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial t} \right]}{\partial s} = \frac{\partial^2 \left(E(s)J(s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \right)}{\partial s^2} + \rho(s)F(s) \frac{\partial^2 u_G}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \frac{\partial^3 v}{\partial s \partial t^2} \right]}{\partial s} - \frac{\partial \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{2} \Omega \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} \right]}{\partial s} = \frac{\partial^2 \left(E(s)J(s) \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right)}{\partial s^2} + \rho(s)F(s) \frac{\partial^2 v_G}{\partial t^2} + b \frac{\partial v}{\partial t} \end{cases}$$

Перепишем в другом виде:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u}_G - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' + b\dot{u} = 0 \\ (E(s)J(s)v'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v}_G - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\dot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' + b\dot{v} = 0 \end{cases}$$

Выразим движение центра тяжести вала через движение всей системы:

$$\begin{cases} u_G(s, t) = u(s, t) + e(s) \cos[\Omega t + \varphi(s)] = u(s, t) + e_\xi(s) \cos \Omega t - e_\eta \sin \Omega t \\ v_G(s, t) = v(s, t) + e(s) \sin[\Omega t + \varphi(s)] = v(s, t) + e_\xi(s) \sin \Omega t + e_\eta \cos \Omega t \end{cases}$$

Подставляя в последнее уравнение, получим общий вид уравнений движения в частных производных:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' + b\dot{u} = \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s) \cos \Omega t - e_\eta(s) \sin \Omega t] \\ (E(s)J(s)v'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\dot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' + b\dot{v} = \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s) \sin \Omega t + e_\eta(s) \cos \Omega t] \end{cases}$$

где $E(s)$ – модуль упругости Юнга, $J(s)$ – момент инерции поперечного сечения, $\rho(s)$ – плотность, $F(s)$ – площадь поперечного сечения, $R(s)$ – радиус поперечного сечения, b – коэффициент демпфирования, Ω – угловая скорость вращения вала, $u(s, t)$, $v(s, t)$ – прогибы в двух плоскостях, $e_\xi(s)$, $e_\eta(s)$ – эксцентриситеты, s – продольная координата, t – время.

Данную систему двух дифференциальных уравнений можно переписать в виде одного уравнения в комплексном виде:

$$\begin{aligned} (E(s)J(s)w'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{w} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\ddot{w}' - 2i\Omega\dot{w}') \right]' + b\dot{w} = \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 \bar{e}(s) \exp(i\Omega t) \end{aligned}$$

1.2 Свободные колебания. Задача на собственные значения. Построение диаграммы Кэмпбелла

В данном разделе будем рассматривать задачу на собственные значения и определять критические скорости вращения вала. Для определения критических скоростей необходимо построить диаграмму Кэмпбелла, которая демонстрирует, как меняется собственная частота колебаний вала в зависимости от его угловой скорости вращения. Диаграмма Кэмпбелла построена четырьмя различными методами:

1. Аналитическое решение с использованием методов возмущений. Здесь используется расширение *MATLAB*'а – *MATCONT*, который использует метод продолжения по параметру [14], [15].
2. Приближенное решение с помощью *bvp4c* (boundary value problems) – метод, позволяющий решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Данный метод является встроенной функцией вычислительной системы *MATLAB* [16].
3. Численное решение с помощью системы конечно-элементного анализа *ANSYS*.
4. Численное решение с помощью системы конечно-элементного анализа *COMSOL*.

Данную задачу предполагается решить для случаев однородного вала с постоянным поперечным сечением и неоднородного вала с переменным поперечным сечением.

Общий вид уравнений свободных колебаний вала выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' + b\dot{u} = 0 \\ (E(s)J(s)v''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(\ddot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' + b\dot{v} = 0 \end{cases}$$

Или в комплексном виде:

$$(E(s)J(s)w''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{w} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(\ddot{w}' - 2i\Omega\dot{w}') \right]' + b\dot{w} = 0$$

На рисунке 3 схематично представлен общий вид объекта исследования и граничные условия. Здесь понимается, что поперечное сечение может быть произвольно меняющимся, а не только постоянным по длине и необязательно круглым.

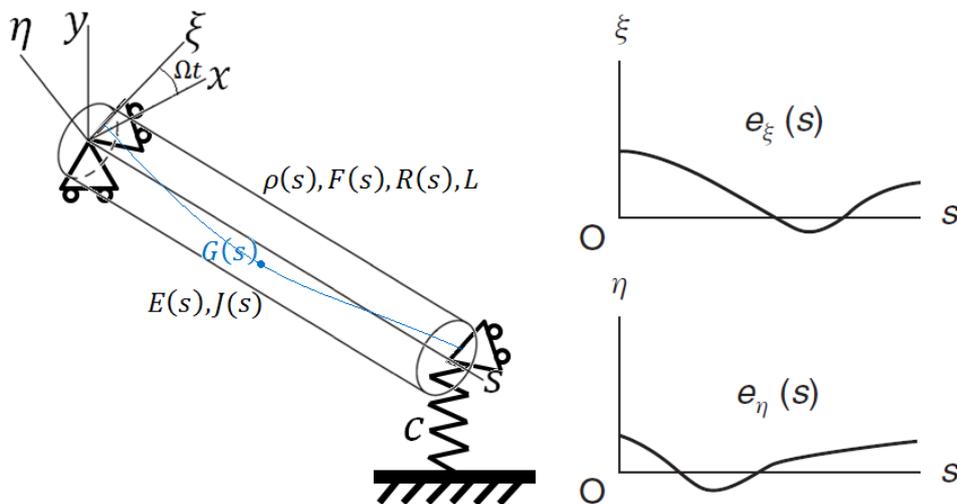


Рисунок 3. Объект исследования и изменение эксцентриситета по длине вала

Здесь $G(s)$ – положение центра тяжести. Запишем математическую формулировку граничных условий:

В стандартном виде:

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) = 0 \\ u''(0, t) = v''(0, t) = 0 \\ u''(L, t) = v''(L, t) = 0 \\ E(L)J(L) \cdot u'''(L, t) = c \cdot u(L, t) \\ v(L, t) = 0 \end{cases}$$

В комплексном виде:

$$\begin{cases} w(0, t) = 0 \\ w''(0, t) = 0 \\ w''(L, t) = 0 \\ E(L)J(L) \cdot \operatorname{Re}\{w'''(L, t)\} = c \cdot \operatorname{Re}\{w(L, t)\} \\ \operatorname{Im}\{w(L, t)\} = 0 \end{cases}$$

1.2.1 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Аналитическое решение с помощью метода продолжения по параметру (*MATCONT-MATLAB*)

1.2.1.1 Описание метода

Рассматривается гладкая функция $F: R^{n+1} \rightarrow R^n$. Требуется найти решение $P(x) = 0$. Необходимо обобщить решаемое уравнение к виду $F(x, t) = 0$ путем введения параметра $t: t \in [t_0, t^*]$, причем $F(x, t^*) = P(x)$, а уравнение $F(x, t_0) = 0$ легко разрешимо или решение x_0 известно заранее. Создается последовательность точек: $x_i, i = 1, 2, \dots$ по длине кривой (рисунок 4), удовлетворяющей выбранному допуску: $\forall \varepsilon > 0 \quad |F(x_i)| \leq \varepsilon$.

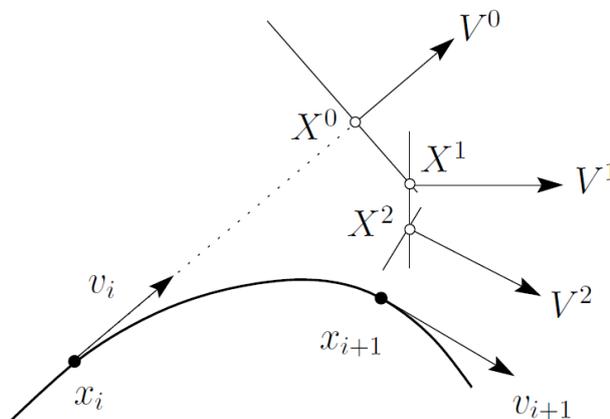


Рисунок 4. Кривая $F(x, t)$

Каждой точке x_i ставится в соответствие нормированный касательный вектор v_i :

$$F_x(x_i)v_i = 0$$

Процедура вычисления следующей точки x_{i+1} включает в себя 2 этапа:

1. Предсказание следующей точки
2. Корректировка предсказанной точки

Для нахождения следующей точки x_{i+1} необходимо вычислить касательный вектор в данной точке:

$$F_x(x_{i+1})v_{i+1} = 0$$

Процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден корень уравнения с заданной точностью. Более подробное описание метода представлено в [14], [15].

1.2.1.2 Получение частотного уравнения с параметром Ω

Уравнение свободных колебаний: $]b \equiv 0$ – для простоты исключим демпфирование. Здесь удобно использовать запись в комплексном виде:

$$EJw^{(IV)} + \rho A \ddot{w} - \frac{\rho AR^2}{4} [\ddot{w}'' - 2i\Omega \dot{w}'''] = 0$$

Решение отыскивается в виде:

$$w(s, t) = W(s)e^{i\omega t}$$

Получим уравнение для амплитуд:

$$EJW^{(IV)} - \frac{\rho AR^2}{4} [2\Omega\omega - \omega^2]W'' - \rho A\omega^2 W = 0,]m = \rho A, r^2 = R^2/4$$

$$W = e^{\lambda s}$$

Получаем характеристическое уравнение:

$$EJ\lambda^4 - mr^2[2\Omega\omega - \omega^2]\lambda^2 - m\omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \frac{mr^2[2\Omega\omega - \omega^2] \pm \sqrt{m^2r^4(2\Omega\omega - \omega^2)^2 + 4EJm\omega^2}}{2EJ}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{mr^2[2\Omega\omega - \omega^2] + \sqrt{m^2r^4(2\Omega\omega - \omega^2)^2 + 4EJm\omega^2}}{2EJ}}$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i \sqrt{\frac{mr^2[-2\Omega\omega + \omega^2] + \sqrt{m^2r^4(2\Omega\omega - \omega^2)^2 + 4EJm\omega^2}}{2EJ}}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\alpha(\omega, \Omega), \lambda_{3,4} = \pm i\beta(\omega, \Omega)$$

Тогда решение примет вид:

$$W = B_1 e^{\alpha s} + B_2 e^{-\alpha s} + B_3 e^{i\beta s} + B_4 e^{-i\beta s}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0, t) = 0 \\ w''(0, t) = 0 \\ w''(L, t) = 0 \\ EJ \cdot \text{Re}\{w'''(L, t)\} = c \cdot \text{Re}\{w(L, t)\} \\ \text{Im}\{w(L, t)\} = 0 \end{array} \right.$$

Перепишем условия для вещественных и мнимых частей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\{w(0, t)\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{w(0, t)\} = 0 \\ \operatorname{Re}\{w''(0, t)\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{w''(0, t)\} = 0 \\ \operatorname{Re}\{w''(L, t)\} = 0 \\ \operatorname{Im}\{w''(L, t)\} = 0 \\ EJ \cdot \operatorname{Re}\{w'''(L, t)\} = c \cdot \operatorname{Re}\{w(L, t)\} \\ \operatorname{Im}\{w(L, t)\} = 0 \end{array} \right.$$

В общем случае константы B_i могут быть комплексными, поэтому перепишем решение в виде:

$$w(s, t) = ((B_{1R} + iB_{1I})e^{\alpha s} + (B_{2R} + iB_{2I})e^{-\alpha s} + (B_{3R} + iB_{3I})(\cos\beta s + i\sin\beta s) + (B_{4R} + iB_{4I})(\cos\beta s - i\sin\beta s))(\cos\omega t + i\sin\omega t)$$

Далее воспользуемся аппаратом символьных вычислений в *MATLAB* и составим однородную СЛАУ 8 порядка. Удовлетворяя граничным условиям, получим однородную систему уравнений.

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\det(\omega, \Omega) = 0$$

В данный определитель входят неизвестная величина – собственная частота ω , и варьируемый параметр – угловая скорость вращения вала Ω . Тем самым, строго аналитически получена неявная зависимость $\omega = f(\Omega)$, разрешать которую для каждой Ω будем средствами *MATLAB-MATCONT*.

1.2.2 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью *bvp4c*

1.2.2.1 Описание метода

Bvp4c-метод служит для решения проблемы граничных значений систем дифференциальных уравнений. Решаемые им задачи называют двухточечными краевыми задачами, поскольку решение ищется при задании граничных условий как в начале, так и в конце интервала решения. Пусть имеется уравнение:

$$y'' + y = 0, y(a) = A, y(b) = B$$

Краевая задача решается методом пристрелки, поэтому требуется свести задачу к некоторой задаче Коши. Пусть $y(x, s)$ – решение задачи Коши с начальными условиями $y(a) = A, y'(a) = s$. Тогда решение продолжается для каждого x и спрашивается, при каких s выполнится $y(b, s) = B$?

Для правого конца получается алгебраическое уравнение. Более подробная информация о данном методе изложена в [16].

1.2.2.2 Нахождение начального приближения

Для данного случая уравнения существенно упрощаются и примут вид: $]b \equiv 0$ – для простоты исключим демпфирование.

$$\begin{cases} EJ u^{(IV)} + \rho F \ddot{u} - \rho F \frac{R^2}{4} (\ddot{u}'' + 2\Omega \dot{v}'') = 0 \\ EJ v^{(IV)} + \rho F \ddot{v} - \rho F \frac{R^2}{4} (\ddot{v}'' - 2\Omega \dot{u}'') = 0 \end{cases}$$

Поскольку далее последует процедура обезразмеривания, то для удобства будем обозначать \tilde{U}, \tilde{V} (с волной) размерные величины, а безразмерные – без значка волны.

Решение отыскивается в стандартном виде:

$$\begin{cases} u(x, t) = \operatorname{Re}\{\tilde{U}(x)e^{i\omega t}\} \\ v(x, t) = \operatorname{Re}\{\tilde{V}(x)e^{i\omega t}\} \end{cases}$$

Подставляя данные выражения, избавимся от временной зависимости и получим уравнения относительно амплитуд колебаний:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{(IV)} - \frac{\rho F \omega^2}{EJ} \tilde{U} - \frac{\rho F R^2}{4EJ} [2i\omega\Omega \tilde{V}'' - \omega^2 \tilde{U}'''] = 0 \\ \tilde{V}^{(IV)} - \frac{\rho F \omega^2}{EJ} \tilde{V} + \frac{\rho F R^2}{4EJ} [2i\omega\Omega \tilde{U}'' + \omega^2 \tilde{V}'''] = 0 \end{cases}$$

Для реализации данного метода необходимо задаться начальным приближением, которое предполагается отыскивать из задачи о свободных колебаниях не вращающегося вала:

$$\begin{cases} \tilde{U}^{(IV)} - \frac{\rho F \omega^2}{EJ} \tilde{U} + \frac{\rho F R^2 \omega^2}{4EJ} \tilde{U}'' = 0 \\ \tilde{V}^{(IV)} - \frac{\rho F \omega^2}{EJ} \tilde{V} + \frac{\rho F R^2 \omega^2}{4EJ} \tilde{V}'' = 0 \end{cases}$$

Обезразмерим величины прогибов и осевую координату, соотнеся их к геометрическим параметрам:

$$U = \frac{\tilde{U}}{d}, x = \frac{\tilde{x}}{L}, d = 2R$$

Так же отмасштабируем собственную частоту:

$$\omega = \frac{\tilde{\omega}}{c_\omega}$$

Обозначим: $\Theta_m^2 = \frac{E}{\rho}$

Так же учтем тот факт, что: $\frac{F}{J} = \frac{16}{d^2} = \frac{4}{R^2}$

$$\frac{d}{L^4} U^{(IV)} - 16 \frac{dc_\omega^2}{\Theta_m^2 d^2} \omega^2 U + \frac{dc_\omega^2}{L^2 \Theta_m^2} \omega^2 U'' = 0$$

$$U^{(IV)} - 16 \frac{L^2 c_\omega^2}{\Theta_m^2} \frac{L^2}{d^2} \omega^2 U + \frac{L^2 c_\omega^2}{\Theta_m^2} \omega^2 U'' = 0$$

$$U^{(IV)} - 16 \frac{L^2 c_\omega^2}{\Theta_m^2} \frac{L^2}{d^2} \omega^2 U + \frac{L^2 c_\omega^2}{\Theta_m^2} \omega^2 U'' = 0$$

$$\left[\frac{L^2 c_\omega^2}{\Theta_m^2} = 1, c_\omega^2 = \frac{\Theta_m^2}{L^2} \right]$$

Обозначим: $\alpha^2 = \left(\frac{L}{d}\right)^2$

$$U^{(IV)} - 16\alpha^2\omega^2U + \omega^2U'' = 0, x \in [0,1]$$

Аналогичные рассуждения для прогиба V , поэтому система будет иметь вид:

$$\begin{cases} U^{(IV)} - 16\alpha^2\omega^2U + \omega^2U'' = 0 \\ V^{(IV)} - 16\alpha^2\omega^2V + \omega^2V'' = 0 \end{cases}$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} U(0) = 0, U''(0) = 0, \frac{EJ}{L^3}U'''(1) = cU(1), U''(1) = 0 \\ V(0) = 0, V''(0) = 0, V(1) = 0, V''(1) = 0 \end{cases}$$

На данном этапе будут представлены промежуточные результаты: зависимость первой собственной частоты для каждого движения от параметра α и эволюция соответствующей формы колебаний.

Поскольку уравнения для U и V идентичны, то общий вид решения для них будет одинаков, различия будут лишь на этапе удовлетворения граничным условиям. Поэтому дальнейшие рассуждения приведены для прогиба U .

Для простоты вводятся обозначения:

$$a = \omega^2, b = 16\alpha^2\omega^2$$

Первое уравнение системы переписывается в виде:

$$U^{(IV)} - bU + aU'' = 0$$

Решение для данного дифференциального уравнения четвертого порядка отыскивается в виде:

$$U = e^{\lambda x}$$

Подставив вид решения в искомое уравнение, получено алгебраическое уравнение относительно неизвестной λ :

$$\lambda^4 + a\lambda^2 - b = 0, \frac{b}{a} = 16\alpha^2, a > 0, b > 0$$

Данное уравнение имеет четыре корня:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}}, \\ \lambda_3 &= \sqrt{\frac{-\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}}, \lambda_4 = -\sqrt{\frac{-\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}} \end{aligned}$$

Стоит заметить, что $\lambda_i = \lambda_i(\omega_j), i = \overline{1,4}, j = \overline{1,\infty}$, то есть являются функциями от собственных частот.

Стоит также определить, какие корни являются вещественными, а какие комплексными. Поскольку всегда выполняются соотношения $\frac{b}{a} = 16\alpha^2, a > 0, b > 0$ необходимо проанализировать знак выражения $\sqrt{a^2 + 4b} - a$:

$$\sqrt{a^2 + 4b} - a = a \left(\sqrt{1 + \frac{64a^2}{\omega^2}} - 1 \right)$$

Очевидно, что данное выражение строго положительно. Таким образом, установлено, что корни λ_1, λ_2 – вещественные, λ_3, λ_4 – пара комплексных. Имеет смысл переписать их выражения в виде:

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} - a}{2}},$$

$$\lambda_3 = i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}}, \lambda_4 = -i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + 4b} + a}{2}}$$

Таким образом, искомое решение представимо в виде:

$$U = \text{Re}\{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{\lambda_4 x}\}$$

Аналогичное решение будет для прогиба V :

$$V = \text{Re}\{C_5 e^{\lambda_1 x} + C_6 e^{\lambda_2 x} + C_7 e^{\lambda_3 x} + C_8 e^{\lambda_4 x}\}$$

Константы $C_i, i = \overline{1,8}$ определяются из граничных условий, удовлетворяя которым, будет получена система алгебраических уравнений восьмого порядка:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 + C_3 \lambda_3^2 + C_4 \lambda_4^2 = 0 \\ C_1 \left(\lambda_1^3 e^{\lambda_1 L} - \frac{c}{EJ} e^{\lambda_1 L} \right) + C_2 \left(\lambda_2^3 e^{\lambda_2 L} - \frac{c}{EJ} e^{\lambda_2 L} \right) + C_3 \left(\lambda_3^3 e^{\lambda_3 L} - \frac{c}{EJ} e^{\lambda_3 L} \right) + C_4 \left(\lambda_4^3 e^{\lambda_4 L} - \frac{c}{EJ} e^{\lambda_4 L} \right) = 0 \\ C_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 L} + C_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 L} + C_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L} + C_4 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L} = 0 \\ C_5 + C_6 + C_7 + C_8 = 0 \\ C_5 \lambda_1^2 + C_6 \lambda_2^2 + C_7 \lambda_3^2 + C_8 \lambda_4^2 = 0 \\ C_5 e^{\lambda_1 L} + C_6 e^{\lambda_2 L} + C_7 e^{\lambda_3 L} + C_8 e^{\lambda_4 L} = 0 \\ C_5 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 L} + C_6 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 L} + C_7 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L} + C_8 \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L} = 0 \end{array} \right.$$

Система может быть записана в матричной форме:

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{c} = 0,$$

где $\mathbf{c} = [C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8]^T$, а матрица $\mathbf{\Lambda}$ представима в виде:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\lambda_1^3 - \frac{c}{EJ} \right) e^{\lambda_1 L} & \left(\lambda_2^3 - \frac{c}{EJ} \right) e^{\lambda_2 L} & \left(\lambda_3^3 - \frac{c}{EJ} \right) e^{\lambda_3 L} & \left(\lambda_4^3 - \frac{c}{EJ} \right) e^{\lambda_4 L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 L} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 L} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_1 L} & e^{\lambda_2 L} & e^{\lambda_3 L} & e^{\lambda_4 L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^2 e^{\lambda_1 L} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 L} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 L} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4 L} \end{bmatrix}$$

Видно, что поскольку не рассматривается вращение вала, то система становится развязанной. Для нахождения нетривиальных решений системы, необходимо, чтобы определитель матрицы $\mathbf{\Lambda}$ был равен нулю:

$$\det \Lambda = 0$$

Нахождение корней данного характеристического уравнения затруднительно, поэтому требуется упростить задачу.

Решение системы уравнений для не вращающегося вала будет определено также bvp4c методом, а в качестве начального приближения будет взято решение системы уравнений соответствующей простейшему случаю:

$$\begin{cases} U^{(IV)} - 16\alpha^2\omega^2 U = 0 \\ V^{(IV)} - 16\alpha^2\omega^2 V = 0 \end{cases}$$

Вводится обозначение: $a^4 = 16\alpha^2\omega^2$, откуда можно выразить $\omega = \frac{a^2}{4\alpha}$ – приведенная собственная частота.

Уравнения системы так же можно рассматривать независимо, и общий вид решения для обоих уравнений будет одинаковым, отличия появятся лишь при удовлетворении граничным условиям. Решение целесообразно искать в виде функций Крылова.

Функции Крылова:

$$K_1(ax) = \frac{1}{2}(\cosh ax + \cos ax)$$

$$K_2(ax) = \frac{1}{2}(\sinh ax + \sin ax)$$

$$K_3(ax) = \frac{1}{2}(\cosh ax - \cos ax)$$

$$K_4(ax) = \frac{1}{2}(\sinh ax - \sin ax)$$

Решение:

$$\begin{cases} U = C_1 K_1(ax) + C_2 K_2(ax) + C_3 K_3(ax) + C_4 K_4(ax) \\ V = C_5 K_1(ax) + C_6 K_2(ax) + C_7 K_3(ax) + C_8 K_4(ax) \end{cases}$$

Причем функции Крылова обладают следующими свойствами:

$$K_1(ax) = K_2'(ax) = K_3''(ax) = K_4'''(ax) = K_1^{(IV)}(ax)$$

$$K_1(0) = 1, K_2(0) = 0, K_3(0) = 0, K_4(0) = 0$$

Граничные условия сохраняются:

$$\begin{cases} U(0) = 0, U''(0) = 0, \frac{EJ}{L^3} U'''(1) = cU(1), U''(1) = 0 \\ V(0) = 0, V''(0) = 0, V(1) = 0, V''(1) = 0 \end{cases}$$

Запишем выражения для производных функции U :

$$\begin{cases} U = C_1 K_1(ax) + C_2 K_2(ax) + C_3 K_3(ax) + C_4 K_4(ax) \\ U' = a[C_1 K_4(ax) + C_2 K_1(ax) + C_3 K_2(ax) + C_4 K_3(ax)] \\ U'' = a^2[C_1 K_3(ax) + C_2 K_4(ax) + C_3 K_1(ax) + C_4 K_2(ax)] \\ U''' = a^3[C_1 K_2(ax) + C_2 K_3(ax) + C_3 K_4(ax) + C_4 K_1(ax)] \end{cases}$$

Удовлетворение граничным условиям на левом конце приводит к $C_1 = C_3 \equiv 0$

Удовлетворение граничным условиям на правом конце приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{EJa^3}{L^3} [C_2 K_3(a) + C_4 K_1(a)] = c [C_2 K_2(a) + C_4 K_4(a)] \\ C_2 K_4(a) + C_4 K_2(a) = 0 \end{cases}$$

Перепишем в виде:

$$\begin{cases} C_2 \left[\frac{EJa^3}{cL^3} K_3(a) - K_2(a) \right] + C_4 \left[\frac{EJa^3}{cL^3} K_1(a) - K_4(a) \right] = 0 \\ C_2 K_4(a) + C_4 K_2(a) = 0 \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{aligned} K_2(a) \left[\frac{EJa^3}{cL^3} K_3(a) - K_2(a) \right] - K_4(a) \left[\frac{EJa^3}{cL^3} K_1(a) - K_4(a) \right] &= 0 \\ \frac{EJa^3}{cL^3} [K_2(a)K_3(a) - K_1(a)K_4(a)] - [K_2^2(a) - K_4^2(a)] &= 0 \\ \frac{EJa^3}{2cL^3} [\cosh(a) \sin(a) - \cos(a) \sinh(a)] - \sin(a) \sinh(a) &= 0 \end{aligned}$$

В таблице 1 представлено сравнение первых 5 собственных частот с численным решением с помощью МКЭ для случая мягких пружин.

Таблица 1. Сравнение первых 5 собственных частот для случая мягкой пружины

№ частоты	Аналитика, рад/с	FEM, рад/с	Относительная погрешность, %
1	85.8	85.8	< 0.1%
2	3184	3131	1.7%
3	10315	9808	4.9%
4	21521	19519	9.3%
5	36802	31557	14.25%

В таблице 2 представлено сравнение первых 5 собственных частот с численным решением с помощью МКЭ для случая жестких пружин.

Таблица 2. Сравнение первых 5 собственных частот для случая жесткой пружины

№ частоты	Аналитика, рад/с	FEM, рад/с	Относительная погрешность, %
1	1717.5	1705.6	< 0.1%
2	4703.3	4636.5	< 0.3%
3	10837.3	10231.4	5.0%
4	22242.3	19748	9.3%
5	36935	31701	15%

Аналогичная запись для производных функции V :

$$\begin{cases} V = C_5 K_1(ax) + C_6 K_2(ax) + C_7 K_3(ax) + C_8 K_4(ax) \\ V' = a[C_5 K_4(ax) + C_6 K_1(ax) + C_7 K_2(ax) + C_8 K_3(ax)] \\ V'' = a^2[C_5 K_3(ax) + C_6 K_4(ax) + C_7 K_1(ax) + C_8 K_2(ax)] \\ V''' = a^3[C_5 K_2(ax) + C_6 K_1(ax) + C_7 K_4(ax) + C_8 K_1(ax)] \end{cases}$$

Удовлетворение граничным условиям на левом конце приводит к $C_5 = C_7 \equiv 0$

Удовлетворение граничным условиям на правом конце приводит к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_6 K_2(a) + C_8 K_4(a) = 0 \\ C_6 K_4(a) + C_8 K_2(a) = 0 \end{cases}$$

Система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\begin{aligned} K_2^2(a) - K_4^2(a) &= 0 \\ \sin(a)\sinh(a) &= 0 \\ a &= \pi n, n = \overline{1, \infty} \end{aligned}$$

В таблице 3 представлено сравнение первых 5 собственных частот с численным решением с помощью МКЭ.

Таблица 3. Сравнение первых 5 собственных частот

№ частоты	Аналитика, рад/с	FEM, рад/с	Относительная погрешность, %
1	2037	2015	1%
2	8150	7831	3.9%
3	18337	16876	8%
4	32600	28489	12.6%
5	50936	42115	17.3%

Определим вид форм колебаний для U, V :

$$\begin{cases} U = C_2 K_2(ax) + C_4 K_4(ax) \\ C_2 K_4(a) + C_4 K_2(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V = C_6 K_2(ax) + C_8 K_4(ax) \\ C_6 K_4(a) + C_8 K_2(a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = C_2 \left[K_2(ax) - \frac{K_4(a)}{K_2(a)} K_4(ax) \right] \\ V = C_6 \left[K_2(ax) - \frac{K_4(a)}{K_2(a)} K_4(ax) \right] \end{cases}$$

Константы C_2, C_6 определяются из условий нормировки:

$$\int_0^L U_p^2(x) dx = 1, \int_0^L V_p^2(x) dx = 1$$

Для U и V имеем:

$$C_2^2 \int_0^1 \left[K_2(a_U x) - \frac{K_4(a_U)}{K_2(a_U)} K_4(a_U x) \right]^2 dx = 1$$

$$C_6^2 \int_0^1 \left[K_2(a_V x) - \frac{K_4(a_V)}{K_2(a_V)} K_4(a_V x) \right]^2 dx = 1$$

$$C_2^2 \int_0^1 \left[\frac{\sin(a_U) \sinh(a_U x) + \sinh(a_U) \sin(a_U x)}{\sin(a_U) + \sinh(a_U)} \right]^2 dx = 1$$

$$C_6^2 \int_0^1 \left[\frac{\sin(a_V) \sinh(a_V x) + \sinh(a_V) \sin(a_V x)}{\sin(a_V) + \sinh(a_V)} \right]^2 dx = 1$$

Данный интеграл вычислялся с помощью *MATLAB*, поэтому не будем его выписывать в силу громоздкости выражений. Скажем лишь то, что константы C_2, C_6 будут зависеть от параметра a , а, стало быть, от собственной частоты ω .

Таким образом, в качестве начальных приближений для задачи о не вращающемся вале и без учета инерции на поворот можно использовать функции:

$$\begin{cases} U(x) = C_2(a_U(\omega_U)) \left[K_2(a_U x) - \frac{K_4(a_U)}{K_2(a_U)} K_4(a_U x) \right] \\ V(x) = C_6(a_V(\omega_V)) \left[K_2(a_V x) - \frac{K_4(a_V)}{K_2(a_V)} K_4(a_V x) \right] \end{cases}$$

1.2.3 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Численное решение в *COMSOL* и *ANSYS*

Для решения данной задачи методом конечных элементов будем использовать двухузловой балочный конечный элемент в *ANSYS (BEAM 188)* и *COMSOL*. Геометрические и физико-механические характеристики, а также граничные условия близки к исходной постановке.

Упругая опора моделируется *COMBIN 14* в *ANSYS* и с помощью *JOURNAL BEARING* в *COMSOL*. В таблице 4 представлены характеристики вала.

Таблица 4. Физико-механические свойства вала

Материал	Медь
Плотность ρ , кг/м ³	8920
Модуль Юнга E , Па	$1.1 \cdot 10^{11}$
Коэффициент Пуассона ν	0.32
Жесткость мягкой пружины s , Н/м	10^4
Жесткость жесткой пружины s , Н/м	10^7
Скорость вращения вала	$0 \leq \Omega \leq 5000$ рад/с

1.2.4 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Результаты и выводы

Представим результаты для первых 3 критических скоростей. Как было найдено ранее, первые три собственные частоты в случае невращающегося вала и без учета инерции на

поворот для мягкой пружины: $\omega_1 = 85.8$ рад/с, $\omega_2 = 2037$ рад/с, $\omega_3 = 3184$ рад/с, для жесткой пружины: $\omega_1 = 812.7$ рад/с, $\omega_2 = 2037$ рад/с, $\omega_3 = 3342$ рад/с.

На рисунке 5 представлены формы колебаний, соответствующие данным собственным частотам, которые были получены аналитически с помощью метода продолжения по параметру, приближенным bvp4c-методом, а также численно в ANSYS и COMSOL. Для примера представлен лишь случай мягкой пружины.

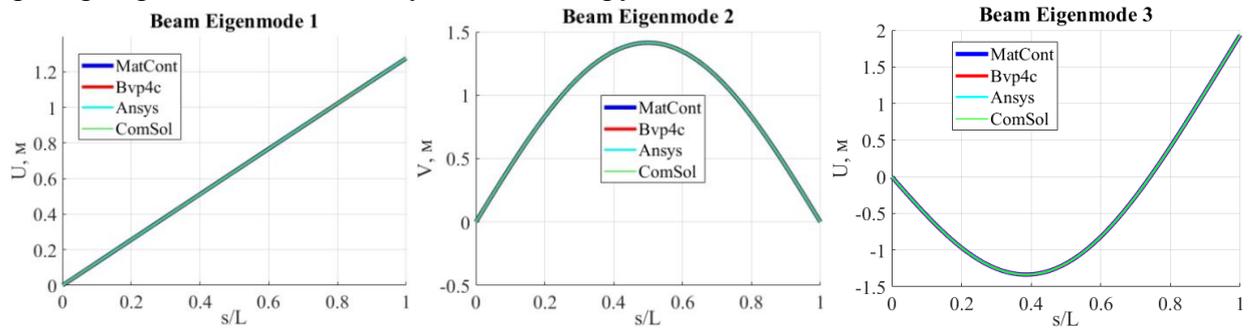


Рисунок 5. Первые 3 формы колебаний, полученные аналитически

На рисунке 6 представлены визуализация форм колебаний, соответствующие данным собственным частотам, которые были получены с помощью МКЭ.

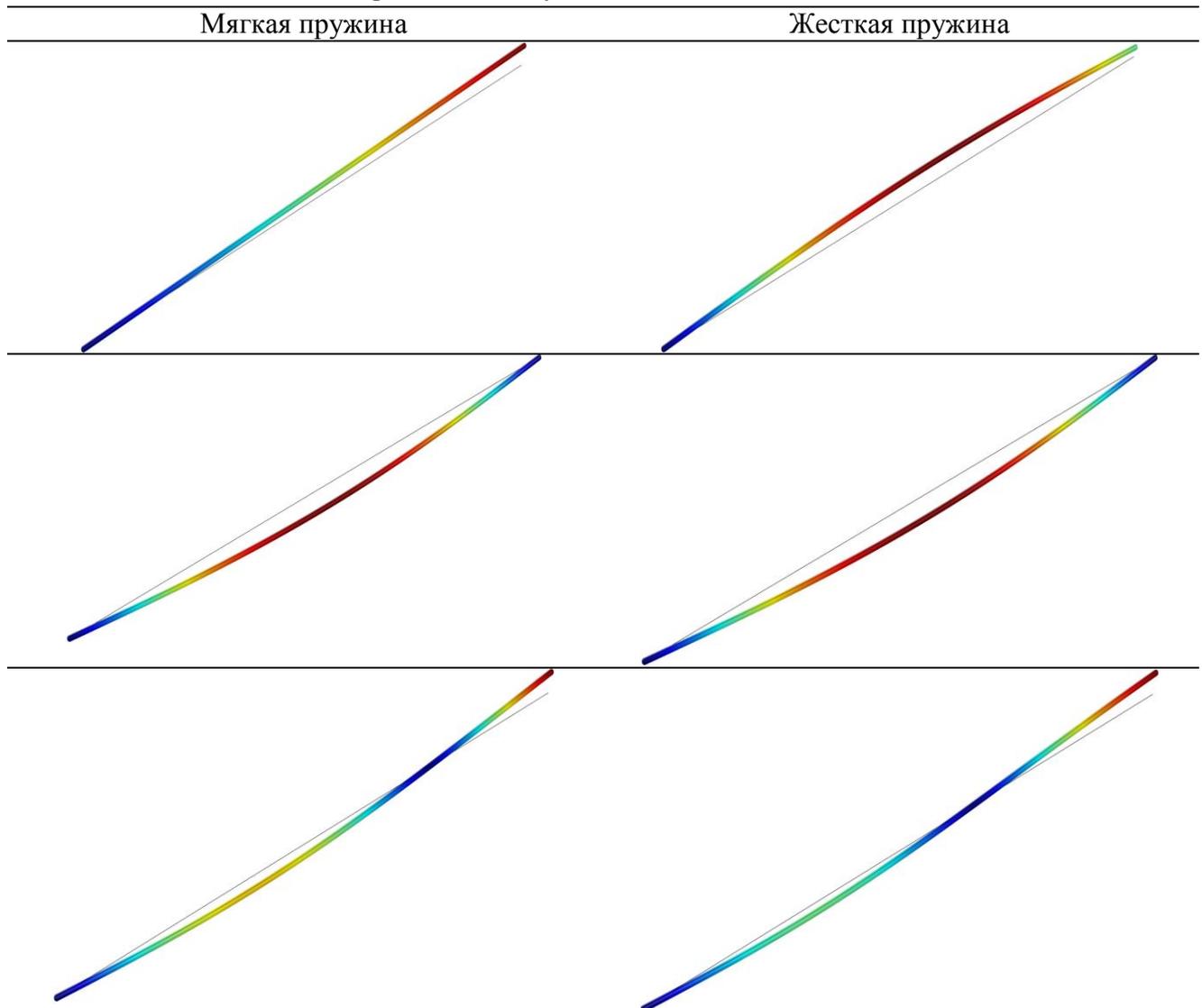


Рисунок 6. Первые 3 формы колебаний, полученные МКЭ

Как видно, в случае мягкой пружины движение по первой форме связано с деформацией пружины, в то время как изгиб самого вала не происходит. В случае жесткой пружины наблюдается работа как самой пружины, так и виден изгиб самого вала. Вторая форма соответствует движению в перпендикулярном направлении, то есть не является зависящей от жесткости пружины из-за условия шарнирного опирания в горизонтальном направлении.

Далее было проанализировано влияние слагаемого, характеризующего инерцию на поворот, но так же без учета скорости вращения вала. Это значит, что система уравнений по-прежнему является развязанной, то есть можно произвести декомпозицию на два независимых U - и V -движения. Строилась зависимость первой собственной частоты (и соответствующей ей собственной формы) для U, V -движений от введенного ранее параметра $\alpha = L/d$. На рисунках 7, 8 представлены данные зависимости.

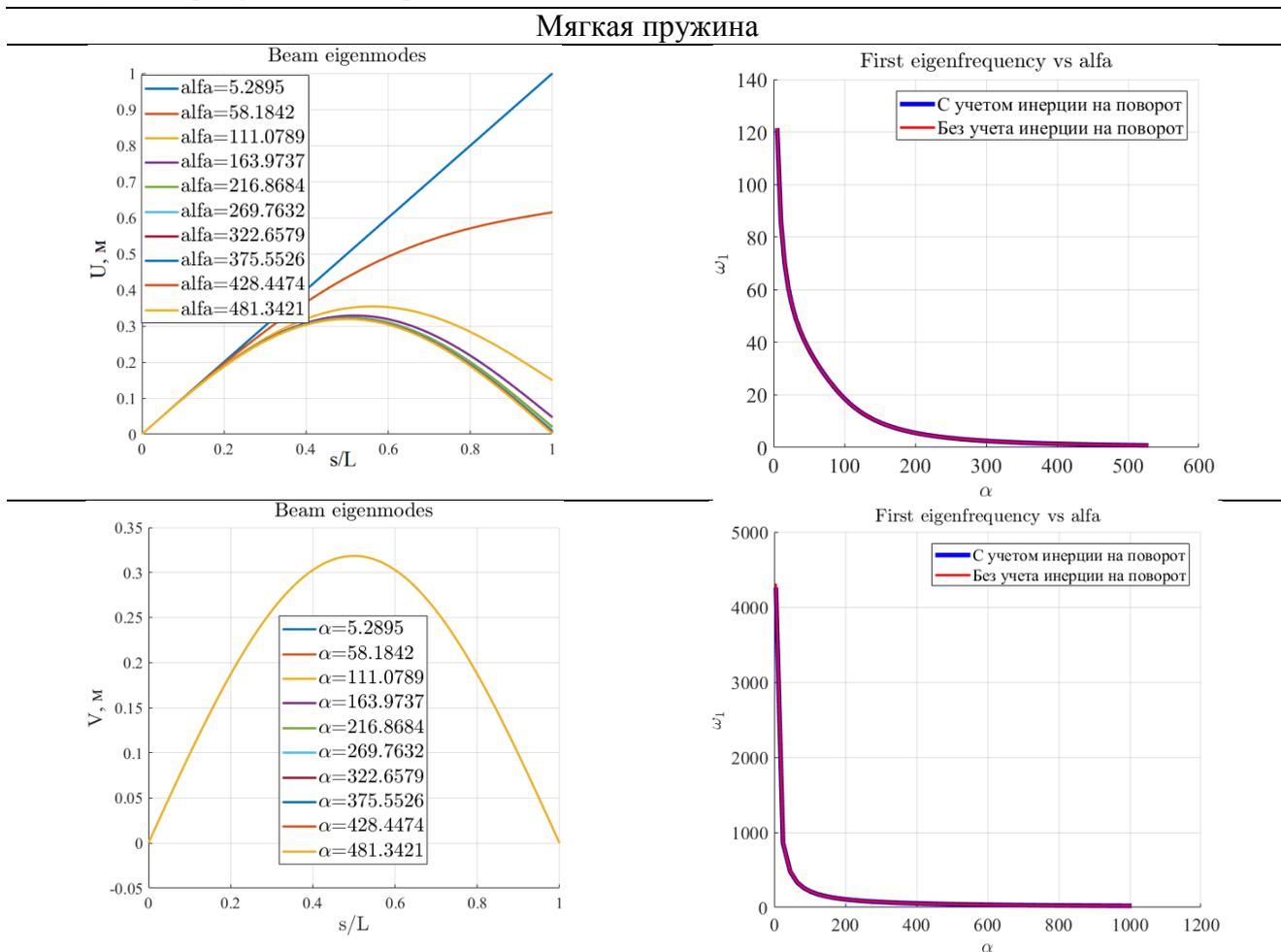


Рисунок 7. Эволюция форм колебаний и собственных частот в случае мягкой пружины

Жесткая пружина

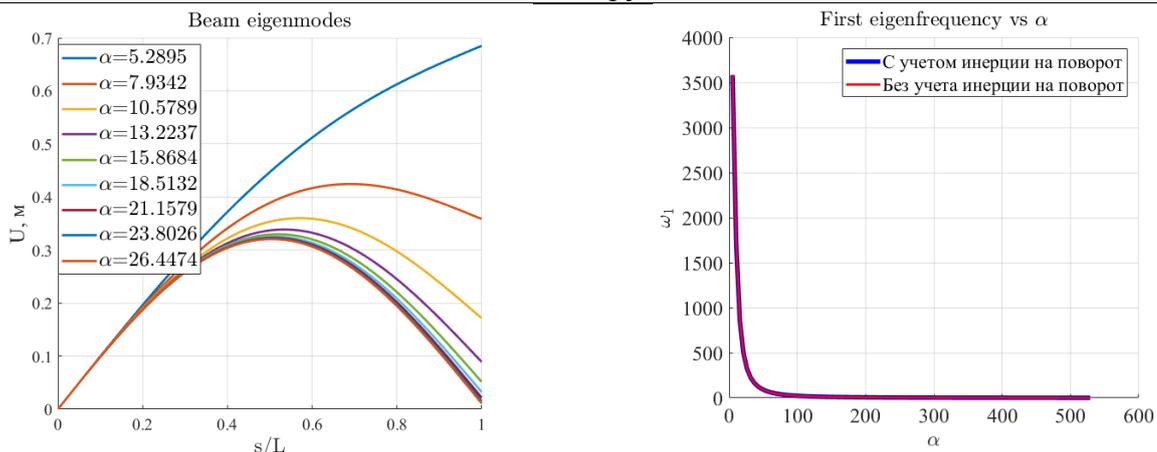


Рисунок 8. Эволюция форм колебаний и собственных частот в случае жесткой пружины

Далее рассматривалась исходная система уравнений с учетом вращения вала. Здесь система является связанной, то есть происходит влияние движений в двух плоскостях друг на друга. На рисунках 9-11 представим диаграммы Кэмпбелла – зависимость собственной частоты системы от скорости вращения вала. Тем самым определим первые 3 критические скорости вращения с помощью описанных выше методов для мягкой и жесткой пружины, а также для вырожденного случая бесконечной жесткости пружины $c \rightarrow \infty$.

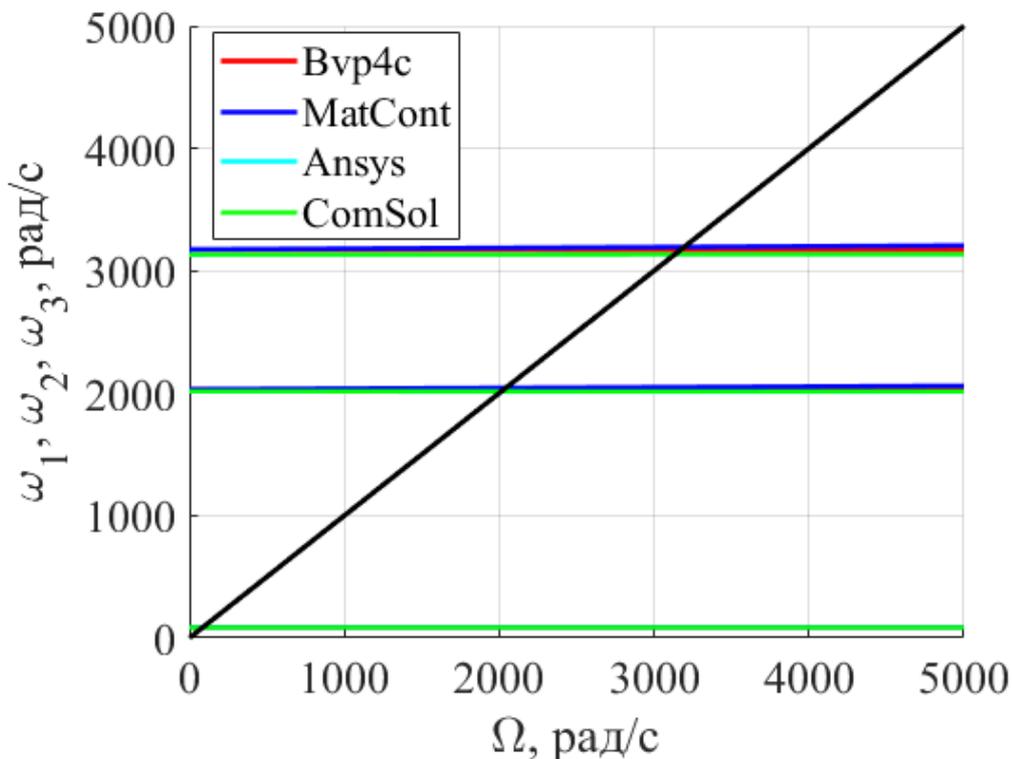


Рисунок 9. Диаграмма Кэмпбелла для случая мягкой пружины

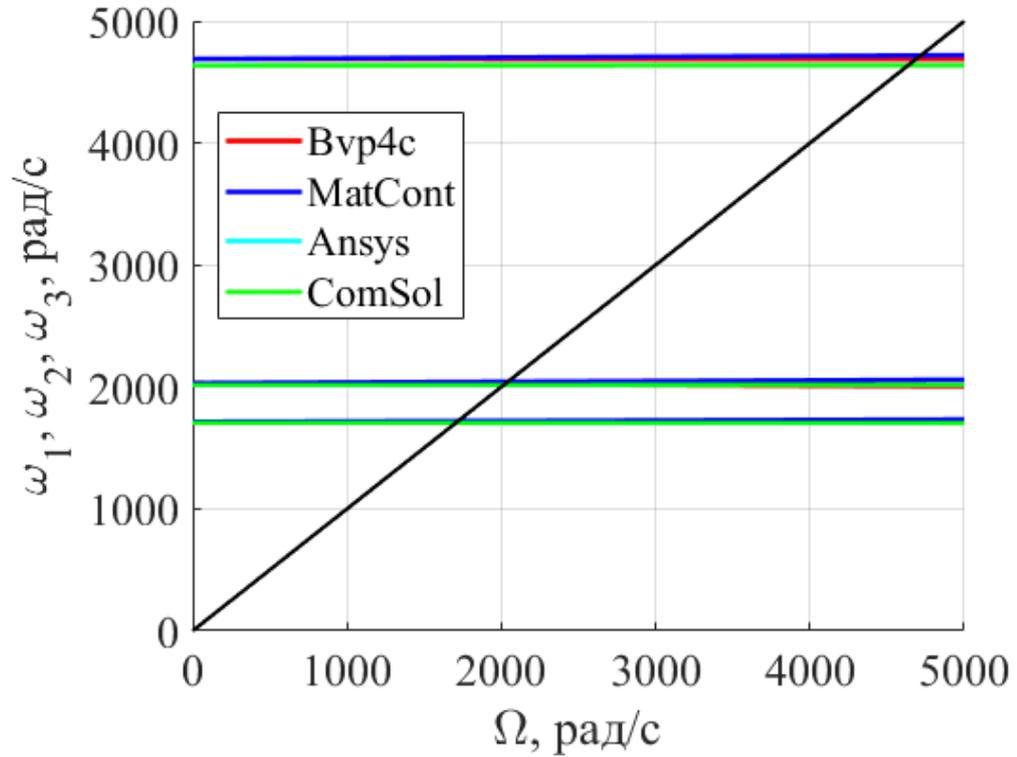


Рисунок 10. Диаграмма Кэмпбелла для случая жесткой пружины

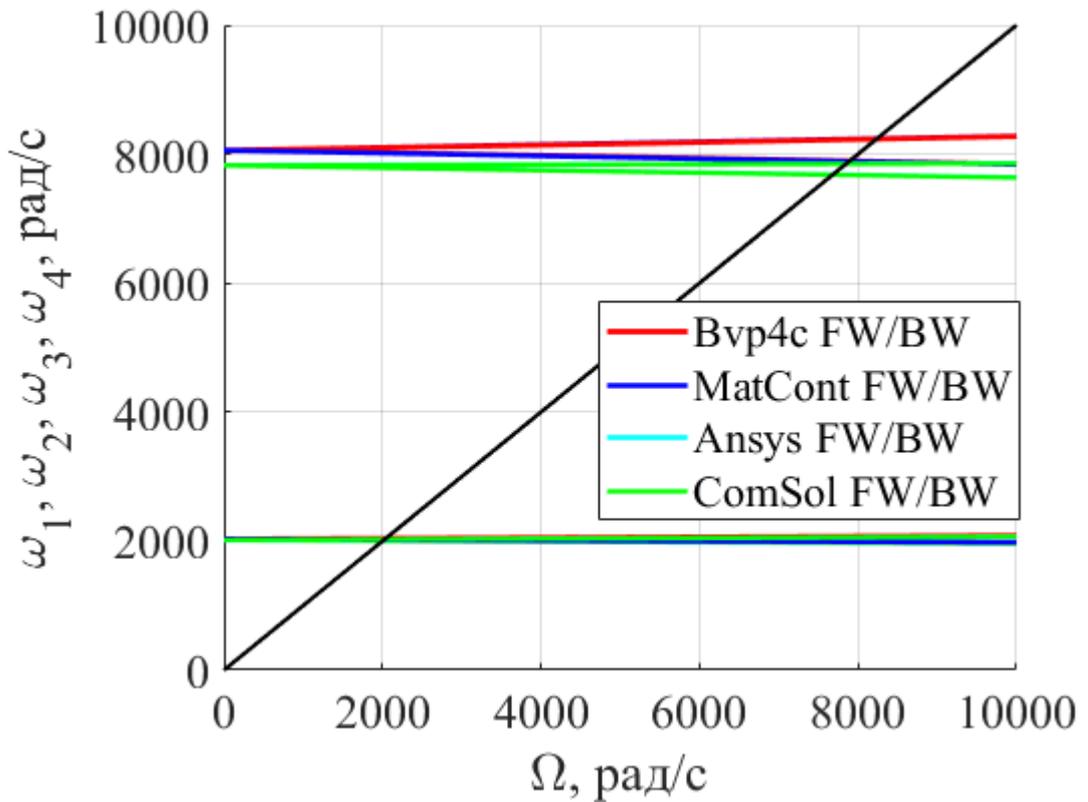


Рисунок 11. Диаграмма Кэмпбелла для случая бесконечной жесткости пружины

Как видно из последней зависимости, наблюдается расщепление частот. Фактически, данный случай соответствует шарнирному опиранию в обоих направлениях, где присутствуют кратные частоты. Отсюда и возникает явления прямой и обратной прецессии.

Также на рисунке 12 представлены первые 3 формы колебаний вращающегося вала.

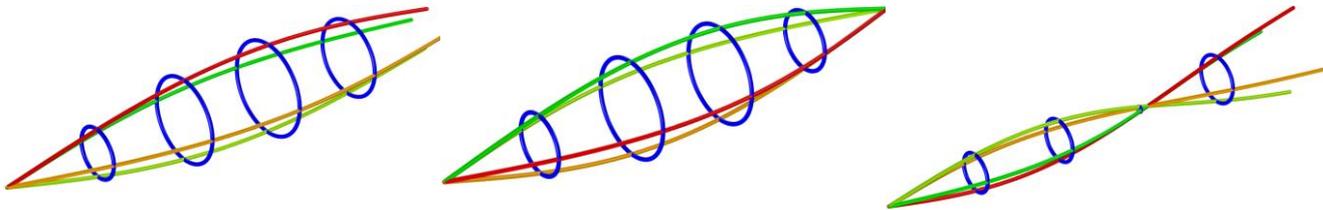


Рисунок 12. Формы колебаний вращающегося вала

1.2.5 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью `bvp4c`

Запишем общий вид уравнений свободных колебаний вала, для простоты избавимся от демпфирования:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' = 0 \\ (E(s)J(s)v'')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(\ddot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' = 0 \end{cases}$$

Решение отыскивается в стандартном виде:

$$\begin{cases} u(x, t) = \operatorname{Re}\{U(x)e^{i\omega t}\} \\ v(x, t) = \operatorname{Re}\{V(x)e^{i\omega t}\} \end{cases}$$

Подставляя данные выражения, избавимся от временной зависимости и получим уравнения относительно амплитуд колебаний:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)U'')'' - \rho(s)F(s)\omega^2 U - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(2\Omega i\omega V' - \omega^2 U') \right]' = 0 \\ (E(s)J(s)V'')'' - \rho(s)F(s)\omega^2 V + \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{4}(2\Omega i\omega U' + \omega^2 V') \right]' = 0 \end{cases}$$

Рассматриваемый случай соответствует синусоидальному изменению диаметра вала (круглого сечения) по его длине. Пусть физико-механические свойства меняются по линейному закону:

$$\begin{cases} E(s) = as + b \\ \rho(s) = cs + d' \end{cases}$$

Константы a, b, c, d определим явно, когда будем рассматривать конкретный пример.

$$\begin{cases} J(s) = \frac{\pi}{64}d^4(s) \\ F(s) = \frac{\pi}{4}d^2(s), \\ R(s) = \frac{d(s)}{2} \end{cases}$$

где $d(s)$ – диаметр вала.

Упростим выражения:

$$E(s)J(s) = \frac{\pi}{64} (as + b)d^4(s)$$

$$\rho(s)F(s) = \frac{\pi}{4} (cs + d)d^2(s)$$

$$\rho(s)F(s) = \frac{\pi}{8} (cs + d)d^3(s)$$

$$d(s) = (d_{max} - d_0) \sin\left(\frac{\pi \cdot n \cdot s}{L}\right) + d_0,$$

где d_0 – начальный диаметр, n – число полуволн синуса, d_{max} – максимальный по сечению диаметр вала.

1.2.6 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Численное решение в ANSYS

Для решения данной задачи методом конечных элементов будем использовать двухузловой балочный конечный элемент в ANSYS (*BEAM 188*). Геометрические и физико-механические характеристики, а также граничные условия соответствуют исходной постановке. Упругая опора моделируется с помощью конечного элемента *COMBIN 14* в ANSYS. Рассматривается вал с синусоидально меняющимся поперечным сечением. В таблице 5 представлены характеристики вала.

Таблица 5. Физико-механические свойства вала

Материал	Медь
Плотность ρ , кг/м ³	$11080s/L + 8920$
Модуль Юнга E , Па	$(-50s/L + 110) \cdot 10^9$
Коэффициент Пуассона ν	0.32
Жесткость мягкой пружины c , Н/м	10^4
Жесткость жесткой пружины c , Н/м	10^7
Скорость вращения вала	$0 \leq \Omega \leq 5000$ рад/с

Диаметр меняется по закону:

$$d(s) = 0.012 \sin\left(10\pi \frac{s}{L}\right) + 0.038$$

Конечно-элементная модель представлена на рисунке 13.

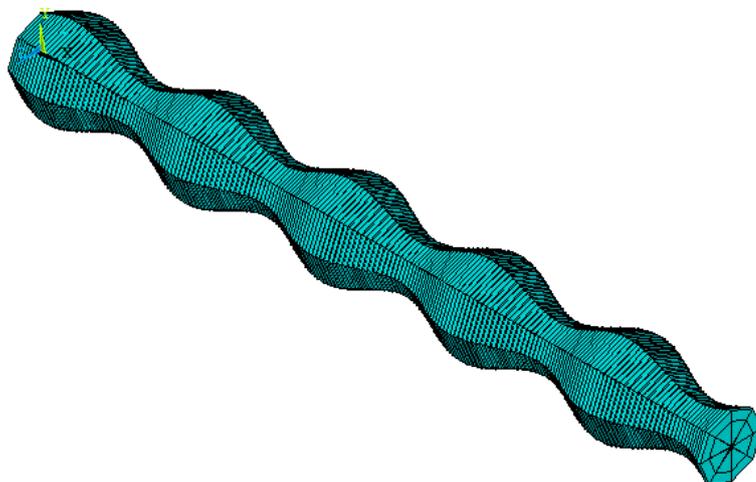


Рисунок 13. КЭ модель

1.2.7 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Результаты и выводы

Представим результаты для первых 3 критических скоростей. В ходе проведения модального анализа были определены собственные частоты данной модели. Первые три собственные частоты в случае для мягкой пружины: $\omega_1 = 62$ рад/с, $\omega_2 = 1004$ рад/с, $\omega_3 = 1680$ рад/с, для жесткой пружины: $\omega_1 = 930$ рад/с, $\omega_2 = 1004$ рад/с, $\omega_3 = 2937$ рад/с.

Формы колебаний для данной модели идентичны тем, что были получены для однородного вала.

На рисунках представим диаграммы Кэмпбелла – зависимость собственной частоты системы от скорости вращения вала. Тем самым определим первые 3 критические скорости вращения с помощью описанных выше методов для мягкой и жесткой пружины, а также для вырожденного случая бесконечной жесткости пружины $c \rightarrow \infty$.

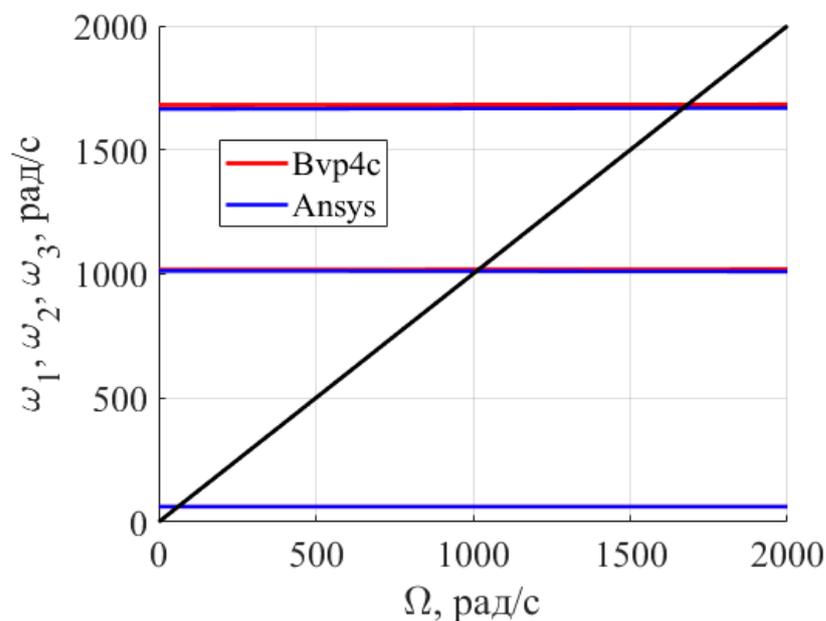


Рисунок 14. Диаграмма Кэмпбелла для случая мягкой пружины

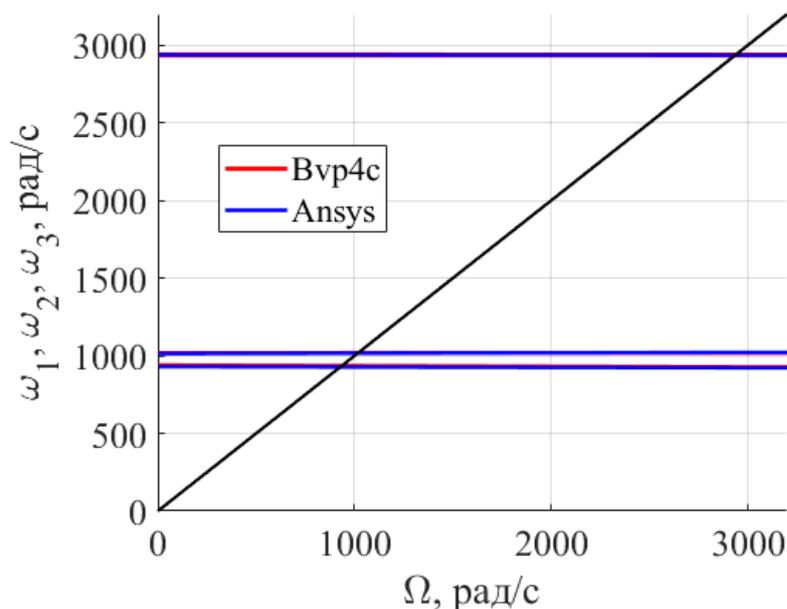


Рисунок 15. Диаграмма Кэмпбелла для случая жесткой пружины

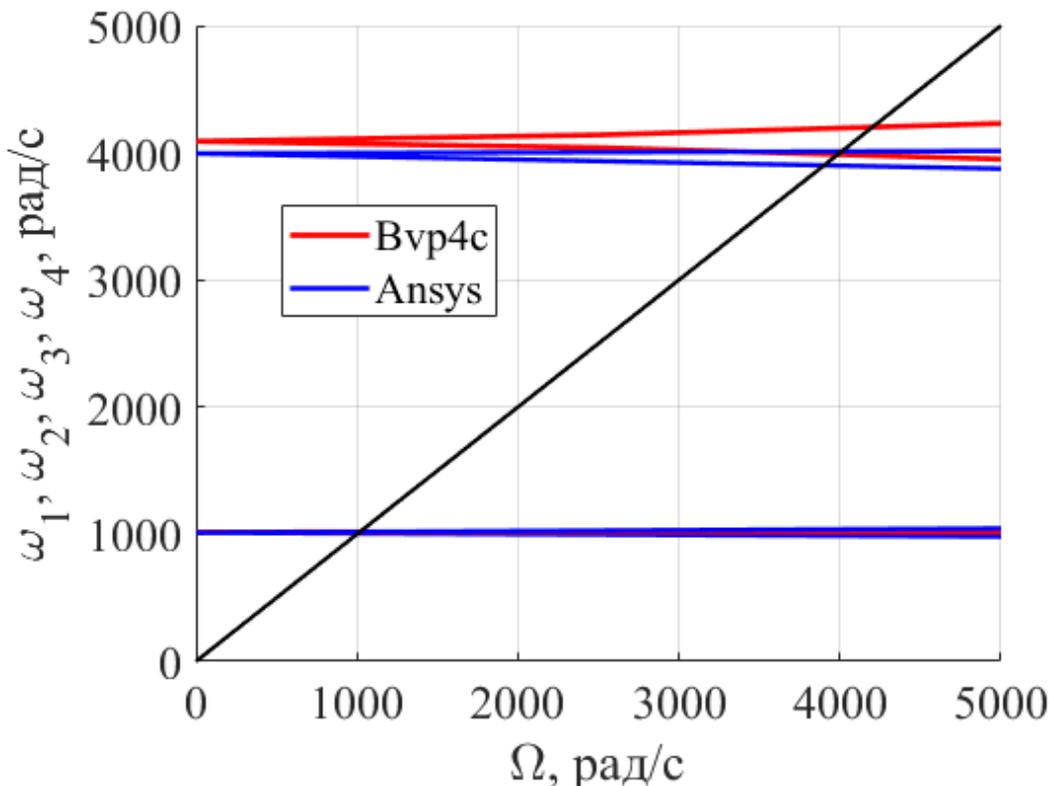


Рисунок 16. Диаграмма Кэмпбелла для случая бесконечной жесткости пружины

Здесь также наблюдается явление расщепления частот. Фактически, данный случай соответствует шарнирному опиранию в обоих направлениях, где присутствуют кратные частоты. Отсюда и возникает явления прямой и обратной прецессии.

Формы колебаний вращающегося вала соответствует представленным в пункте 1.2.4.

1.3 Вынужденные колебания

В данной главе проводится анализ отклика динамической системы на возбуждение, вызванное эксцентриситетом. Требуется убедиться в том, что отклик линейной системы на гармоническое возбуждение так же имеет вид гармонической функции с тем же частотным составом, что и вынуждающая нагрузка. Наибольший интерес представляет установившийся режим.

Также анализируется амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) данной системы. Требуется убедиться, что в линейной системе резонанс сопровождается резким увеличением амплитуды (в теории до бесконечности), и аналогичный спад.

1.3.1 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью bvp4c

Рассматривается исходное уравнение в комплексной форме:

$$EJw^{(IV)} + \rho A\ddot{w} - \frac{\rho AR^2}{4} [\dot{w}'' - 2i\Omega\dot{w}''] + b\dot{w} = \rho A\Omega^2 \bar{e}(s) \exp(i\Omega t)$$

Решение отыскивается в виде:

$$w(s, t) = W(s)e^{i\Omega t}$$

Тогда:

$$EJW^{(IV)} - \rho A \Omega^2 W - \frac{\rho AR^2 \Omega^2}{4} W'' + [i\Omega b - \rho A \Omega^2] W = \rho A \Omega^2 e$$

Или:

$$\begin{cases} EJU^{(IV)} - \frac{\rho AR^2 \Omega^2}{4} U'' - \Omega b V - \rho A \Omega^2 U = \rho A \Omega^2 e \\ EJV^{(IV)} - \frac{\rho AR^2 \Omega^2}{4} V'' + \Omega b U - \rho A \Omega^2 V = 0 \end{cases}$$

$$W(s) = U(s) + iV(s)$$

Так как:

$$w(s, t) = u(s, t) + iv(s, t),$$

То:

$$\begin{aligned} w(s, t) &= (U(s) + iV(s))e^{i\Omega t} = (U(s) + iV(s))(\cos\Omega t + i\sin\Omega t) \\ &= (U\cos\Omega t - V\sin\Omega t) + i(U\sin\Omega t + V\cos\Omega t) \end{aligned}$$

$$u(s, t) = (U\cos\Omega t - V\sin\Omega t), \quad v(s, t) = (U\sin\Omega t + V\cos\Omega t)$$

Как видно, Для вращающегося вала не представляется возможным представить прогибы в соответствующих направлениях в виде произведения двух функций:

$$u(s, t) \neq U(s)e^{i\Omega t}, \quad v(s, t) \neq V(s)e^{i\Omega t}$$

Поэтому возникает сложность в граничных условиях из-за совместного вклада движений:

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, u''(0, t) = 0, EJ u'''(L, t) = cu(L, t), u''(L, t) = 0 \\ v(0, t) = 0, v''(0, t) = 0, v(L, t) = 0, v''(L, t) = 0 \end{cases}$$

Подставим:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0)\cos\Omega t - V(0)\sin\Omega t = 0 \\ U''(0)\cos\Omega t - V''(0)\sin\Omega t = 0 \\ EJ[U'''(L)\cos\Omega t - V'''(L)\sin\Omega t] - c[U(L)\cos\Omega t - V(L)\sin\Omega t] = 0 \\ U''(L)\cos\Omega t - V''(L)\sin\Omega t = 0 \\ U(0)\sin\Omega t + V(0)\cos\Omega t = 0 \\ U''(0)\sin\Omega t + V''(0)\cos\Omega t = 0 \\ U(L)\sin\Omega t + V(L)\cos\Omega t = 0 \\ U''(L)\sin\Omega t + V''(L)\cos\Omega t = 0 \end{array} \right.$$

1.3.2 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Численное решение в ANSYS

Характеристики рассматриваемой системы аналогичны представленным в пункте 1.2.6. В ANSYS используется прямой динамический метод (*TRANSIENT ANALYSIS*). Вынуждающая сила распределяется по всем узлам вала, где наблюдается эксцентриситет. Поскольку в данном случае эксцентриситет по всей длине вала, то и нагрузка задается на все узлы КЭ модели.

1.3.3 Однородный вал с постоянным поперечным сечением. Результаты и выводы

На рисунках 17, 18 представлено сравнение аналитического (bvp4c) и численного (ANSYS) решений для случаев мягкой и жесткой пружины, а также для случая бесконечной жесткости пружины.

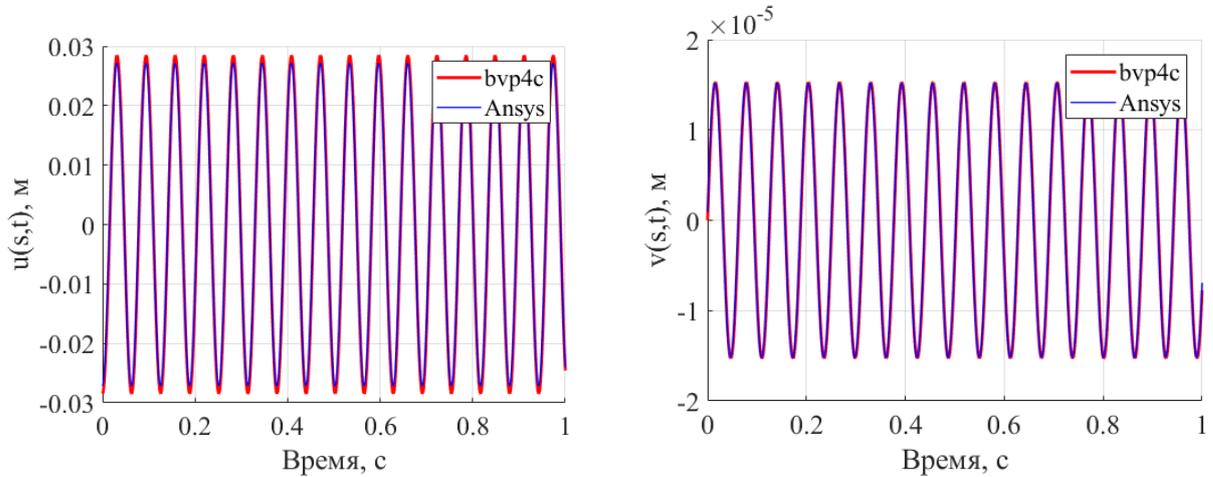


Рисунок 17. Вертикальный прогиб на правом конце (слева) и горизонтальный прогиб в середине (справа) вала для случая мягкой пружины

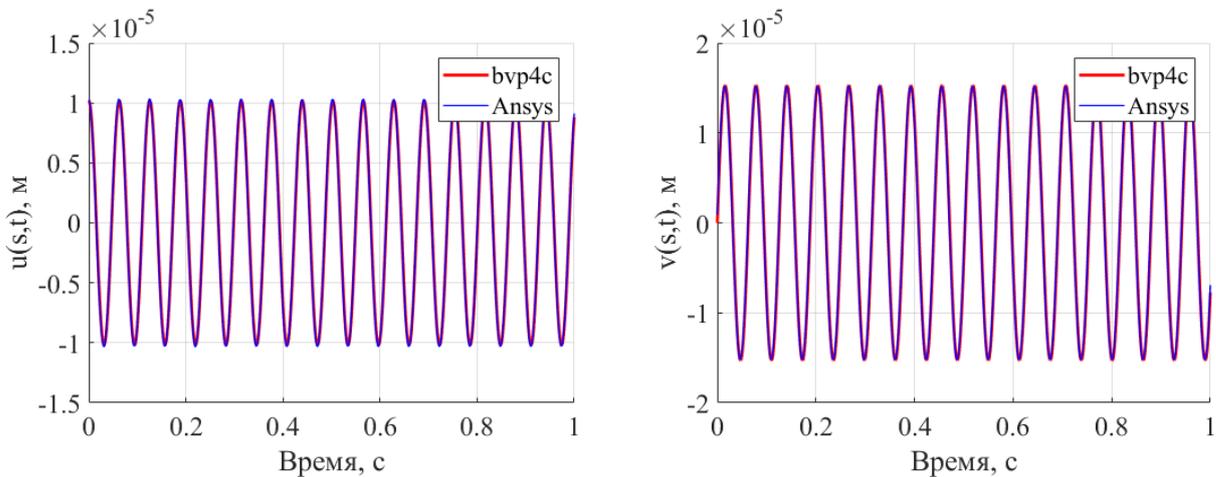


Рисунок 18. Вертикальный прогиб на правом конце (слева) и горизонтальный прогиб в середине (справа) вала для случая жесткой пружины

Убедившись в схождении результатов для фиксированной скорости вращения вала, была построена амплитудно-частотная характеристика (рисунок 19) двумя методами, которая так же демонстрирует схождение результатов.

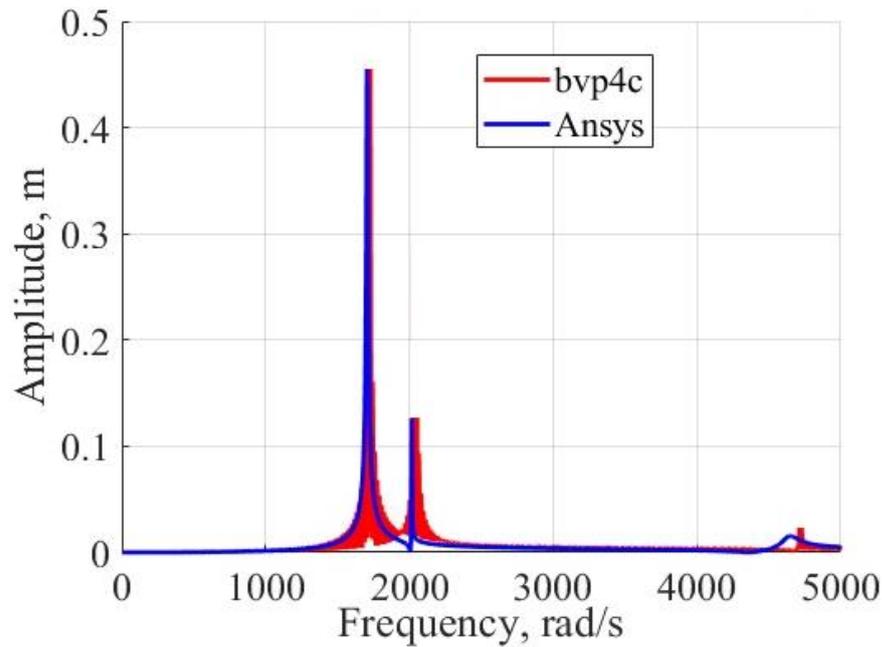


Рисунок 19. Амплитудно-частотная характеристика

1.3.4 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Приближенное решение с помощью bvp4c

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' + b\dot{u} = \\ \quad = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s) \cos \Omega t - e_\eta(s) \sin \Omega t] \\ (E(s)J(s)v''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\dot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' + b\dot{v} = \\ \quad = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s) \sin \Omega t + e_\eta(s) \cos \Omega t] \\ (E(s)J(s)w''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{w} - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} (\dot{w}' - 2i\Omega\dot{w}') \right]' + b\dot{w} = \\ \quad = \rho(s)F(s)\Omega^2 \bar{e}(s) \exp(i\Omega t) \end{cases}$$

Решение отыскивается в виде:

$$w(s, t) = W(s)e^{i\Omega t}$$

$$\begin{aligned} (E(s)J(s)W(s)''')'' - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \Omega^2 W'(s) \right]' + (i\Omega b - \rho(s)F(s)\Omega^2)W(s) \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 \bar{e}(s) \end{aligned}$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)U''')'' - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \Omega^2 U'(s) \right]' - \Omega bV(s) - \rho(s)F(s)\Omega^2 U(s) = \rho(s)F(s)\Omega^2 e \\ (E(s)J(s)V''')'' - \left[\rho(s)F(s) \frac{R^2(s)}{4} \Omega^2 V'(s) \right]' + \Omega bU(s) - \rho(s)F(s)\Omega^2 V(s) = 0 \end{cases}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0)\cos\Omega t - V(0)\sin\Omega t = 0 \\ U''(0)\cos\Omega t - V''(0)\sin\Omega t = 0 \\ E(L)J(L)[U'''(L)\cos\Omega t - V'''(L)\sin\Omega t] - c[U(L)\cos\Omega t - V(L)\sin\Omega t] = 0 \\ U''(L)\cos\Omega t - V''(L)\sin\Omega t = 0 \\ U(0)\sin\Omega t + V(0)\cos\Omega t = 0 \\ U''(0)\sin\Omega t + V''(0)\cos\Omega t = 0 \\ U(L)\sin\Omega t + V(L)\cos\Omega t = 0 \\ U''(L)\sin\Omega t + V''(L)\cos\Omega t = 0 \end{array} \right.$$

1.3.5 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Численное решение в ANSYS

Конечно-элементная формулировка задачи соответствует изложенной в пункте 1.2.6. Вынуждающая нагрузка определяется на каждый узел модели, где наблюдается эксцентриситет. Причем величина амплитуды масштабируется по длине вала в соответствии с переменными коэффициентами – плотностью и диаметром вала.

Описание характеристик вала соответствует изложенному в пункте 1.2.6. Методика определения вынуждающей нагрузки аналогична той, что изложена в пункте 1.3.2, за исключением наличия переменной амплитуды воздействия.

1.3.6 Неоднородный вал с переменным поперечным сечением. Результаты и выводы

На рисунках 20, 21 представлено сравнение приближенного (bvp4c) и численного (ANSYS) решений для случаев мягкой и жесткой пружины.

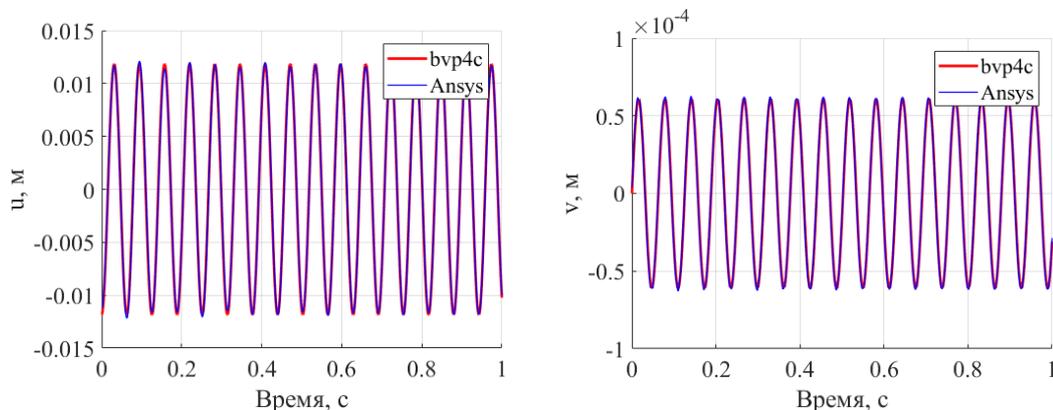


Рисунок 20. Вертикальный прогиб на правом конце (слева) и горизонтальный прогиб в середине (справа) вала для случая мягкой пружины

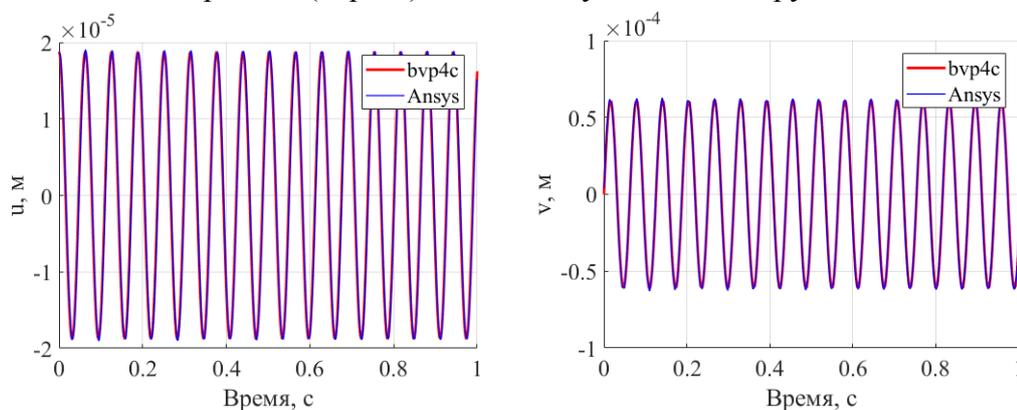


Рисунок 21. Вертикальный прогиб на правом конце (слева) и горизонтальный прогиб в середине (справа) вала для случая жесткой пружины

Убедившись в схождении результатов для фиксированной скорости вращения вала, была построена амплитудно-частотная характеристика (рисунок 22) двумя методами, которая так же демонстрирует схождение результатов.

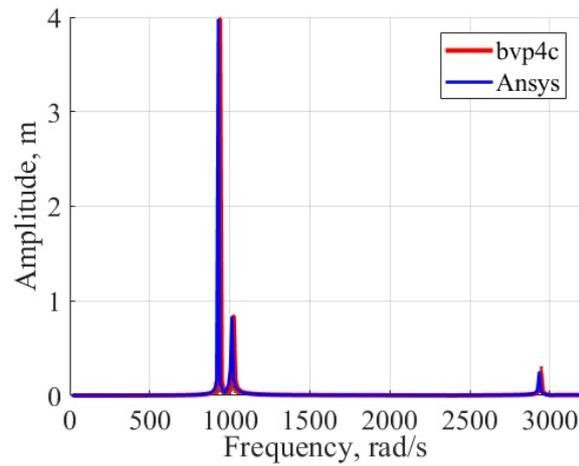


Рисунок 22. Амплитудно-частотная характеристика

2 Численное моделирование экспериментальной установки

Имеется испытательный стенд, схема которого представлена на рисунке 23. Более детальное описание электромагнитных явлений представлено в приложении А. Сами явления не являются предметом исследования данного объекта.

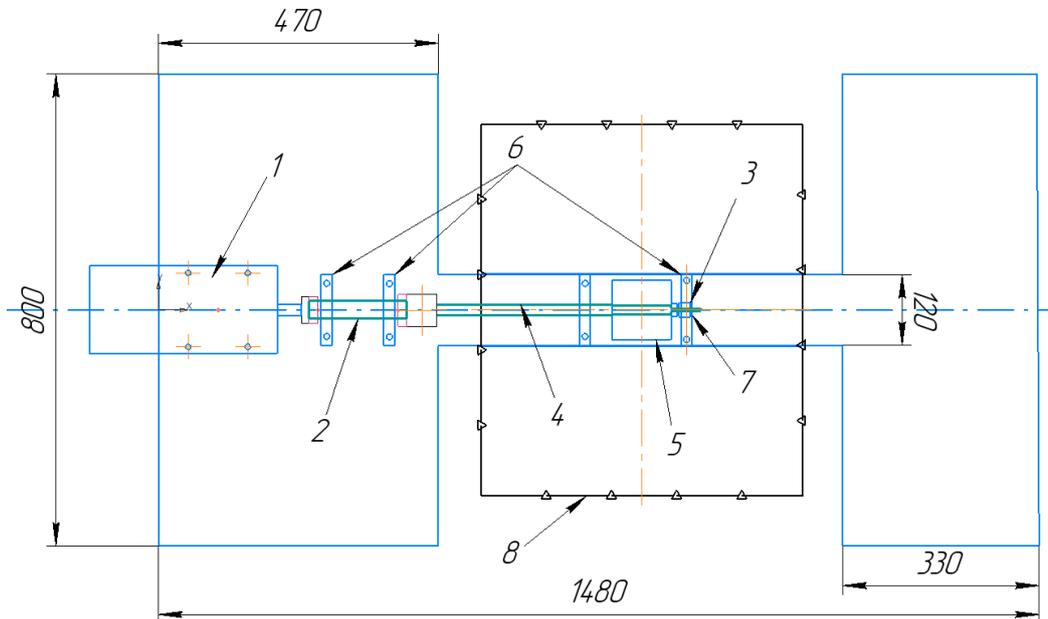


Рисунок 23. Объект исследования

Элементы испытательного стенда: 1. Двигатель SEW-Eurodrive, 2. Привод, 3. Тензодатчик усилия, 4. Медный вал, 5. Тefлоновый барабан, 6. Опоры, 7. Пружина, 8. Источник электромагнитного поля.

Используется тензодатчик марки MBL с усилителем UV-10, где 1 [В] соответствует 1 [Н]. После того как методики были верифицированы, мы будем моделировать данную систему численно методом конечных элементов. Медный вал с тefлоновым барабаном представлен на рисунке 24.

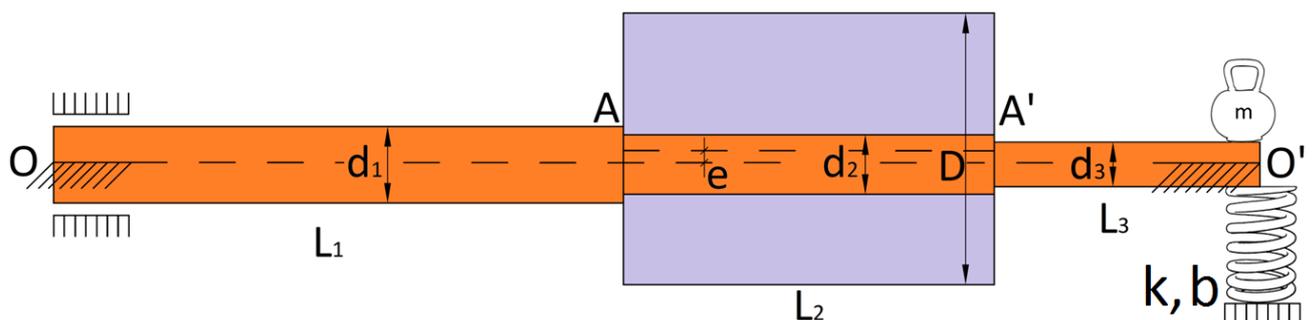


Рисунок 24. Вал с барабаном

Рассматриваются пространственные изгибные колебания, возникающие в системе из-за наличия эксцентриситета у барабана. Требуется определить чувствительность данной системы к величине добавочной силы m на подвижном конце вала. Будем описывать поведение экспериментальной установки, используя модель с распределенной массой и жесткостью, определять критические скорости вращения вала и строить зависимости перемещений от времени.

Здесь и далее будем отталкиваться от фиксированных граничных условий, существующих на экспериментальной установке. На левой стороне вала – условия жесткой заделки по обоим направлениям, на правой стороне – шарнирное опирание в горизонтальной плоскости и упругая опора (пружина) с жесткостью c , разрешающая перемещения в вертикальной плоскости, но исключается поворот сечения в вертикальной плоскости. Математическая формулировка граничных условий представлена ниже:

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) = 0 \\ u'(0, t) = v'(0, t) = 0 \\ u'(L, t) = v''(L, t) = 0 \\ m\ddot{u}(L, t) + b\dot{u}(L, t) + ku(L, t) = \\ = E(L)J(L)u'''(L, t) \\ v(L, t) = 0 \end{cases}$$

где $L = L_1 + L_2 + L_3$ – длина вала.

На рисунках 25, 26 представлены экспериментальные данные – значения перерезающей силы на правом конце вала для двух разных скоростей вращения и разных временных разверток.

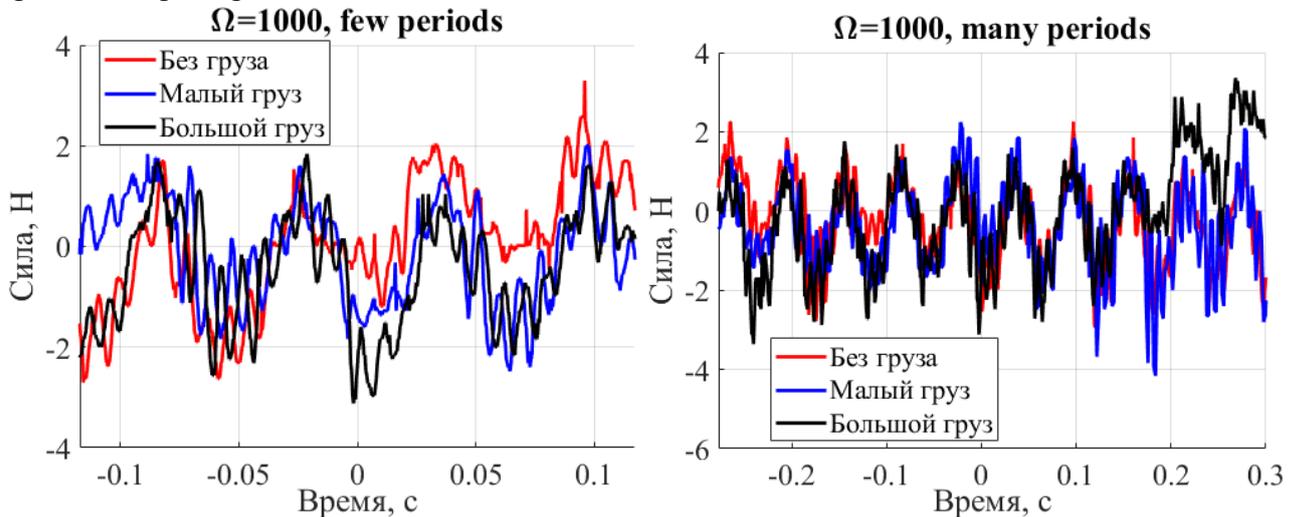


Рисунок 25. Экспериментальные данные для скорости вращения $\Omega = 1000$ об/мин

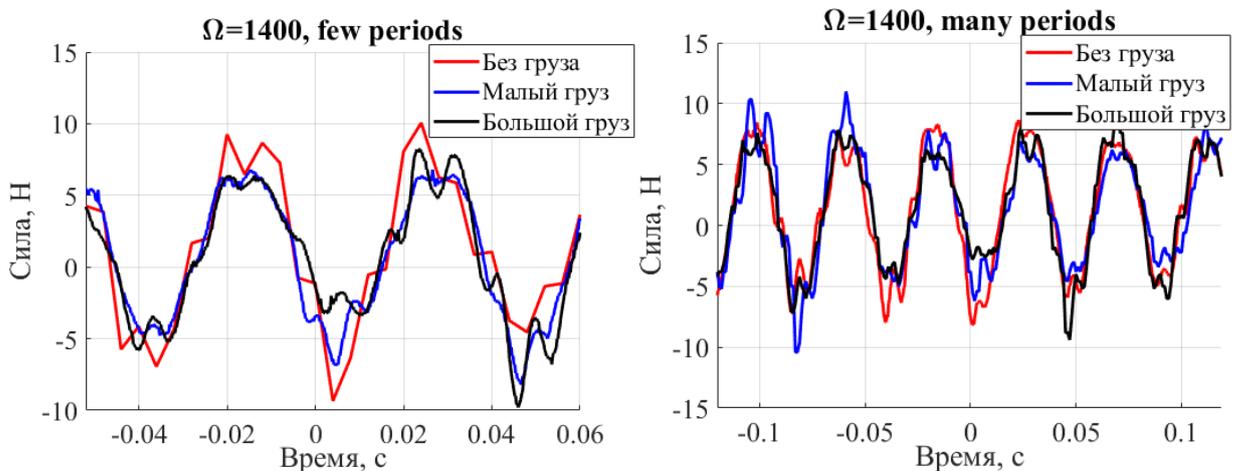


Рисунок 26. Экспериментальные данные для скорости вращения $\Omega = 1400 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$

Массы груза:

$m_1 = 0.0303$ кг – малый груз

$m_2 = 0.0544$ кг – большой груз

В таблице 6 представлены средние значения сигналов на рассматриваемых периодах.

Таблица 6. Средние значения сигналов на рассматриваемых периодах

График		$\Omega = 1000$, об/мин Мало периодов	$\Omega = 1000$, об/мин Много периодов	$\Omega = 1400$, об/мин Мало периодов	$\Omega = 1400$, об/мин Много периодов
Среднее значение	Без груза	0.0954	-0.2289	1.0008	1.4456
	Малый груз	-0.64	-0.9194	-0.1921	0.9668
	Большой груз	-1.0184	-0.5994	-0.1379	0.9318

Как видно из таблицы, не наблюдается четкой закономерности влияния добавочной силы на итоговый результат.

2.1 Определение свойств пружины

Пружина имеет $n = 7$ витков (5+2), опорные витки поджаты и торцованы. Вид пружины представлен на рисунке 27.



Рисунок 27. Упругая опора на правом конце

Характерные размеры пружины:

$h = 0.054$ м – высота пружины

$D = 0.039$ м – внешний диаметр витка

$d = 0.029$ м – внутренний диаметр витка

$t = 0.005$ м – толщина (диаметр) проволоки

Материал пружины: титан марки ТС6

$G = 0.41 \cdot 10^{11}$ Па – модуль сдвига титана

Формула для определения жесткости пружины по ее геометрическим и физико-механическим свойствам представлена ниже [17]:

$$c_{th} = \frac{Gt^4}{8 \left(\frac{D+d}{2} \right)^3 n}$$

Поскольку опорные витки торцованы, то имеет смысл рассмотреть определить жесткость в диапазоне при изменении количества учитываемых витков, совершающих работу. Таким образом, жесткость пружины при $n = 5$: $c = 16298$ Н/м, $n = 6$: $c = 13582$ Н/м, $n = 7$: $c = 11642$ Н/м.

Однако, также определим жесткость пружины исходя из экспериментальных данных. В ходе эксперимента использовался груз массой $m = 0.7$ кг и проводился анализ свободных колебаний грузика на пружине. Известна связь между частотой собственных колебаний ω одномерного осциллятора с массой груза и жесткостью пружины [18]:

$$\omega = \sqrt{c_{exp} / m}$$

Отсюда выражается значение жесткости:

$$c_{exp} = m\omega^2$$

Всего было проведено 4 испытания при разных сжатиях пружины. Результаты испытаний – зависимость линейного продольного колебания пружины от времени представлены на рисунке 28.

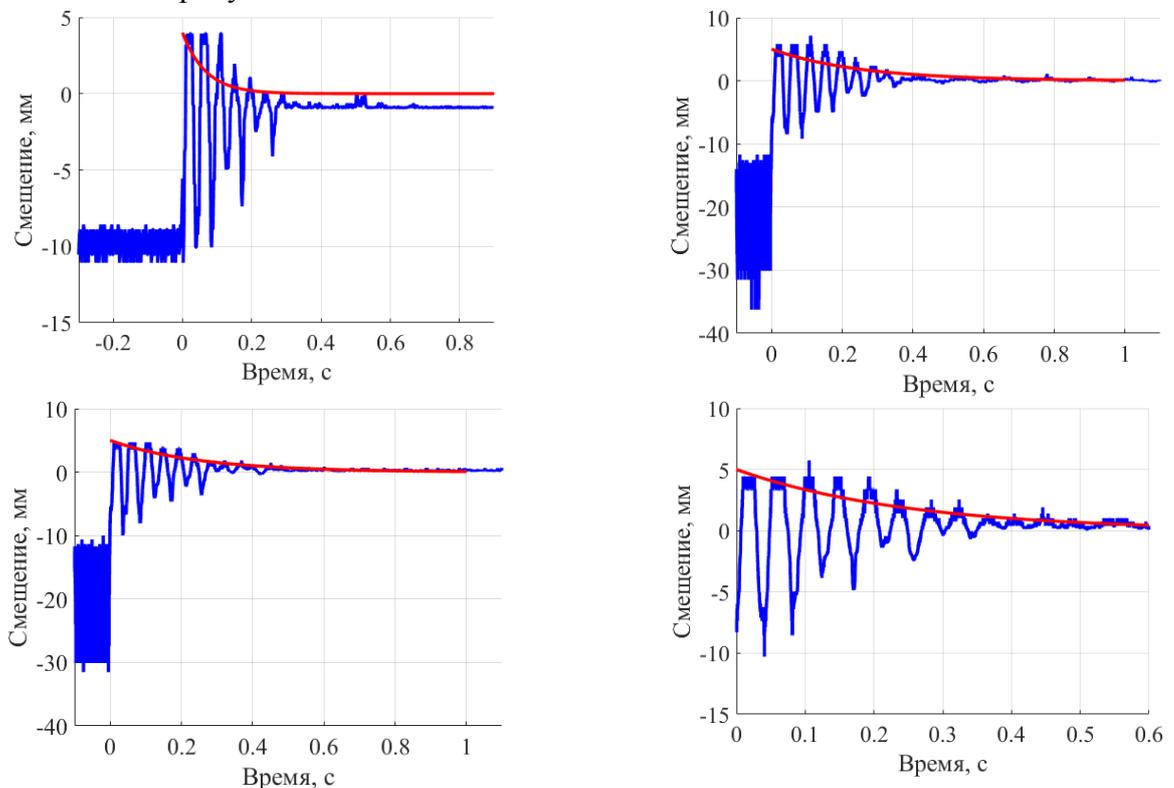


Рисунок 28. Результаты 4 испытаний при различном сжатии пружины

На основе полученных данных определялись период T_{avg} и частота колебаний как среднее значение по всем экспериментам:

$$T_{avg} = \sum_{i=1}^4 \frac{T_i}{4}$$

Среднее значение периода колебаний: $T_{avg} = 0.0432$ с. Тогда жесткость пружины:

$$c_{exp} = m \left(\frac{2\pi}{T_{avg}} \right)^2 \approx 14800 \text{ Н/м}$$

Как видно, экспериментальное значение довольно близко к аналитической оценке, поэтому для анализа экспериментальной установки примем значение жесткости пружины $c = 14800 \text{ Н/м}$.

Также определялись демпфирующие свойства пружины. Исходя из решения задачи на свободные колебания линейного одномерной осциллятора, был определен коэффициент демпфирования b . Уравнение колебаний осциллятора:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

Решение имеет вид:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \beta = \frac{\sqrt{b^2 - 4mk} + b}{2m}$$

Показатель экспоненты β так же определялся из как усредненное значения по всем экспериментам и был принят $\beta = 10$. Тогда $b = 258.4 \text{ Нс/м}$.

2.2 Моделирование экспериментальной установки

Будем проводить моделирование тремя способами: вал с сосредоточенной массой (рисунок 29) на втором участке (рисунок 30), вал с распределенной массой на втором участке и вал с распределенной массой, жесткостью и учетом инерции барабана на втором участке (рисунок 31).

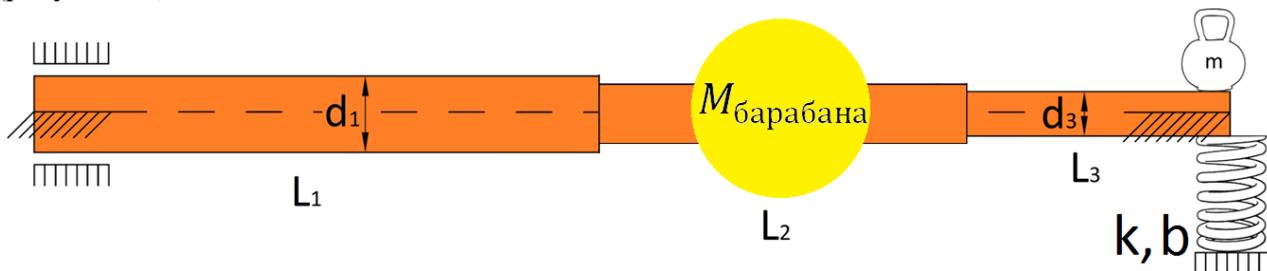


Рисунок 29. Модель с сосредоточенной массой

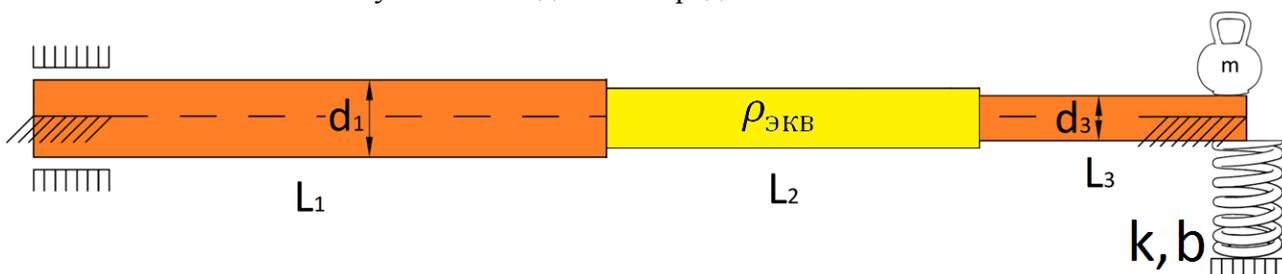


Рисунок 30. Модель с распределенной массой

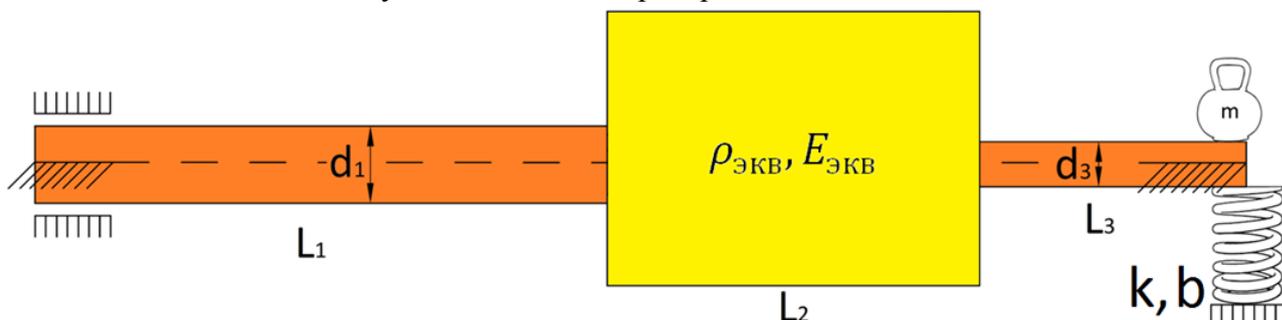


Рисунок 31. Модель с распределенной массой, жесткостью и учетом инерции барабана

Таким образом, модуль упругости Юнга будет постоянен по длине вала в первом и втором случае, а плотность вала во втором и третьем случаях и диаметр поперечного сечения во всех случаях будут представлять собой кусочно-постоянные функции:

$$\rho(s) = \begin{cases} \rho_1, 0 \leq s < L_1 \\ \rho_2, L_1 \leq s < L_1 + L_2, \\ \rho_1, L_1 + L_2 \leq s \leq L \end{cases}$$

$$d(s) = \begin{cases} d_1, 0 \leq s < L_1 \\ d_2, L_1 \leq s < L_1 + L_2, \\ d_3, L_1 + L_2 \leq s \leq L \end{cases}$$

где L_1 – длина первого участка вала, L_2 – длина второго участка вала (длина барабана), L_3 – длина третьего участка вала, $L = L_1 + L_2 + L_3$ – длина вала.

Плотность ρ_2 определяется как суммарная масса барабана и соответствующего участка соотнесенная к объему участка вала:

$$\rho_2 = \frac{m_{shaft} + M_{cylinder}}{V_{shaft}} = \rho_1 + \frac{4M_{cylinder}}{\pi d_2^2 (L_{ce} - L_{cb})}$$

Эквивалентный модуль Юнга в третьем случае определяется по правилу смесей:

$$E_{эkv} = \frac{E_{меди} V_{меди} + E_{тефлона} V_{тефлона}}{V_{меди} + V_{тефлона}}$$

В таблице 7 представлены геометрические и физико-механические свойства вала.

Таблица 7. Геометрические и физико-механические свойства вала

Материал вала	Медь
Диаметр 1 участка вала d_1 , м	0.019
Диаметр 2 участка вала d_2 , м	0.014
Диаметр 3 участка вала d_3 , м	0.005
Длина 1 участка вала L_1 , м	0.272
Длина 2 участка вала L_2 , м	0.1
Длина 3 участка вала L_3 , м	0.05
Длина вала L , м	0.422
Масса барабана, $M_{барабана}$, кг	3
Плотность 1 и 3 участка вала ρ_1 , кг/м ³	8920
Плотность 2 участка вала ρ_2 , кг/м ³	203803.6
Модуль упругости Юнга E , ГПа	110
Коэффициент Пуассона	0.32

Аналогично предыдущим задачам, используется двухузловой балочный конечный элемент в ANSYS (BEAM 188). Конечно-элементная модель представлена на рисунке 32.

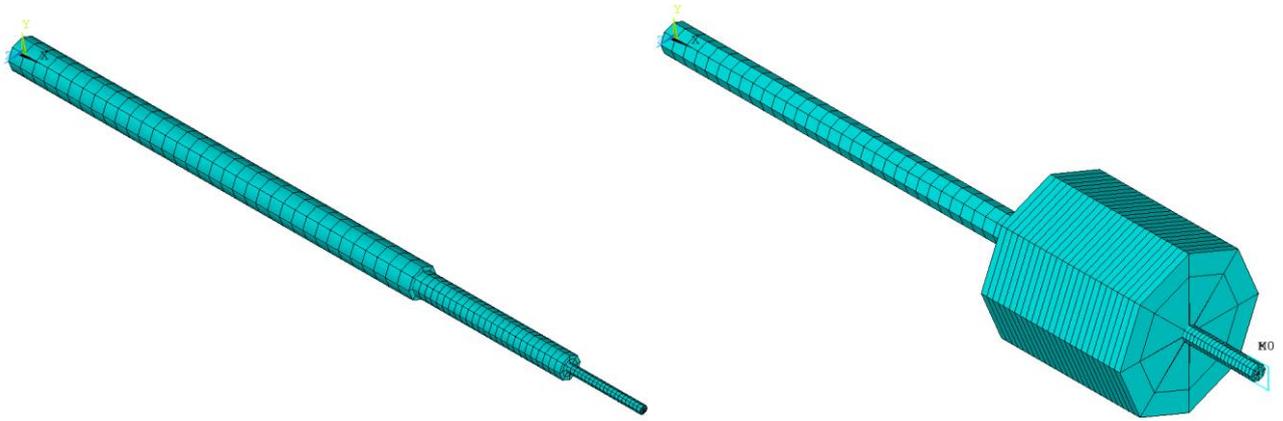


Рисунок 32. КЭ модель

Рассматриваются 3 способа задания эксцентриситетной нагрузки:

1. Точечно (для модели с сосредоточенной массой)
2. Распределенно (в предположении, что барабан плотно насажен на вал)
3. На два узла (в предположении, что барабан сцеплен с валом на торцах)

Граничные условия претерпели незначительные изменения – условие нулевого угла поворота на правом конце при вертикальном смещении, вместо условия шарнирного опирания:

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) = 0 \\ u''(0, t) = v''(0, t) = 0 \\ u'(L, t) = v'(L, t) = 0 \\ E(L)J(L)u'''(L, t) = ku(L, t) \\ v(L, t) = 0 \end{cases}$$

2.3 Свободные колебания. Задача на собственные значения. Построение диаграммы Кэмпбелла.

Представим результаты для первых 3 критических скоростей. В ходе проведения модального анализа были определены собственные частоты данной модели. Первые три собственные частоты: $\omega_1 = 170$ рад/с, $\omega_2 = 419$ рад/с, $\omega_3 = 1387$ рад/с.

Также на рисунке 33 представлены первые 3 формы колебаний вращающегося вала.

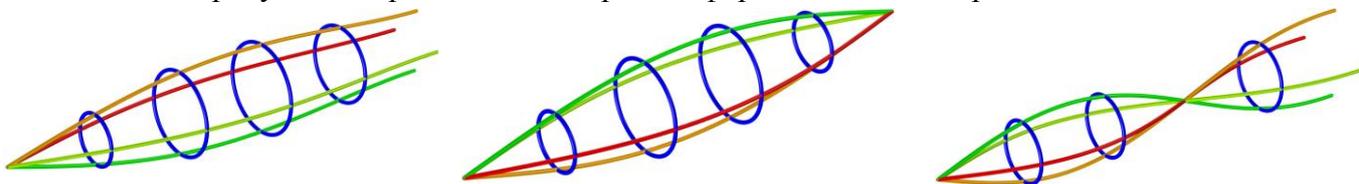


Рисунок 33. Формы колебаний вращающегося вала

На рисунке 34 представим диаграммы Кэмпбелла – зависимость собственной частоты системы от скорости вращения вала. Тем самым определим первые 3 критические скорости вращения. Поскольку все способы моделирования установки дают идентичный результат, то представим результат лишь для последнего случая моделирования (рисунок 31).

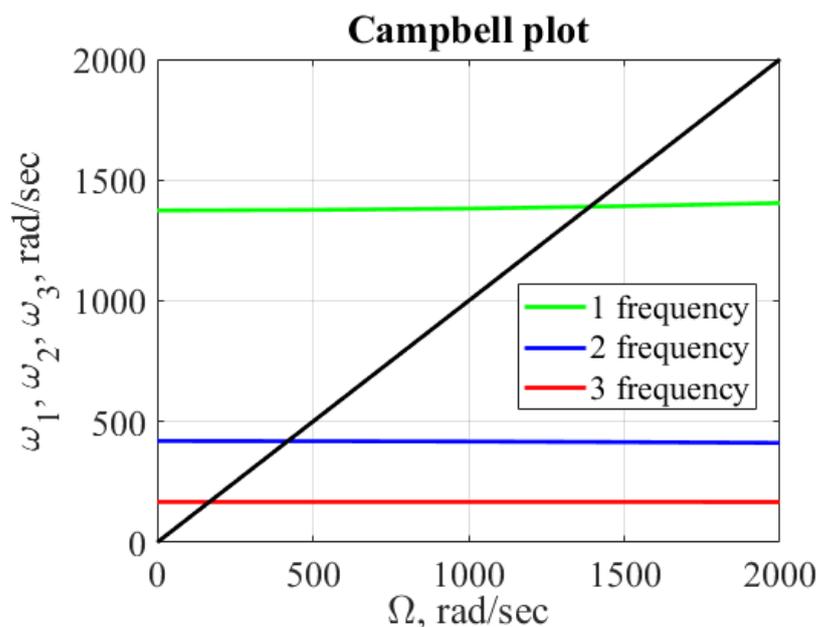


Рисунок 34. Диаграмма Кэмпбелла

Значение первой критической частоты для случаев разных масс на правом конце – одинаково. Это является первым признаком к отсутствию чувствительности установки к величине добавочной массы.

2.4 Вынужденные колебания. Сравнение с экспериментальными данными

Единственным неизвестным параметром системы является эксцентриситет барабана, вызывающий изгибные колебания вала. То есть будет решаться обратная задача для подбора эксцентриситета. Соответствующая нагрузка будет определяться двумя способами: распределенная нагрузка по второму участку вала – в предположении, что барабан плотно насажен на вал; нагрузка, приходящаяся на начало и конец второго участка – в предположении, что барабан соединяется с валом на торцах.

Скорость вращения вала принята равной $\Omega = 1400 \frac{\text{об}}{\text{мин}}$. Также будет проведен анализ влияния учета добавочной массы на правый конец вала. Масса первого груза $m_1 = 0.0303$ кг, масса второго груза $m_2 = 0.0544$ кг.

На рисунках 35, 36, 37 представлено сравнение экспериментального и численного (ANSYS) результатов для случаев трех добавочных масс на правом конце с 3 методами задания нагрузки.

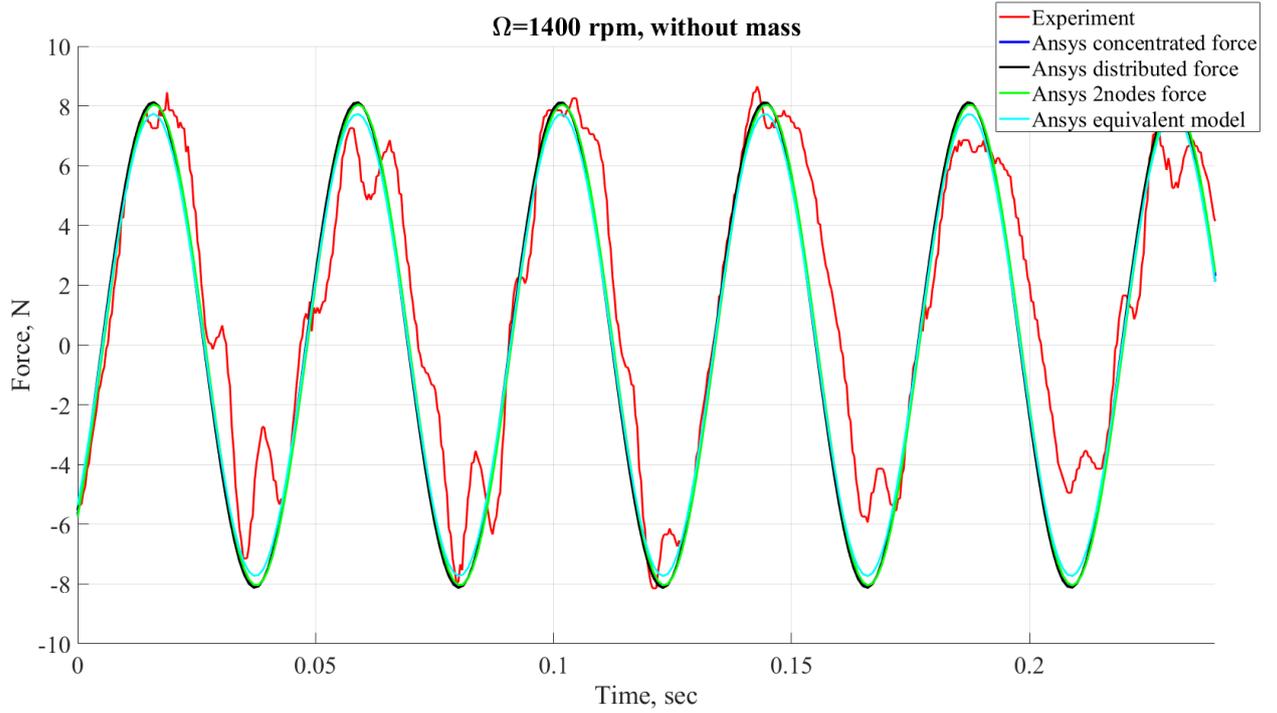


Рисунок 35. Перерезывающая сила на правом конце для случая нулевой добавочной массы на правом конце

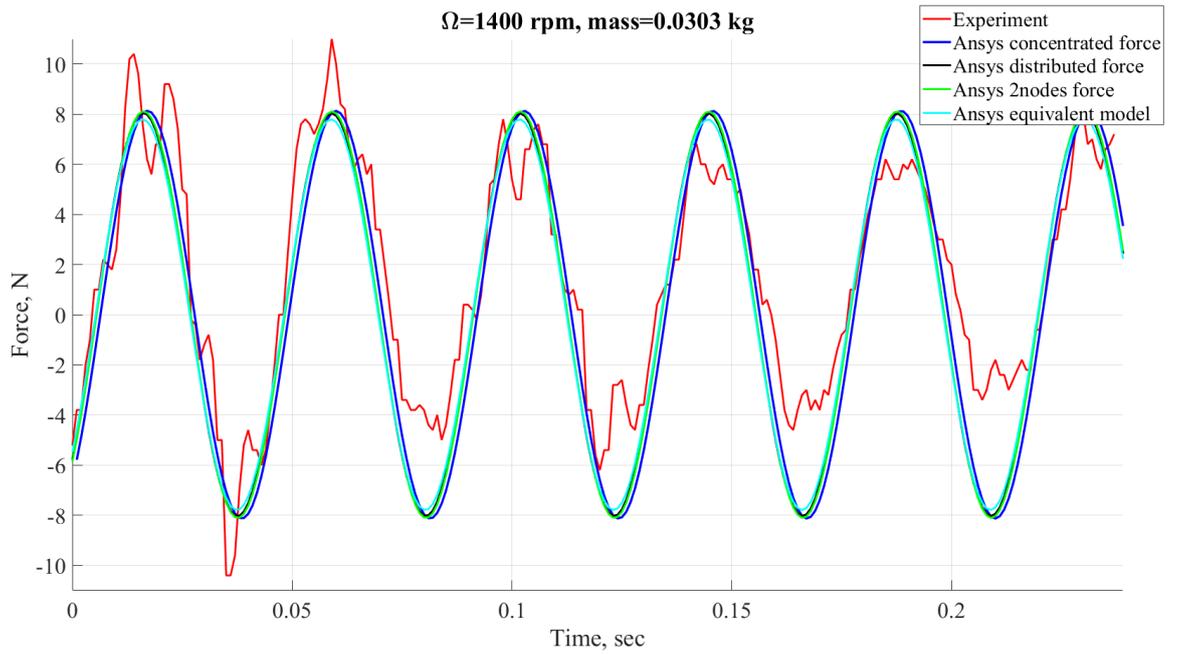


Рисунок 36. Перерезывающая сила на правом конце для случая добавочной массы m_1 на правом конце

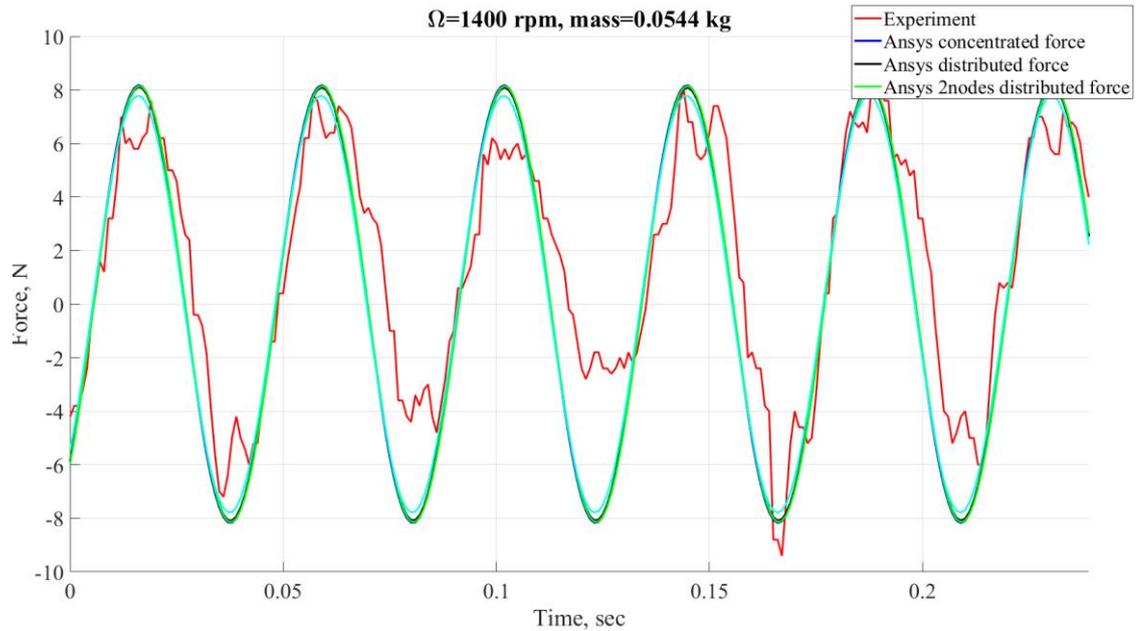


Рисунок 37. Перерезывающая сила на правом конце для случая добавочной массы m_2 на правом конце

Результат численного моделирования соответствует величине эксцентриситета $e = 1.7 \text{ мм}$.

Таким образом, была подобрана величина эксцентриситета для одной из скоростей вращения. Разумно ожидать совпадения с экспериментальными данными для других скоростей вращения вала при найденном эксцентриситете. Поскольку все численные алгоритмы демонстрируют одинаковый результат, то для сравнения воспользуемся лишь одной из методик моделирования, например, моделью с эквивалентными модулем Юнга и плотностью, в которой учитывается инерционные свойства барабана, и где сила распределена по длине второго участка вала (рисунки 38, 39, 40).

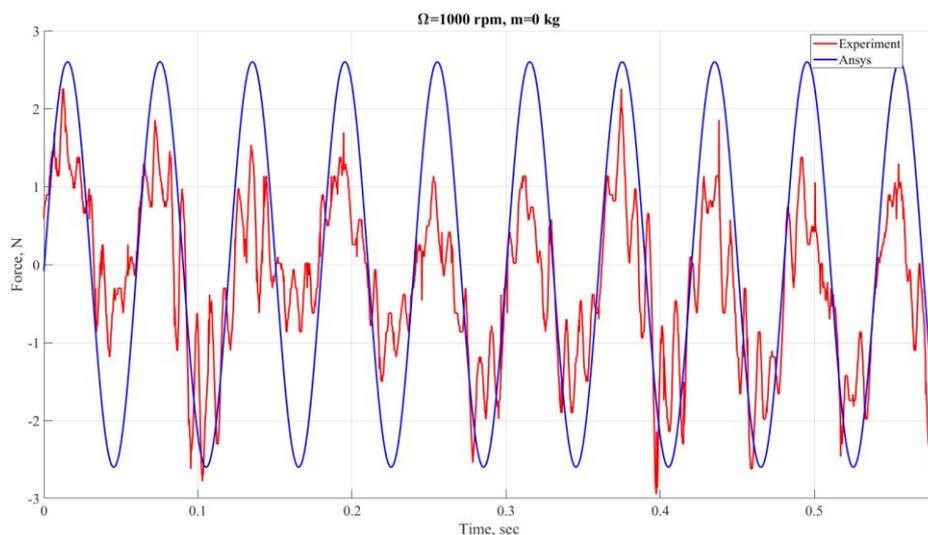


Рисунок 38. Перерезывающая сила на правом конце для случая нулевой добавочной массы на правом конце

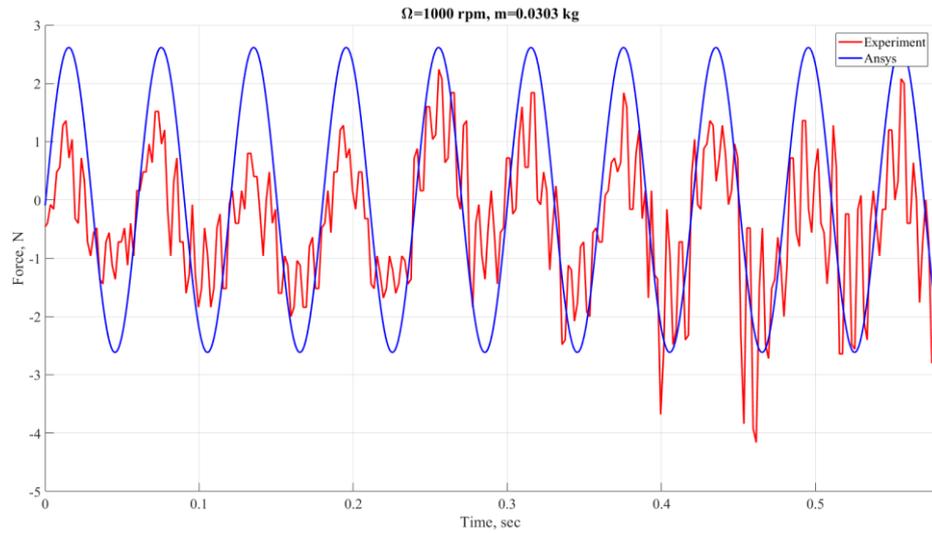


Рисунок 39. Перерезывающая сила на правом конце для случая добавочной массы m_1 на правом конце

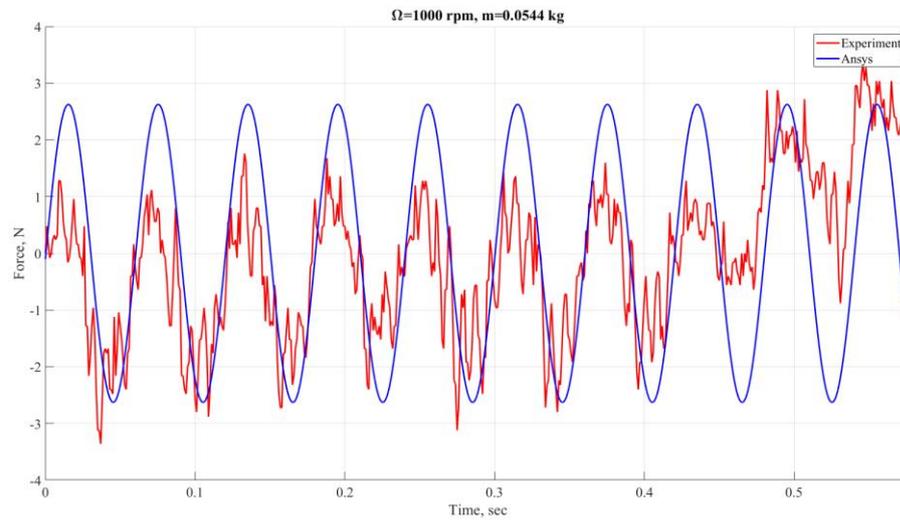


Рисунок 40. Перерезывающая сила на правом конце для случая добавочной массы m_2 на правом конце

Аналогичный результат демонстрирует гармонический анализ, результаты которого представлены на рисунке 41.

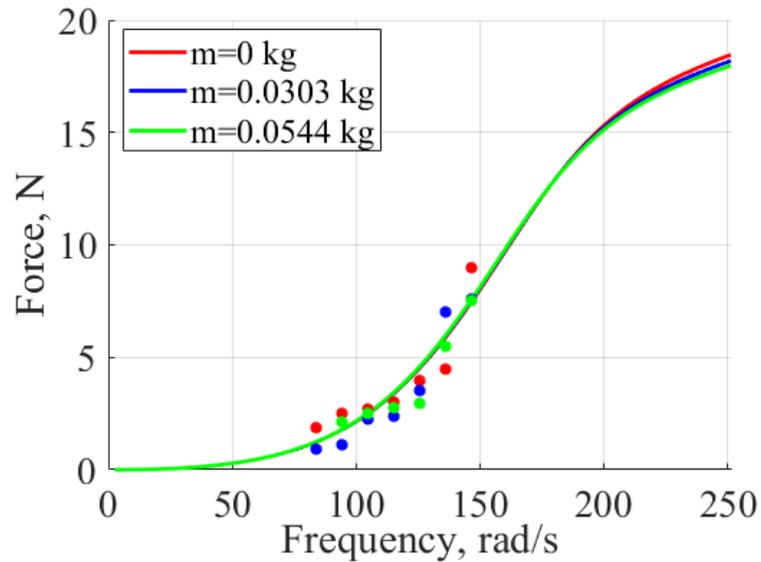


Рисунок 41. Зависимость перерезывающей силы от частоты

Стоит отметить, что на частотной характеристике отсутствует резонансный пик на найденной частоте $\Omega = 170$ рад/с. Это связано с тем, что система является сильно задемпфированной, поэтому амплитуда в данной точке становится меньше, чем амплитуда, соответствующая нерезонансным частотам. Воспользуемся теоретической оценкой для вала Джеффкотта для амплитуды [5]:

$$P = \frac{e\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (b\Omega/m)^2}}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, P_{res} = \frac{em\omega_0^2}{c} = \frac{\sqrt{mke}}{c}$$

По теоретической оценке получена величина амплитуды на резонансе:

$$P_{res} = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ м, при } m = \rho A$$

Это хорошо согласуется с полученными нами результатами (рисунок 42).

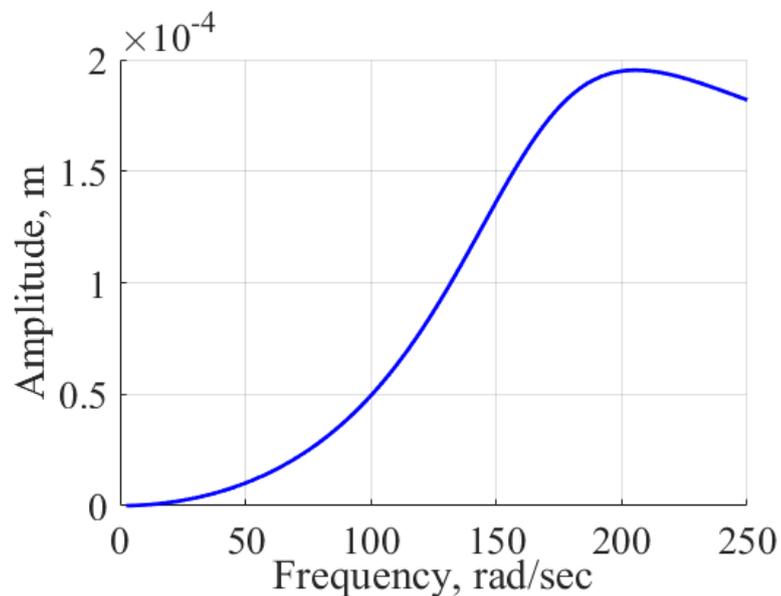


Рисунок 42. Амплитудно-частотная характеристика

3 Нелинейная динамика вращающегося вала с управляемой магнитной опорой

В третьей части работы выполняется построение аналитической модели перспективной компоновки экспериментальной установки, в которой пружина заменена на магнитную опору с газовым подшипником, обеспечивающим её вертикальное движение (рисунок 43).

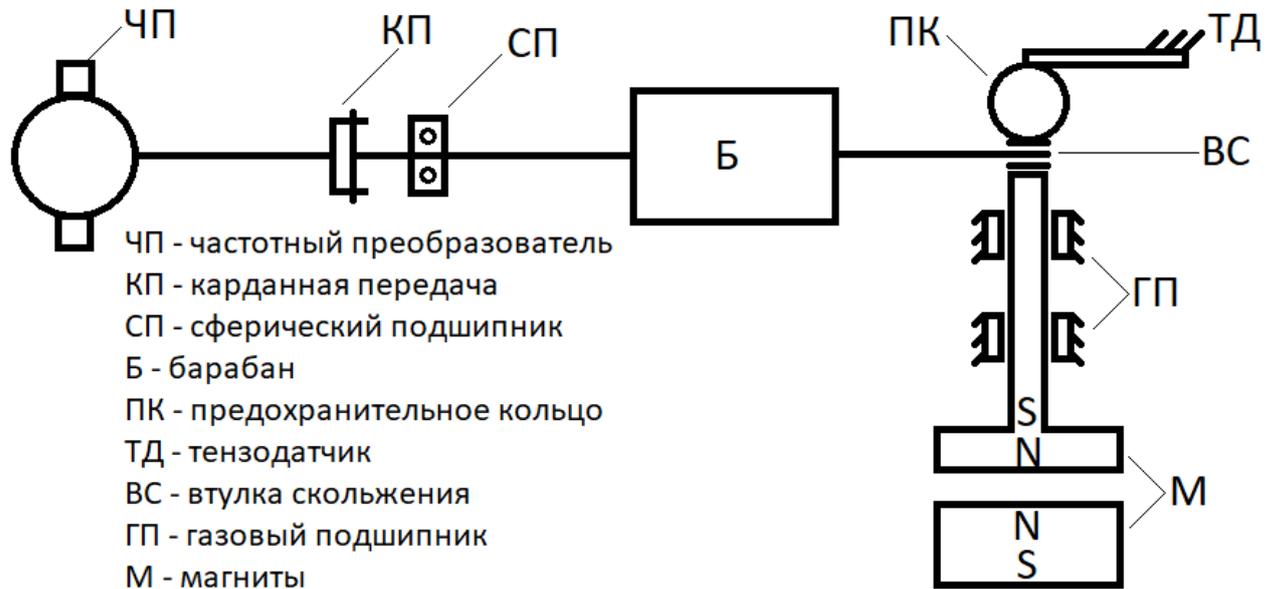


Рисунок 43. Схема установки с магнитной опорой

Для записи уравнений движения системы применяется вариационный принцип Гамильтона [19].

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \delta W_{nc}) dt$$

Рассматривается геометрически нелинейная постановка задачи об изгибных колебаниях упругого вала с массивным барабаном (рисунок 44) [20]. Граничные условия предполагается адаптировать под искомую модель (см. главу 1).

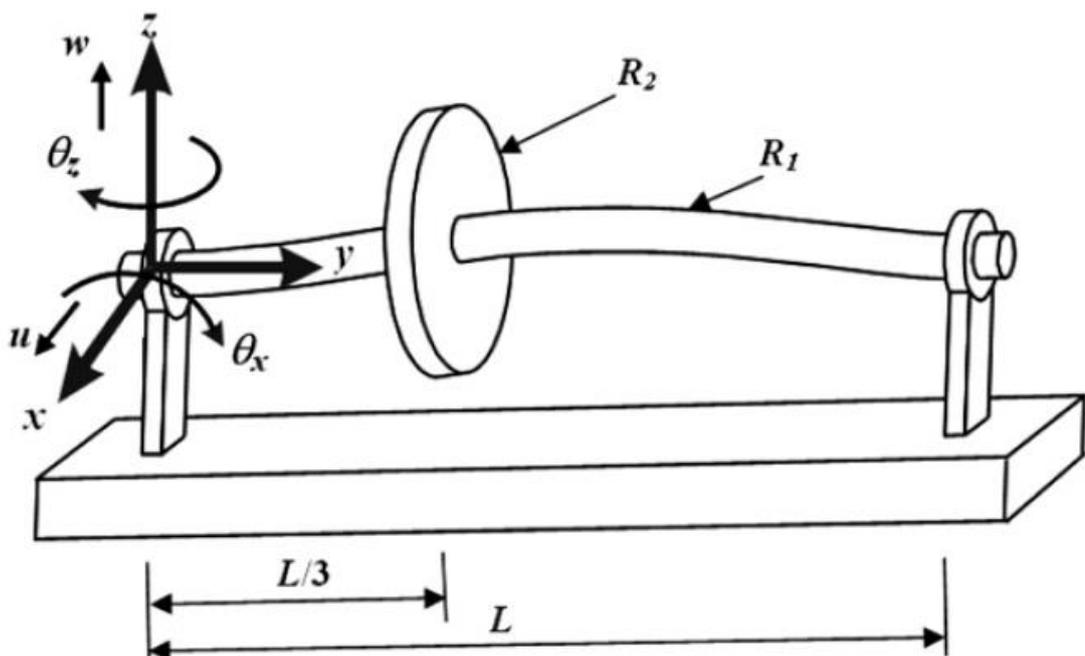


Рисунок 44. Рассматриваемый объект

Кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$T_d = \frac{M_d}{2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{I_{dx}}{2}(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2) + I_{dy}\Omega\dot{\theta}_z\theta_x$$

$$T_s = \int_0^L \frac{\rho J}{2}(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_z^2)dy + \int_0^L \frac{\rho A}{2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)dy + \int_0^L 2\rho J\Omega\dot{\theta}_z\theta_x dy$$

$$T_u = m_u\Omega d_1(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)$$

Общая кинетическая энергия:

$$T_R = T_d + T_s + T_u$$

$$\Pi = \int_0^L \left\{ \frac{EJ}{2} \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta_z}{\partial y} \right)^2 \right\} dy + \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{1}{4} \theta_x^4 + \frac{1}{4} \theta_z^4 + \frac{1}{2} \theta_x^2 \theta_z^2 \right) dy + \frac{1}{2} k_e w^2(L, t)$$

Также понадобятся координатные функции U, W – амплитуды прогибов, которые определяются как формы колебаний по первой собственной частоте из задачи о вале с сосредоточенной массой [21], [22]. То есть приводится решение:

$$\begin{cases} EJ u^{(IV)} + \rho F \ddot{u} + M \delta(x-l) \ddot{u} = 0 \\ EJ v^{(IV)} + \rho F \ddot{v} + M \delta(x-l) \ddot{v} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = v(0, t) = 0 \\ u''(0, t) = v''(0, t) = 0 \\ u''(L, t) = v''(L, t) = 0 \\ E(L)J(L)u'''(L, t) = ku(L, t) \\ v(L, t) = 0 \end{cases}$$

Решение отыскиваем в виде:

$$u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$$

$$\begin{cases} EJU^{(IV)} - \rho F \omega^2 U - M \omega^2 \delta(x-l)U = 0 \\ EJV^{(IV)} - \rho F \omega^2 V - M \omega^2 \delta(x-l)V = 0 \end{cases}$$

Функции Крылова:

$$K_1(ax) = \frac{1}{2}(\cosh ax + \cos ax)$$

$$K_2(ax) = \frac{1}{2}(\sinh ax + \sin ax)$$

$$K_3(ax) = \frac{1}{2}(\cosh ax - \cos ax)$$

$$K_4(ax) = \frac{1}{2}(\sinh ax - \sin ax)$$

Решение:

$$U_1(x) = C_1 K_1(ax) + C_2 K_2(ax) + C_3 K_3(ax) + C_4 K_4(ax)$$

$$U_1'(x) = a(C_1 K_4(ax) + C_2 K_1(ax) + C_3 K_2(ax) + C_4 K_3(ax))$$

$$U_1''(x) = a^2(C_1 K_3(ax) + C_2 K_4(ax) + C_3 K_1(ax) + C_4 K_2(ax))$$

$$U_1'''(x) = a^3(C_1K_2(ax) + C_2K_3(ax) + C_3K_4(ax) + C_4K_1(ax))$$

$$U_2(x) = C_5K_1(ax) + C_6K_2(ax) + C_7K_3(ax) + C_8K_4(ax)$$

$$U_2'(x) = a(C_5K_4(ax) + C_6K_1(ax) + C_7K_2(ax) + C_8K_3(ax))$$

$$U_2''(x) = a^2(C_5K_3(ax) + C_6K_4(ax) + C_7K_1(ax) + C_8K_2(ax))$$

$$U_2'''(x) = a^3(C_5K_2(ax) + C_6K_3(ax) + C_7K_4(ax) + C_8K_1(ax))$$

Так как уравнения одинаковые, а граничные условия сложнее для -движения, то сначала представим решение для него. Будем использовать условие сшивки решений на границе с массой.

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1(0) = 0 \\ U_1''(0) = 0 \\ U_1(l) = U_2(l) \\ U_1'(l) = U_2'(l) \\ U_1''(l) = U_2''(l) \\ U_1'''(l) - U_2'''(l) + \frac{M}{\rho FL} a^4 U_1(l) = 0 \\ \frac{EJ}{k} U_2'''(L) = U_2(L) \\ U_2''(L) = 0 \end{array} \right.$$

Условие на левом конце дает: $C_1 = C_3 \equiv 0$. Остальные условия дают:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2K_2(al) + C_4K_4(al) = C_5K_1(al) + C_6K_2(al) + C_7K_3(al) + C_8K_4(al) \\ a(C_2K_1(al) + C_4K_3(al)) = a(C_5K_4(al) + C_6K_1(al) + C_7K_2(al) + C_8K_3(al)) \\ a^2(C_2K_4(al) + C_4K_2(al)) = a^2(C_5K_3(al) + C_6K_4(al) + C_7K_1(al) + C_8K_2(al)) \\ a^3(C_2K_3(al) + C_4K_1(al)) - a^3(C_5K_2(al) + C_6K_3(al) + C_7K_4(al) + C_8K_1(al)) + \\ + \frac{Ma^4}{\rho FL} (C_2K_2(al) + C_4K_4(al)) = 0 \\ \frac{EJa^3}{k} (C_5K_2(al) + C_6K_3(al) + C_7K_4(al) + C_8K_1(al)) = (C_5K_1(al) + C_6K_2(al) + C_7K_3(al) + C_8K_4(al)) \\ a^2(C_5K_3(al) + C_6K_4(al) + C_7K_1(al) + C_8K_2(al)) = 0 \end{array} \right.$$

Составим матрицу коэффициентов:

$$\left[\begin{array}{cccccc} K_2(al) & K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) \\ K_1(al) & K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) & -K_3(al) \\ K_4(al) & K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) \\ K_3(al) + \frac{Ma}{\rho FL} K_2(al) & K_1(al) + \frac{Ma}{\rho FL} K_4(al) & -K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) \\ 0 & 0 & \frac{EJa^3}{k} K_2(al) - K_1(al) & \frac{EJa^3}{k} K_3(al) - K_2(al) & \frac{EJa^3}{k} K_4(al) - K_3(al) & \frac{EJa^3}{k} K_1(al) - K_4(al) \\ 0 & 0 & K_3(al) & K_4(al) & K_1(al) & K_2(al) \end{array} \right]$$

Первые три собственные частоты:

$$\omega_{U1} = 49.375 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega_{U2} = 407.95 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega_{U3} = 1037.34 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Для -движения будет аналогичная матрица, за исключением слагаемых с пружиной, так как в этом направлении условие шарнирного опирания.

$$\begin{bmatrix} K_2(al) & K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) \\ K_1(al) & K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) & -K_3(al) \\ K_4(al) & K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) & -K_2(al) \\ K_3(al) + \frac{Ma}{\rho FL} K_2(al) & K_1(al) + \frac{Ma}{\rho FL} K_4(al) & -K_2(al) & -K_3(al) & -K_4(al) & -K_1(al) \\ 0 & 0 & K_1(al) & K_2(al) & K_3(al) & K_4(al) \\ 0 & 0 & K_3(al) & K_4(al) & K_1(al) & K_2(al) \end{bmatrix}$$

$$\omega_{V1} = 138 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega_{V2} = 662.12 \frac{\text{рад}}{\text{с}}, \omega_{V3} = 2042.1 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$$

Таким образом, выберем координатные функции с учетом первой частоты U, V .

С помощью метода Рэлея-Ритца выполняется процедура дискретизации системы, в результате применения которой выводятся обыкновенные дифференциальные уравнения движения системы с двумя степенями свободы [6]. Полученная нелинейная динамическая система представляет собой обобщение модели вала Джеффкотта на случай учета геометрической нелинейности, связанной с конечностью упругих деформаций.

Далее ставится задача об исследовании изгибных колебаний ротора, вызванных наличием эксцентриситета барабана, при учете нелинейной силовой характеристики активной (управляемой) магнитной опоры [12]. Таким образом в правые части уравнений войдет управляемая сила F_u и F_w , которые в общем случае имеют вид:

$$\begin{cases} F_u = F(u, i_u) = k_0 \left\{ \left(\frac{I_0 + i_u}{g_0 + u} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_u}{g_0 - u} \right)^2 \right\} \\ F_w = F(v, i_w) = k_0 \left\{ \left(\frac{I_0 + i_w}{g_0 + w} \right)^2 - \left(\frac{I_0 - i_w}{g_0 - w} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

Однако в нашем случае рассматривается магнитная опора лишь с одной стороны, поэтому вид упростится:

$$\begin{cases} F_u = k_0 \left\{ - \left(\frac{I_0 - i_u}{g_0 - u} \right)^2 \right\} \\ F_w = k_0 \left\{ - \left(\frac{I_0 - i_v}{g_0 - w} \right)^2 \right\} \end{cases}$$

В расчетную модель вводится контур системы управления. Принято, что управление осуществляется с помощью принципа положительной обратной связи по перемещению (Positive position feedback, PPF) [23]. Управляющая система имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_3\dot{x} + k_3x = k_f u \\ m\ddot{y} + c_4\dot{y} + k_4y = k_f v \end{cases}$$

Общий принцип управления представлен на рисунке 45.

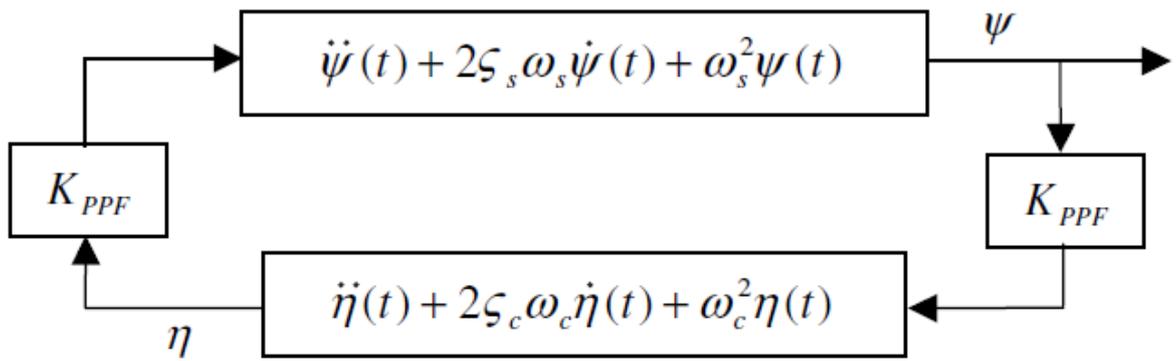


Рисунок 45. Общая схема объекта и управления

Динамика полученной связанной электромеханической модели управляемой системы исследуется с помощью асимптотических методов нелинейной механики, а именно, метода многих масштабов [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведен анализ поведения экспериментальной установки с анизотропными опорами. Таким образом, были выполнены основные пункты работы, а именно:

1. Расчетно-экспериментальная оценка первой критической скорости вращения вала. Значение первой критической скорости вращения $\Omega = 170$ рад/с.
2. Определение величины эксцентриситета на экспериментальной установке. Значение величины эксцентриситета барабана $e = 0.17$ мм.
3. Оценка чувствительности экспериментальной установки к величине добавочной силы. На данном этапе констатируется отсутствие чувствительности системы к добавочному силовому фактору. Причиной может быть влияние на эксперимент иных побочных явлений, таких как:
 - Прямой контакт вала с другими элементами испытательного стенда (например, двигатель, стол)
 - Неучет в модели трения в подшипниках

В ходе выполнения работы были решены ключевые задачи:

1. Разработана детальная математическая модель изгибных колебаний вращающегося вала, учитывающая распределенность характеристик. Данная модель является универсальной, то есть не является привязанной к конкретному объекту, и может быть использована в задачах расчета высокоскоростных паровых и газовых турбин, электродвигателей и т.д.
2. Верифицированы численные методы решения задач на основе описанной модели. Получено четкое представление о конечно-элементном моделировании возникающих процессов и явлений. Таким образом, может быть получен полный перечень необходимых результатов, анализ которых даст полное представление о поведении объекта исследований.
3. После разработки математической модели и верификации численных методов был совершен переход от общей постановки к частной – к экспериментальной установке.
4. Были проанализированы полученные расчетные и экспериментальные результаты, выявлены недостатки и составлен план дальнейшего направления исследований.

В качестве дальнейшего направления исследований для повышения чувствительности экспериментальной установки предлагается минимизировать влияние побочных факторов на динамику путем исключения имеющейся упругой опоры и ее замены на магнитную опору.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1959, 248 с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: МИР, 1971, 191 с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Техничко-теоретическая литература, 1956, 600 с.
4. Филипов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970, 732 с.
5. Yamamoto T., Ishida Y. Linear and nonlinear rotordynamics. Wiley VCH, 2nd edition, 447 p.
6. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970, 512 с.
7. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968, 503 с.
8. Paidoussis Michael P. Fluid-structure interactions. Academic press, 1998. Vol 1. 572 p.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979, 392 с.
10. ANSYS Help. ANSYS, Inc., 2016
11. Comsol documentation, 2018
12. Saeed N.A., Kamel M. Active magnetic bearing-based tuned controller to suppress lateral vibrations of a nonlinear Jeffcott rotor system, 2017.
13. A.H. Nayfeh. Introduction to Perturbation Techniques. A Wiley-Interscience Publication, New York Chichester Brisbane Toronto, 1981, 535 p.
14. Yu. A. Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory, Third edition, Volume 112. Springer Science+Business Media, LLC, 2004, 631 p.
15. A. Dhooge, W. Govarets, Yu. A. Kuznetsov, W. Mestrom, A.M. Riet, B. Sautois MATCONT and CL_MATCONT: Continuation toolboxes in MATLAB, 2006, 100 p.
16. L.F. Shampine, J. Kierzenka, M.W. Reichelt, Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c, 2000, 27 p.
17. Г. Гузенков "Краткий справочник к расчетам деталей машин". М.: Высшая школа, 1964, 325 с.
18. С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. Колебания в инженерном деле. М.: Издательство «Наука», 1985, 472 с.
19. А.П. Маркеев. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999, 572 с.
20. M. Rizwan Shad, G. Michon, A. Berlioz. Modeling and analysis of nonlinear rotordynamics due to higher order deformations in bending, 16 p.
21. W. H. LIU, J.-R. Wu AND C.-C. HUANG. Free vibration of beams with elastically restrained edges and intermediate concentrated masses. Department of Mechanical Engineering, Tatung Institute of Technology, 40, Chung-Shan North Road, Section 3, Taipei, Taiwan, Republic of China, 1987, 15 p.
22. K.H. Low. On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses. School of Mechanical and Production Engineering, Nanyang Technological University, Nanyang Avenue, Singapore 639798, Singapore, 2000, 11 p.
23. J. Shan a, H.T. Liu, D. Sun. Slewing and vibration control of a single-link flexible manipulator by positive position feedback (PPF). Elsevier, 2004, 17 p.
24. И.В. Савельев. Курс общей физики. Т.2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. 2-е изд., перераб. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1982, 496с.
25. А. Прохоров (Гл. ред.). Физический энциклопедический словарь. М.: "Советская энциклопедия", 1984, 945 с.

26. П. Аппель. Теоретическая механика. Динамика системы. Аналитическая механика (том 2). М.: Физматлит, 1960, 487 с.
27. И.Е. Тамм. «Основы теории электричества». Учеб. пособие для вузов.—10-е изд., испр.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989, 504 с.
28. П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. Расчет индуктивностей. Справочная книга. — 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Энергоатомиздат, 1986, 488 с.
29. А.В. Иванов-Смоленский. Электромагнитные силы и преобразование энергии в электрических машинах. Учеб. пособие для вузов по спец. «Электромеханика». - М.: Высш. шк. , 1989, 312 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

(справочное)

Упрощенная модель с сосредоточенной массой

Данная модель рассмотрена в [5].

Б.1 Равножесткая модель

Рассматривается модель вала с диском. Изгибные колебания вызываются эксцентриситетом диска при вращении вала. Фактически, система является гармоническим осциллятором. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = me\Omega^2 \cos\Omega t \\ m\ddot{y} + ky = me\Omega^2 \sin\Omega t \end{cases}$$

Или:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0 x = me\Omega^2 \cos\Omega t \\ \ddot{y} + \omega_0 y = me\Omega^2 \sin\Omega t \end{cases}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – парциальная частота, Ω – угловая скорость вращения вала, m – масса диска, k – жесткость упругого подвеса.

Данная система уравнений записана в глобальной системе координат x, y , поэтому здесь описывается общее движение диска, связанное как с его деформацией, так и с его перемещением как твердого целого.

Далее мы хотим перейти в подвижную систему координат, которая вращается с угловой скоростью Ω , чтобы рассматривать только лишь движение, связанное с деформацией диска.

Преобразование координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\Omega t - y' \sin\Omega t \\ y = x' \sin\Omega t + y' \cos\Omega t \end{cases}$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x}' = -kx' + 2m\dot{y}'\Omega + m(x' + e)\Omega^2 \\ m\ddot{y}' = -ky' - 2m\dot{x}'\Omega + my'\Omega^2 \end{cases}$$

где $x'_G = x' + e, y'_G = y'$ – центр тяжести диска.

Можно избавиться от дополнительных индексов:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + 2m\dot{y}\Omega + m\Omega^2(x + e) \\ m\ddot{y} = -ky - 2m\dot{x}\Omega + m\Omega^2 y \end{cases}$$

Требуется исследовать данную систему на устойчивость, будем рассматривать свободные колебания. Будем искать решение в виде:

$$x = Xe^{i\omega t}, y = Ye^{i\omega t}$$

Подставляя в искомую систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} (k - m\omega^2 - m\Omega^2)X - 2mi\omega\Omega Y = 0 \\ 2mi\omega\Omega X + (k - m\omega^2 - m\Omega^2)Y = 0 \end{cases}$$

Решение однородной СЛАУ имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$(k - m\omega^2 - m\Omega^2)^2 - 4m^2\omega^2\Omega^2 = 0$$

Воспользуемся введенным обозначением: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Тогда:

$$\omega^4 - 2(\omega_0^2 + \Omega^2)\omega^2 + (\omega_0^4 - 2\omega_0^2\Omega^2 + \Omega^4) = 0$$

$$\omega^4 - 2(\omega_0^2 + \Omega^2)\omega^2 + (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = 0$$

Корни биквадратного уравнения:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \left[\left(1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \pm \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 - \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2} \right]$$

Преобразуя данное выражение, получим:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{\Omega}{\omega_0} \right)^2 = (\omega_0 \pm \Omega)^2$$

Таким образом, получена явная зависимость $\omega(\Omega)$. Построим эти зависимости (рисунок 51):

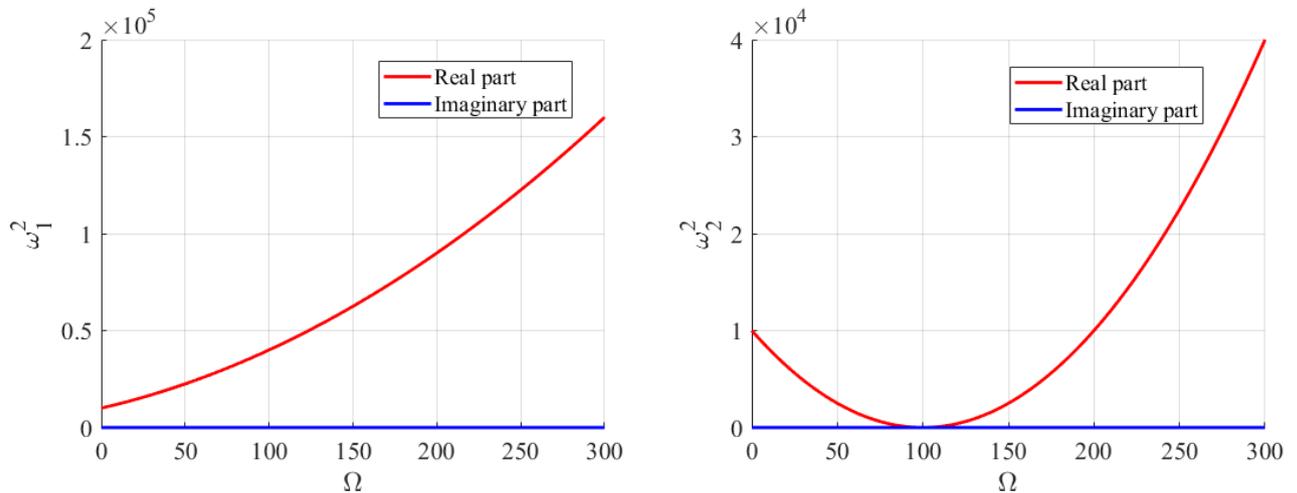


Рисунок 46. Зависимости квадрата первой и второй собственных частот от скорости вращения

Как видно, для случая одинаковых жесткостей имеем одну единственную критическую скорость. Стало быть, даже динамический метод в данном случае терпит неудачу.

Б.2 Разножесткая модель

Теперь немного усложним исходную систему, добавив демпфирование и учтя анизотропию. Тогда система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + b_x\dot{x} + k_x x = 2m\Omega\dot{y} + m\Omega^2 x \\ m\ddot{y} + b_y\dot{y} + k_y y = -2m\Omega\dot{x} + m\Omega^2 y \end{cases}$$

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{0x}\xi_x\dot{x} + \omega_{0x}^2 x = 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega_{0y}\xi_y\dot{y} + \omega_{0y}^2 y = -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y \end{cases}$$

где $\omega_{0x}^2 = \frac{k_x}{m}$, $\omega_{0y}^2 = \frac{k_y}{m}$ – парциальные частоты, $\xi_x = \frac{b_x}{2m\omega_{0x}}$, $\xi_y = \frac{b_y}{2m\omega_{0y}}$ – степень демпфирования

Для решения данной системы будем использовать метод многих масштабов. Суть его заключается в представлении решения в виде $x = x(T_0, T_1, T_2, \dots)$, $y = y(T_0, T_1, T_2, \dots)$, где $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$, $T_2 = \varepsilon^2 t$, ... – характеризуют разные масштабы времени, а ε – масштабирующий параметр. Таким образом, перепишем уравнения в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_{0x}^2 x = \varepsilon[\Omega^2 x + 2\Omega\dot{y} - 2\omega_{0x}\xi_x\dot{x}] \\ \ddot{y} + \omega_{0y}^2 y = \varepsilon[\Omega^2 y - 2\Omega\dot{x} - 2\omega_{0y}\xi_y\dot{y}] \end{cases}$$

При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \equiv D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде степенного ряда:

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \end{cases}$$

Подставим данные разложения в исходную систему уравнений. Нас интересует первая поправка, поэтому будем откидывать высшие порядки.

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 x_0 + \varepsilon D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 (x_0 + \varepsilon x_1) = \varepsilon[\Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0] \\ D_0^2 y_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 y_0 + \varepsilon D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 (y_0 + \varepsilon y_1) = \varepsilon[\Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2\omega_{0y}\xi_y D_0 y_0] \end{cases}$$

Преобразуем по степеням ε^0 и ε^1 :

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = \varepsilon[\Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 - D_0^2 x_1 - \omega_{0x}^2 x_1] \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0y}^2 y_0 = \varepsilon[\Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2\omega_{0y}\xi_y D_0 y_0 - 2D_0 D_1 y_0 - D_0^2 y_1 - \omega_{0y}^2 y_1] \end{cases}$$

Приравнивая к нулю члены порядка ε^0 и ε^1 , приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned} \varepsilon^0: & \begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = 0 \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0y}^2 y_0 = 0 \end{cases} \\ \varepsilon^1: & \begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = \Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 y_1 = \Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2\omega_{0y}\xi_y D_0 y_0 - 2D_0 D_1 y_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Решения для x_0, y_0 :

$$\begin{cases} x_0 = a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) \\ y_0 = a_y(T_1) \cos(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1)) \end{cases}$$

Подставляя данные решения в следующую систему, получим уравнения относительно x_1 :

$$\begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = \Omega^2 a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) - 2\Omega\omega_{0y} a_y(T_1) \sin(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0x}^2 \xi_x a_x(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0x} [D_1\{\beta_x(T_1)\} a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + D_1\{a_x(T_1)\} \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1))] \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 y_1 = \Omega^2 a_y(T_1) \cos(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1)) + 2\Omega\omega_{0x} a_x(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0y}^2 \xi_y a_y(T_1) \sin(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0y} [D_1\{\beta_y(T_1)\} a_y(T_1) \cos(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1)) + D_1\{a_y(T_1)\} \sin(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1))] \end{cases}$$

В правой части уравнений полученной системы приравняем к нулю секулярные члены, пропорциональные \sin и \cos :

Для x_1 :

$$\cos: \Omega^2 a_x(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{\beta_x(T_1)\} a_x(T_1) = 0$$

$$\sin: 2\omega_{0x}^2 \xi_x a_x(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{a_x(T_1)\} = 0$$

Для y_1 :

$$\cos: \Omega^2 a_y(T_1) + 2\omega_{0y} D_1\{\beta_y(T_1)\} a_y(T_1) = 0$$

$$\sin: 2\omega_{0y}^2 \xi_y a_y(T_1) + 2\omega_{0y} D_1\{a_y(T_1)\} = 0$$

Перепишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} D_1\{a_x(T_1)\} + \omega_{0x} \xi_x a_x(T_1) = 0 \\ D_1\{a_y(T_1)\} + \omega_{0y} \xi_y a_y(T_1) = 0 \\ D_1\{\beta_x(T_1)\} + \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} = 0 \\ D_1\{\beta_y(T_1)\} + \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}} = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} a_x(T_1) = A_x e^{-\omega_{0x} \xi_x T_1} = A_x e^{-\omega_{0x} \xi_x \varepsilon T_0} \\ a_y(T_1) = A_y e^{-\omega_{0y} \xi_y T_1} = A_y e^{-\omega_{0y} \xi_y \varepsilon T_0} \\ \beta_x(T_1) = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} T_1 + \beta_{0x} = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \varepsilon T_0 + \beta_{0x} \\ \beta_y(T_1) = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}} T_1 + \beta_{0y} = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}} \varepsilon T_0 + \beta_{0y} \end{cases}$$

Избавившись от секулярных членов, получаем первую поправку к собственной частоте. Таким образом, система дифференциальных уравнений относительно x_1, y_1 примет вид:

$$\begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = -2\Omega\omega_{0y}A_y e^{-\omega_{0y}\xi_y \varepsilon T_0} \sin\left(\left(\omega_{0y} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}}\varepsilon\right)T_0 + \beta_{0y}\right) \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 y_1 = 2\Omega\omega_{0x}A_x e^{-\omega_{0x}\xi_x \varepsilon T_0} \sin\left(\left(\omega_{0x} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}}\varepsilon\right)T_0 + \beta_{0x}\right) \end{cases}'$$

откуда определяем зависимость собственной частоты от скорости вращения вала с учетом первой поправки:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{0x} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}}\varepsilon \\ \omega_y = \omega_{0y} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}}\varepsilon \end{cases}$$

Потребуем $\varepsilon = 1$:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{0x} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \\ \omega_y = \omega_{0y} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}} \end{cases}$$

Ясно, что критические скорости достигаются при: $\Omega = \sqrt{2}\omega_{0x}$ и $\Omega = \sqrt{2}\omega_{0y}$ соответственно.

Решим данную задачу с помощью расширения *MATLAB*'а – *MATCONT*, который использует метод продолжения по параметру, и сравним полученные результаты. Запишем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{0x}\xi_x\dot{x} + \omega_{0x}^2 x = 2\Omega\dot{y} + \Omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega_{0y}\xi_y\dot{y} + \omega_{0y}^2 y = -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y \end{cases}$$

Решение отыскиваем в виде:

$$x = X e^{i\omega t}, y = Y e^{i\omega t}$$

Подставляя выражения в исходную систему, получим СЛАОУ:

$$\begin{cases} (-\omega^2 + 2\omega_{0x}\xi_x i\omega + \omega_{0x}^2 - \Omega^2)X - 2\Omega i\omega Y = 0 \\ 2\Omega i\omega X + (-\omega^2 + 2\omega_{0y}\xi_y i\omega + \omega_{0y}^2 - \Omega^2)Y = 0 \end{cases}'$$

СЛАОУ имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Определитель системы имеет вид:

$$(-\omega^2 + 2\omega_{0x}\xi_x i\omega + \omega_{0x}^2 - \Omega^2)(-\omega^2 + 2\omega_{0y}\xi_y i\omega + \omega_{0y}^2 - \Omega^2) - 4\Omega^2\omega^2 = 0$$

С помощью *MATCONT* строится зависимость $\omega(\Omega)$. Построим полученные зависимости для случаев: $k_x = 10000 \frac{\text{H}}{\text{м}}, k_y = 40000 \frac{\text{H}}{\text{м}}, m = 1 \text{ кг}$ (рисунок 52).

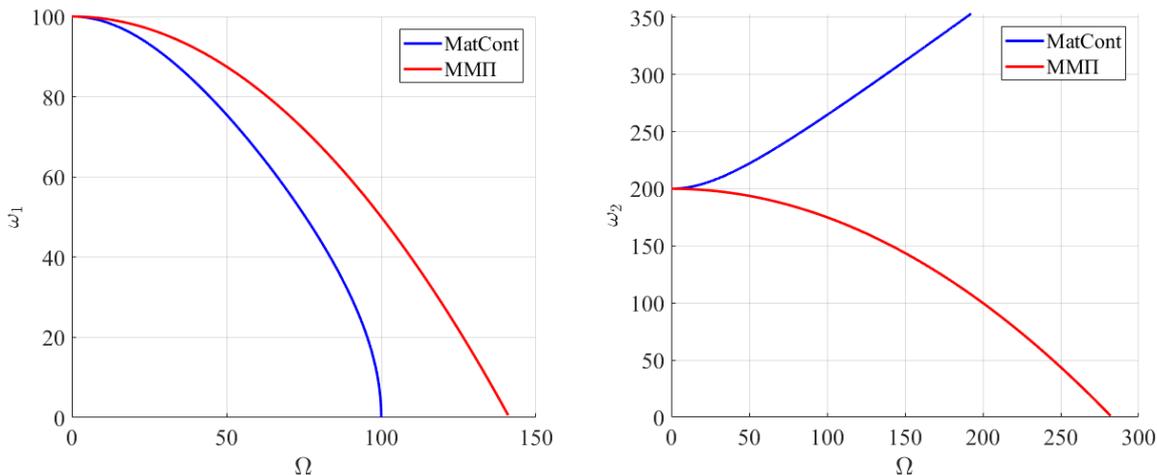


Рисунок 47. Зависимости квадрата первой и второй собственных частот от скорости вращения

Как видно, первая частота дает сравнительно неплохое схождение, в то время как вторая результаты для второго корня расходятся. Совершенно справедливо, что при прохождении первой критической скорости в системе наблюдается неустойчивость, тогда как при прохождении второй частоты должна снова наблюдаться устойчивость. Значит, есть основания полагать, что *MATCONT* дает верный результат, а в методе малого параметра будем учитывать не только первую поправку.

Таким образом, хотим учесть вторую поправку из-за недостаточного схождения с аналитическим решением. Для простоты отбросим демпфирование в системе. Тогда первые поправки примут вид:

$$\begin{cases} a_x(T_1, T_2) = A_x(T_2)e^{-\omega_{0x}\xi_x T_1}|_{\xi_x=0} = A_x(T_2) \\ a_y(T_1, T_2) = A_y(T_2)e^{-\omega_{0y}\xi_y T_1}|_{\xi_y=0} = A_y(T_2) \\ \beta_x(T_1, T_2) = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}}T_1 + \beta_{0x}(T_2) \\ \beta_y(T_1, T_2) = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}}T_1 + \beta_{0y}(T_2) \end{cases}$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений относительно x_1, y_1 без учета демпфирования примет вид:

$$\begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = -2\Omega\omega_{0y}a_y(T_1, T_2) \sin\left(\omega_{0y}T_0 - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}}T_1 + \beta_{0y}(T_2)\right) \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 y_1 = 2\Omega\omega_{0x}a_x(T_1, T_2) \sin\left(\omega_{0x}T_0 - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}}T_1 + \beta_{0x}(T_2)\right) \end{cases},$$

Частные решения для x_1, y_1 :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-2\Omega\omega_{0y}}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} a_y(T_1, T_2) \sin(\omega_{0y}T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) \\ y_1 = \frac{2\Omega\omega_{0x}}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} a_x(T_1, T_2) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) \end{cases}$$

Решение, как и прежде, будем искать в виде степенного ряда:

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \end{cases}$$

Подставим данные разложения в исходную систему уравнений. Нас интересует первые две поправки, поэтому будем откидывать высшие порядки.

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 x_0 + \varepsilon^2 D_0^2 x_2 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_0 + \varepsilon D_0^2 x_1 + 2\varepsilon^2 D_0 D_1 x_1 + \omega_{0x}^2 (x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2) = \\ \quad = \varepsilon [\Omega^2 (x_0 + \varepsilon x_1) + 2\Omega (D_0 + \varepsilon D_1) y_0 + 2\Omega \varepsilon D_0 y_1] \\ D_0^2 y_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 y_0 + \varepsilon^2 D_0^2 y_2 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) y_0 + \varepsilon D_0^2 y_1 + 2\varepsilon^2 D_0 D_1 y_1 + \omega_{0y}^2 (y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2) = \\ \quad = \varepsilon [\Omega^2 (y_0 + \varepsilon y_1) - 2\Omega (D_0 + \varepsilon D_1) x_0 - 2\Omega \varepsilon D_0 x_1] \end{cases}$$

Преобразуем по степеням ε^0 , ε^1 и ε^2 :

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = \varepsilon [\Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2D_0 D_1 x_0 - D_0^2 x_1 - \omega_{0x}^2 x_1] + \\ + \varepsilon^2 [\Omega^2 x_1 + 2\Omega (D_1 y_0 + D_0 y_1) - D_0^2 x_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_0 - 2D_0 D_1 x_1 - \omega_{0x}^2 x_2] \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0y}^2 y_0 = \varepsilon [\Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2D_0 D_1 y_0 - D_0^2 y_1 - \omega_{0y}^2 y_1] + \\ + \varepsilon^2 [\Omega^2 y_1 - 2\Omega (D_1 x_0 + D_0 x_1) - D_0^2 y_2 - (D_1^2 + 2D_0 D_2) y_0 - 2D_0 D_1 y_1 - \omega_{0y}^2 y_2] \end{cases}$$

Приравнивая к нулю члены порядка ε^0 и ε^1 , приходим к уравнениям:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = 0 \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0y}^2 y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = \Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2D_0 D_1 x_0 \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0y}^2 y_1 = \Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2D_0 D_1 y_0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^2: \begin{cases} D_0^2 x_2 + \omega_{0x}^2 x_2 = \Omega^2 x_1 + 2\Omega (D_1 y_0 + D_0 y_1) - (D_1^2 + 2D_0 D_2) x_0 - 2D_0 D_1 x_1 \\ D_0^2 y_2 + \omega_{0y}^2 y_2 = \Omega^2 y_1 - 2\Omega (D_1 x_0 + D_0 x_1) - (D_1^2 + 2D_0 D_2) y_0 - 2D_0 D_1 y_1 \end{cases}$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений относительно x_2, y_2 примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned}
& D_0^2 x_2 + \omega_{0x}^2 x_2 = -2\Omega^3 \omega_{0y} \frac{a_y(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) + \\
& + 2\Omega \left\{ D_1 \{a_y(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) - D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\} a_y(T_1, T_2) \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) \right\} + \\
& \quad + 4\Omega^2 \omega_{0x}^2 \frac{a_x(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) - \\
& \quad - D_1^2 \{a_x(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) + 2D_1 \{a_x(T_1, T_2)\} D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\} \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) + \\
& + D_1^2 \{\beta_x(T_1, T_2)\} a_x(T_1, T_2) \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) + [D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\}]^2 a_x(T_1, T_2) \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) - \\
& - 2\omega_{0x} D_2 \{a_x(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) + 2\omega_{0x} a_x(T_1, T_2) D_2 \{\beta_x(T_1, T_2)\} \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) + \\
& + \frac{4\Omega \omega_{0y}^2}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \left[D_1 \{a_y(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) - D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\} a_y(T_1, T_2) \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) \right] \\
& D_0^2 y_2 + \omega_{0y}^2 y_2 = 2\Omega^3 \omega_{0x} \frac{a_x(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) - \\
& - 2\Omega \left\{ D_1 \{a_x(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) - D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\} a_x(T_1, T_2) \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) \right\} + \\
& \quad + 4\Omega^2 \omega_{0y}^2 \frac{a_y(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) - \\
& \quad - D_1^2 \{a_y(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) + 2D_1 \{a_y(T_1, T_2)\} D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\} \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) + \\
& + D_1^2 \{\beta_y(T_1, T_2)\} a_y(T_1, T_2) \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) + [D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\}]^2 a_y(T_1, T_2) \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) - \\
& - 2\omega_{0y} D_2 \{a_y(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) + 2\omega_{0y} a_y(T_1, T_2) D_2 \{\beta_y(T_1, T_2)\} \sin(\omega_{0y} T_0 + \beta_y(T_1, T_2)) - \\
& - \frac{4\Omega \omega_{0x}^2}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} \left[D_1 \{a_x(T_1, T_2)\} \cos(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) - D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\} a_x(T_1, T_2) \sin(\omega_{0x} T_0 + \beta_x(T_1, T_2)) \right]
\end{aligned} \right.$$

Для x_1 :

$$\text{cos: } 4\Omega^2 \omega_{0x}^2 \frac{a_x(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} - D_1^2 \{a_x(T_1, T_2)\} + [D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\}]^2 a_x(T_1, T_2) - 2\omega_{0x} D_2 \{a_x(T_1, T_2)\} = 0$$

$$\text{sin: } 2D_1 \{a_x(T_1, T_2)\} D_1 \{\beta_x(T_1, T_2)\} + D_1^2 \{\beta_x(T_1, T_2)\} a_x(T_1, T_2) + 2\omega_{0x} a_x(T_1, T_2) D_2 \{\beta_x(T_1, T_2)\} = 0$$

Для y_1 :

$$\text{cos: } 4\Omega^2 \omega_{0y}^2 \frac{a_y(T_1, T_2)}{\omega_{0x}^2 - \omega_{0y}^2} - D_1^2 \{a_y(T_1, T_2)\} + [D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\}]^2 a_y(T_1, T_2) - 2\omega_{0y} D_2 \{a_y(T_1, T_2)\} = 0$$

$$\text{sin: } 2D_1 \{a_y(T_1, T_2)\} D_1 \{\beta_y(T_1, T_2)\} + D_1^2 \{\beta_y(T_1, T_2)\} a_y(T_1, T_2) + 2\omega_{0y} a_y(T_1, T_2) D_2 \{\beta_y(T_1, T_2)\}$$

Перепишем в виде системы уравнений:

Поправки для сдвига по фазе:

$$\begin{cases} D_2 \{\beta_{0x}(T_1, T_2)\} = 0 \\ D_2 \{\beta_{0y}(T_1, T_2)\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_{0x}(T_2) = \beta_{0x} \\ \beta_{0y}(T_2) = \beta_{0y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_x(T_1, T_2) = \omega_{0x} T_0 - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} T_1 + \beta_{0x} \\ \omega_y(T_1, T_2) = \omega_{0y} T_0 - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0y}} T_1 + \beta_{0y} \end{cases}$$

Как видно, вторая поправка к собственной частоте не дает желаемого результата. В таком случае будем предполагать, что парциальные частоты ω_{0x} и ω_{0y} близки друг к другу, то есть система близка к равновесной. Таким образом, мы сможем учесть дополнительные слагаемые, содержащие Ω . Будем считать, что:

$$\omega_{0y} = \omega_{0x} + \delta\omega_{0y},$$

Тогда преобразуем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\omega_{0x}\xi_x\dot{x} + \omega_{0x}^2x = 2\Omega\dot{y} + \Omega^2x \\ \ddot{y} + 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\xi_y\dot{y} + (\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})^2y = -2\Omega\dot{x} + \Omega^2y' \end{cases}$$

где $\omega_{0x}^2 = \frac{k_x}{m}$, – парциальная частота, $\xi_x = \frac{b_x}{2m\omega_{0x}}$, $\xi_y = \frac{b_y}{2m(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})}$ – степень демпфирования

Таким образом, перепишем уравнения в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_{0x}^2x = \varepsilon[\Omega^2x + 2\Omega\dot{y} - 2\omega_{0x}\xi_x\dot{x}] \\ \ddot{y} + \omega_{0x}^2y = \varepsilon[\Omega^2y - 2\Omega\dot{x} - 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\xi_y\dot{y} - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2)y] \end{cases}$$

При переходе к новым переменным T_n операторы дифференцирования преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \equiv D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots$$

Решение будем искать в виде степенного ряда:

$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \\ y = y_0 + \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots \end{cases}$$

Подставим данные разложения в исходную систему уравнений. Нас интересует первая поправка, поэтому будем откидывать высшие порядки.

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 x_0 + \varepsilon D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2(x_0 + \varepsilon x_1) = \varepsilon[\Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0] \\ D_0^2 y_0 + 2\varepsilon D_0 D_1 y_0 + \varepsilon D_0^2 y_1 + \omega_{0x}^2(y_0 + \varepsilon y_1) = \varepsilon[\Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\xi_y D_0 y_0 - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2)y_0] \end{cases}$$

Преобразуем по степеням ε^0 и ε^1 :

$$\begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = \varepsilon[\Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 - D_0^2 x_1 - \omega_{0x}^2 x_1] \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0x}^2 y_0 = \varepsilon[\Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\xi_y D_0 y_0 - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2)y_0 - 2D_0 D_1 y_0 - D_0^2 y_1 - \omega_{0x}^2 y_1] \end{cases}$$

Приравнивая к нулю члены порядка ε^0 и ε^1 , приходим к уравнениям:

$$\varepsilon^0: \begin{cases} D_0^2 x_0 + \omega_{0x}^2 x_0 = 0 \\ D_0^2 y_0 + \omega_{0x}^2 y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon^1: \begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = \Omega^2 x_0 + 2\Omega D_0 y_0 - 2\omega_{0x}\xi_x D_0 x_0 - 2D_0 D_1 x_0 \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0x}^2 y_1 = \Omega^2 y_0 - 2\Omega D_0 x_0 - 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\xi_y D_0 y_0 - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2)y_0 - 2D_0 D_1 y_0 \end{cases}$$

Решения для x_0, y_0 :

$$\begin{cases} x_0 = a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) \\ y_0 = a_y(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) \end{cases}$$

Подставляя данные решения в следующую систему, получим уравнения относительно x_1 :

$$\begin{cases} D_0^2 x_1 + \omega_{0x}^2 x_1 = \Omega^2 a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) - 2\Omega\omega_{0x}a_y(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) + \\ \quad 2\omega_{0x}^2 \xi_x a_x(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0x} [D_1\{\beta_x(T_1)\}a_x(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + D_1\{a_x(T_1)\} \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1))] \\ D_0^2 y_1 + \omega_{0x}^2 y_1 = \Omega^2 a_y(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) + 2\Omega\omega_{0x}a_x(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_x(T_1)) + \\ + 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\omega_{0x}\xi_y a_y(T_1) \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2)a_y(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) + \\ \quad + 2\omega_{0x} [D_1\{\beta_y(T_1)\}a_y(T_1) \cos(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1)) + D_1\{a_y(T_1)\} \sin(\omega_{0x}T_0 + \beta_y(T_1))] \end{cases}$$

В правой части уравнений полученной системы приравняем к нулю секулярные члены, пропорциональные \sin и \cos :

Для x_1 :

$$\cos: \Omega^2 a_x(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{\beta_x(T_1)\} a_x(T_1) = 0$$

$$\sin: -2\Omega\omega_{0x} a_y(T_1) + 2\omega_{0x}^2 \xi_x a_x(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{a_x(T_1)\} = 0$$

Для y_1 :

$$\cos: \Omega^2 a_y(T_1) - (2\omega_{0x}\delta\omega_{0y} + \delta\omega_{0y}^2) a_y(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{\beta_y(T_1)\} a_y(T_1) = 0$$

$$\sin: 2\Omega\omega_{0x} a_x(T_1) + 2(\omega_{0x} + \delta\omega_{0y})\omega_{0x}\xi_y a_y(T_1) + 2\omega_{0x} D_1\{a_y(T_1)\} = 0$$

Поправки к частотам:

$$\begin{cases} D_1\{\beta_x(T_1)\} + \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} = 0 \\ D_1\{\beta_y(T_1)\} + \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} - \delta\omega_{0y} - \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \beta_x(T_1) = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} T_1 + \beta_{0x} = -\frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \varepsilon T_0 + \beta_{0x} \\ \beta_y(T_1) = \left(\delta\omega_{0y} + \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \right) T_1 + \beta_{0y} = \left(\delta\omega_{0y} + \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \right) \varepsilon T_0 + \beta_{0y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{0x} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \varepsilon \\ \omega_y = \omega_{0y} + \left(\delta\omega_{0y} + \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \right) \varepsilon \end{cases}$$

Потребуем $\varepsilon = 1$:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_{0x} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \\ \omega_y = \omega_{0y} + \left(\delta\omega_{0y} + \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \right) = \omega_{0y} + \frac{\delta\omega_{0y}^2}{2\omega_{0x}} - \frac{\Omega^2}{2\omega_{0x}} \end{cases}$$

Оказалось так, что желаемое слагаемое возникает в коэффициентах, не связанных с добавкой к собственной частоте, стало быть, данные рассуждения также не привели к желаемым результатам.

Тогда применим к данной системе теорему о гироскопической стабилизации, которая гласит, что если неустойчивость изолированного положения равновесия системы при одних потенциальных силах имеет нечетную степень, то гироскопическая стабилизация равновесия невозможна при любых членах, содержащих координаты и скорости в степени выше первой.

Степень неустойчивости нашей системы равна 2. Стало быть, данная теорема применима. Для простоты отбросим демпфирование и запишем систему в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + (\omega_{0x}^2 - \Omega^2)x - 2\Omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + (\omega_{0y}^2 - \Omega^2)y + 2\Omega\dot{x} = 0' \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} \dot{x} + c_x x - g\dot{y} = 0 \\ \dot{y} + c_y y + g\dot{x} = 0' \end{cases}$$

где $c_x = (\omega_{0x}^2 - \Omega^2)$, $c_y = (\omega_{0y}^2 - \Omega^2)$, $g = 2\Omega$

Составим характеристическое уравнение данной системы:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + c_x & -g \\ g & \lambda^2 + c_y \end{vmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + c_x + c_y)\lambda^2 + c_x c_y = 0$$

Устойчивость наступит в случае, если все корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми, а корни относительно λ^2 – отрицательными вещественными числами. Для этого необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения удовлетворяли следующим условиям:

$$c_x c_y > 0, g^2 + c_x + c_y, (g^2 + c_x + c_y) - 4c_x c_y > 0$$

Эти три неравенства сводятся к одному условию:

$$|g| > \sqrt{-c_x} + \sqrt{-c_y},$$

c_x, c_y – очевидно, отрицательные из предположения, что мы хотим стабилизировать неустойчивую систему.

Возвращаясь к исходным обозначениям, получим условие для угловой скорости вращения:

$$2\Omega > \sqrt{\Omega^2 - \omega_{0x}^2} + \sqrt{\Omega^2 - \omega_{0y}^2}$$

Таким образом, получаем функциональную зависимость:

$$f(\Omega) = 2\Omega - \sqrt{\Omega^2 - \omega_{0x}^2} - \sqrt{\Omega^2 - \omega_{0y}^2} > 0$$

Так как интересует прохождение через вторую критическую скорость, то область определения данной функции будет $\Omega \in (\omega_{0y}, \infty)$. Построим данную зависимость (рисунок 53):

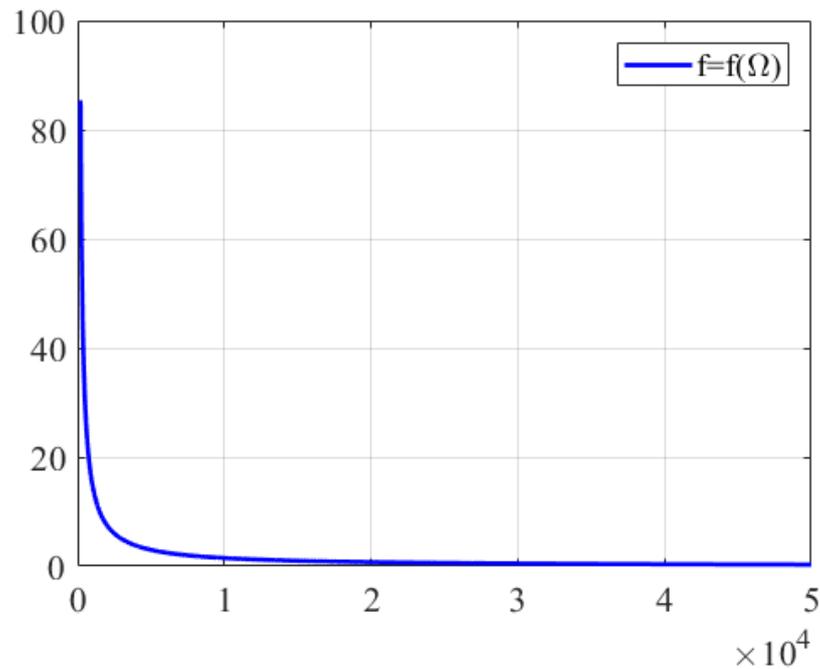


Рисунок 48. Зависимость критерия устойчивости от скорости вращения вала при прохождении второй критической скорости

Таким образом, заключаем, что на интервале $\Omega \in (\omega_{0y}, \infty)$ значение функции $f(\Omega)$ строго положительное. Это означает, что по теореме о гироскопической стабилизации данная система устойчива при прохождении через вторую критическую скорость.